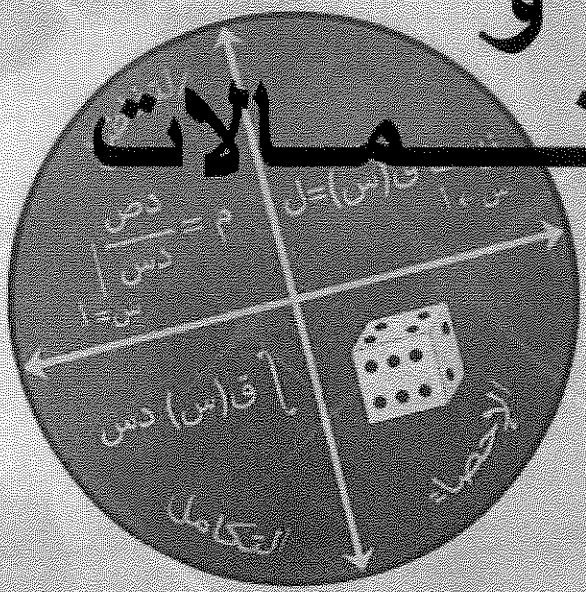
الشاقلدي في الرياضيات

الوحدة الخامسة

الإحصاء و الإحتمالات



إعداد الأستاذ : فادي الشاقلدي

079526051

مبدأ العدّ

ينص مبدأ العد على :

إذا أمكننا إجراء عملية ما على مراحل عددها ك، وأجريت المرحلة الأولى بطرق عددها ن١، والمرحلة الثانية بطرق عددها ن٢، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة ك، التي تجري بطرق عددها نك فإنه يمكن إجراء هذه العملية بطرق عددها ن١ × ن٢ × ... × نك

مثال ① بكم طريقة يمكن إختيار رئيس وأمين سر للجنة مكونة من خمسة أشخاص أ، ب، جـ، د، هـ بشرط ألا يشغل أحد الأشخاص المركزين معاً ؟

مثال ② بناية يتم الدخول إليها والخروج منها عن طريق (٧) أبواب، فكم عدد الطرق التي تتيح لشخص أن يدخل من باب ويخرج من باب آخر ؟

مثال ③ كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها خمسة أشخاص في (٧) مقاعد على خط مستقيم ؟

مثال ④ كم عدداً مكوناً من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٣، ٧، ٤}

أ) إذا سمح بتكرار الأرقام ؟

ب) إذا لم يسمح بتكرار الأرقام ؟

مثال ٥ : كم كلمة من ثلاثة أحرف يمكن تكوينها من الأحرف (أ ، ب ، ج ، د ، هـ ، و) في الحالتين الآتيتين مع ملاحظة عدم ضرورة أن يكون للكلمة معنى :

أ) إذا لم يكن مسموحاً تكرار أي حرف في الكلمة ؟

ب) إذا كان التكرار مسموحاً به ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ⑥ تخرج طالب من المدرسة وأراد أن يكمل دراسته في الجامعة فوجد أمامه (٤) جامعات وفي كل جامعة (٧) كليات فكم طريقة أمامه لإختيار دراسته في كلية من إحدى الجامعات الأربعة ؟

مثال ⑦ أراد رجل السفر من عمان إلى القاهرة مروراً بالعقبة فإذا كان أمامه طريقتين للسفر من عمان إلى العقبة (ب ، ج) وثلاث طرق للسفر من العقبة إلى القاهرة (ب ، ج ، ب) فكم طريقة أمامه للسفر من عمان إلى القاهرة مروراً بالعقبة ؟

مثال ⑧ دخل فادي إلى مطعم لتناول وجبة من الطعام فوجد أمامه نوعين من اللحوم (مشوي ، مقلي) وثلاث أنواع من الأرز (برياني ، سادة ، أوزي) و (٤) أنواع من السلطات و (٣) أنواع من المشروبات فكم طريقة أمامه لتناول وجبة مكونة من لحم ورز وسلطة ومشروب ؟

مثال ⑨ بكم طريقة يمكن بها ترتيب جلوس خمسة أشخاص على خمسة مقاعد ؟

مثال ⑩ بكم طريقة يمكن بها ترتيب جلوس أربعة أشخاص على خمسة مقاعد ؟

مثال (١١) بكم طريقة يمكن بها إختيار رئيس ونائب له من صفه به (٣٠) طالب؟

مثال (١٢) بكم طريقة يمكن بها إختيار رئيس ونائب ومحاسب لتشكيل لجنة من بين (١٠) أعضاء في شركة؟

مثال (١٣) بكم طريقة يمكن بها سحب (٣) كرات من صندوق يحتوي على (٨) كرات ؟

١) إذا كان السحب دون إرجاع ؟

٢) إذا كان السحب مع إرجاع ؟

مثال (١٤) بكم طريقة يمكن بها تكوين كلمة من (٣) حروف مختلفة من حروف اللغة العربية ؟

مثال (١٥) بكم طريقة يمكن بها تكوين كلمة من (٣) حروف مختلفة من مجموعة الأحرف (أ، ب، ج، د، هـ)

مثال (١٦) بكم طريقة يمكن بها تكوين عدد من (٣) منازل من مجموعة الأعداد (١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧)

مثال (١٧) يراد تكوين لوحات كل لوحة مكونة من حرفين مختلفين من مجموعة الأحرف (س، ص، ع) متبوعة بعدد من (٣) منازل من مجموعة الأعداد (١، ٢، ٣، ٤، ٥)

المضروب

المضروب : هو حاصل ضرب العدد بنقسه منقوصا واحد في كل مرة حتى نصل للعدد (١) ويرمز له (!)

إذا كان (ن) عدد صحيح غير سالب فإن مضروب العدد (ن) يساوي :

$ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times (ن-٣) \times \cdots \times ٢ \times ١$

العدد	٠!	١!	٢!	٣!	٤!	٥!	٦!	٧!
مضروبه	١	١	٢	٦	٢٤	١٢٠	٧٢٠	٥٠٤٠

مثال : ما قيمة كل مما يأتي :

$٥! =$

$١٤! =$

$١٦! =$

$٥! \times ٢! =$

$(٢+٣)! =$

$(٢ \times ٣)! =$

$(٩-٤)! + ٢ =$

$٤! - ٢ \times ٢! =$

$٦! + ٢! =$

مثال ① : جد قيمة كل مما يأتي :

$$\frac{٧!}{٥!} =$$

$$\frac{٨!}{٦!} =$$

$٩!$ إمتلك مستقبلك

$(٩-٢)!$

$$\frac{٧!}{٥! \times ٣!} =$$

$$\frac{٧! \times ٢!}{٥! \times ٦!} =$$

مثال ② : أكتب كل مما يلي بأبسط صورة

$$\frac{ن!}{(ن-٢)!} =$$

$$\frac{ن!}{ن(ن-٢)!} =$$

مثال (٤) جد قيمة (ن) في كل مما يلي

١) ن! = ١٢٠

٢) (٢ن)! = ٢٤

٣) (٥ن)! = ١٢٠

٤) (ن+٢)! = ٢٤

٥) (٢ن+١)! = ١٢٠

٦) (ن-١)! = ٢٤

٧) (٢ن)! - ٢ = ١١٨

أمثلة متنوعة

* ما قيمة كل مما يلي

١) ١! =

٢) ٢! =

٣) ٥! =

٤) ٤! =

٥) $\frac{٨!}{٥!}$ =

٦) $\frac{١٢! \times ١٥!}{١٠! \times ١٧!}$

٧) (٣×٢)!

٨) (٤!)(٣!) =

* جد قيمة (ن) لكل مما يلي:

١) ن! = ٧٢٠

٢) ٣(ن!) = ٣٦٠

٣) ٥(ن!) = ٣٠

٤) ن! - ٤! = ٩٦

٥) ن! = ١

٦) ٣ × ن! = ٧٢

٧) (٢ن)! - ٤! = ٩٦

٨) ٣ن! = ٧٢

٩) (٢ن-١)! = ١٢٠

إمتلك مستقبلك

التباديل

التباديل: هو أي ترتيب يتم إجراؤه باستعمال بعض أو كل عناصر مجموعة من الأشياء المتمايزة دون تكرار ((مفهوم الترتيب))

* يستعمل الرمز ل(ن ، ر) ليعني عدد تباديل (ن) من الأشياء المتمايزة مأخوذة (ر) في كل مرة.

* ل(ن ، ر) = ن(ن-١)(ن-٢)...(ن-ر+١)

* ل(ن ، ر) = $\frac{\text{ن!}}{\text{(ن-ر)!}}$ لكل عدد طبيعي ن ، ر بحيث ن ≥ ر

* ل(ن ، ر) = ل(ن ، ن) = ن! ، ر = ن

مثال ① : جد قيمة كل مما يأتي :

١) ل(٣ ، ٥) =

٢) ل(٧ ، ٢) =

٣) ل(٩ ، ٥) =

٤) ل(٧ ، ٣) =

*** قواعد التباديل

* قاعدة ①

ل(ن ، ٠) = ١

ل(ن ، ١) = ن

ل(ن ، ن) = ن!

مثال ① | مثال ②

ل(٩ ، ٩) = | ل(٥ ، ٥) =

ل(٩ ، ٠) = | ل(٥ ، ٥) =

ل(٩ ، ١) = | ل(٥ ، ١) =

ل(٥ ، ٢) + (٣ ، ٠) + ٣!

* قاعدة ②

ل(ن ، ٢) = ن(ن-١)

ل(ن ، ٣) = ن(ن-١)(ن-٢)

ل(ن ، ٤) = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)

مثال : جد قيمة (ن) في كل مما يأتي

١) ل(ن ، ٣) = ٩ ل(ن ، ٢)

٢) ل (ن ، ٤) = ٧ ل (ن ، ٣)

٣) ل (ن ، ٢) = ٣٠

٤) ل (ن ، ٣) = ٣!

٥) ل (ن ، ٣) = ٨ ل (ن ، ٢)

**أمثلة

١) كم عدداً مكوناً من ٥ منازل ، مختلفات يمكن تكوينها من مجموعة الأرقام؟

{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

٢) كم عدد تباديل مجموعة من ستة عناصر مأخوذ ثلاثة عناصر كل مرة؟

٣) كم عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها (٨) أشخاص في (١٣) مقعداً على خط مستقيم علماً بأن أحدهم أصر على أن يجلس في المقعد الأوسط؟

إمتلك مستقبلك

* جد قيمة (ر) التي تحقق كلاً مما يلي:

١) ل(٦، ر) = ١٢٠

٢) ٣ل(٦، ر) = ٩٠

* جد قيمة (ن) التي تحقق كلاً مما يلي:

١) ل(ن، ٢) = ٥٦

٢) ل(ن، ٣) = ٩ ل(ن، ٢)

٣) ل(ن، ٤) = ٦ ل(ن، ٢)

٤) ل(ن - ٢، ٢) = ٣٠

إمتلك مستقبلك

٥) $\frac{1}{3}$ ل(ن، ٣) = ل(ن، ؟) فما قيمة (ن) ؟

مثال: جد قيمة (ر) التي تحقق
المعادلة ٣ ل(٦، ر) = ٣٦٠

مثال: إذا كان ؟ ل(٦، ر) = ٦٠
فجد قيمة (ر)

القلم
إمتلك مستقبلك

البرهنة قاعدة (١)

$ل(١،٥) = \frac{٥!}{(٥-١)!} = \frac{٥!}{٤!} = \frac{٥ \times ٤!}{٤!} = ٥$

$ل(٠،٥) = \frac{٥!}{(٥-٠)!} = \frac{٥!}{٥!} = ١$

$ل(٥،٥) = \frac{٥!}{(٥-٥)!} = \frac{٥!}{٠!} = ٥! = ١٢٠$

مثال ٥: جد كل مما يلي

١) $\frac{ل(٣،٨)}{ل(٠،٧)} =$

٢) $\frac{ل(٣،٨)}{ل(١،٧)} =$

٣) $٢ ل(٣،٣) + ل(٠،٧) - ٣ل(٤،٤)$

مثال ٥: جد قيمة (ن) في كل مما يلي

١) ل (ن، ن) = ٧٢٠

٢) ل (ن، ن) = ١٢٠

٣) ل (ن، ١) = ١٣

٤) ل (ن، ٠) = ١

مثال عبر عما يلي بإستخدام التباديل

أ) ٥ × ٦ × ٧ × ٨ × ٩ = ١٥١٢٠

ب) ٢٨ × ٢٩ × ٣٠

**أمثلة متنوعة

١) بكم طريقة يمكن بها ترتيب جلوس ٨ أشخاص على سبعة مقاعد؟

٢) تقدم أربعة أشخاص لمسابقة في السباحة ما عدد التراتيب المختلفة لنتائج السباق؟

٣) بكم طريقة يمكن بها تكوين كلمة من (٣) حروف مختلفة من مجموعة الأحرف (س، ص، ع، ل، م)

٤) ما عدد تباديل مجموعة ذات (٨) عناصر مأخوذ (٤) عناصر منها في كل مرة

٥) ما عدد تباديل مجموعة ذات (٩) عناصر مأخوذ (٣) عناصر منها في كل مرة ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

التوافيق

التوافيق : هو أي مجموعة جزئية عدد عناصرها (ر)، مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها (ن) (الترتيب غير مهم)

* يرمز لعدد التوافيق (ن ر)، ويقراء (ن) فوق (ر)

* $(ن\ ر) = ل(ن، ر) = \frac{ن!}{ر!\ (ن-ر)!\ ر!}$

*** للتمييز بين التباديل والتوافيق

بكم طريقة يمكن إختيار عريف ونائب من صف مكون من (٢٠) طالب	بكم طريقة يمكن إختيار طالبين من صف فيه (٢٠) طالب

مثال ① جد قيمة كل مما يلي

١) $(٣\ ٥) =$

٢) $(٢\ ٢) =$

*** قواعد التوافيق

* قاعدة ①

$(ن\ ٠) = ١$

$(ن\ ن) = ١$

$(ن\ ١) = ن$

مثال ؛ جد قيمة كل مما يلي

١) $(٩\ ١) =$

$(٩\ ٠) =$

$(٩\ ٩) =$

٢) $(٩\ ٥) + ل(٥، ٢) + ١٣$

٣) (٥ ٣) (٤ ٣) + ل (٥ ، ٢)

مثال : إذا كان ل (ن ، ٣) = (ن ٤) فما قيمة (ن) ؟

مثال : إذا كان ل (ن ، ٢) = ٣٠ فجد قيمة (ن ٢) ؟

مثال : جد قيمة ن التي تحقق المعادلة ل (ن ، ٣) = ٦ × (ن ٢)

مثال : إذا كان ل (ن ، ٣) = ٦٠ فإن (ن ٣) يساوي

مثال : إذا كان (ن ٣) = ١٠ فجد قيمة ل (ن ، ٣)

مثال : إذا كان ن ! = ل (٣ ، ٥) + ٤/٣ × (ن ١) فجد قيمة ن ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ١: إذا كان $\binom{ن}{٣} = ل(ن، ٢)$ فما قيمة (ن) ؟

مثال ٢: جد قيمة ن التي تحقق المعادلة

$(ن+١)! = \binom{١٠}{٣} \times ل(٦، ١)$

مثال ٣: جد قيمة ن التي تحقق المعادلة :

$ل(ن، ٢) = ٥! + \binom{٩}{٢}$

القلم
إمتلك مستقبلك

*قاعدة ②

$\binom{\text{مجهول}}{} = \binom{\text{مجهول}}{}$

المجهول = مجموع السفلي

مثال ٥: جد قيمة كل مما يأتي

١) $\binom{س}{٥} = \binom{س}{٣}$

٢) $\binom{٢س+١}{٨} = \binom{س٢+١}{٣}$

*قاعدة ③

$\binom{\text{مجهول}}{\text{مجهول}} = \binom{\text{مجهول}}{}$

المجهول = المقابل المجهول = الفوق تحت

مثال ٥: جد قيمة كل مما يأتي

١) $\binom{٩}{س} = \binom{٩}{٢}$

٢) $\binom{٢س+٣}{٢٠} = \binom{٢٠}{١٢}$

٣) $\binom{١٢}{س} = \binom{١٢}{٨}$

٤) $\binom{٩}{٣س} = \binom{٩}{٦}$

مخلص مقارنة بين التباديل و التوافيق

التباديل	التوافيق
ل(٥، ٢) =	(٥ ٢) =
السؤال يحدد	السؤال لا يحدد
الترتيب مهم	الترتيب غير مهم
ل(ن، ٠) = ١	(ن ٠) = ١
ل(ن، ن) = ن!	(ن ن) = ١
ل(ن، ١) = ن	(ن ١) = ن
ل(ن، ٢) = ن(ن-١)	(مجهول) = (مجهول)
ل(ن، ٣) = ن(ن-١)(ن-٢)	مجهول = مجموع السفلي
ل(ن، ٤) = ن(ن-١)(ن-٢)(ن-٣)	
	(مجهول) = (مجهول)
	ل
	مجهول - المقابل للمجهول
	الفرق - التحت

أمثلة

١) كم عدد الطرق التي يمكن بها إختيار لجنة خماسية من بين صف عدد طلابه ١٢ طالباً ؟

٢) ما عدد الطرق الممكنة لإختيار خمسة أسئلة للإجابة عنها في إمتحان للرياضيات يتكون من سبعة أسئلة ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

** أسئلة متنوعة

س١: جد قيمة ن لكل مما يأتي

١) ن! = ٧٢٠

٢) ٢(ن!) = ٣٦٠

٣) ن! - ٤! = ٩٦

س٢: جد قيمة كل مما يلي:

١) $\frac{٨!}{٦!}$ =

٢) $\frac{٧!}{(٧-٢)!}$ =

٣) $\frac{١٦!}{١٢! \times ٤!}$ =

س٣:

١) يتكون مجلس إدارة إحدى الشركات من خمسة أعضاء، كم طريقة يمكن بها إختيار رئيس ونائب رئيس من بين أعضاء مجلس إدارة الشركة

٢) دخل فادي محلاً لبيع أجهزة الحاسوب، فوجد أمامه (٣) أنواع مختلفة لشاشات العرض، و(٤) أنواع للمفاتيح، و(٥) أنواع لوحدات التشغيل (الصندوق) فكم طريقة يمكن بها إختيار جهاز مكون من شاشة ولوحة المفاتيح ووحدة التشغيل ؟

٣) بكم طريقة يمكن إختيار مديرة ومساعدة وسكرتيرة ومحاسبة وقيمة مختبر من بين (١٠) معلمات؟

ع) أرادت دائرة السير صنع لوحات معدنية للسيارات تحمل كل منها حرفاً من الحروف الهجاء العربية متبوعاً بعدد من رقمين من مجموعة الأرقام (١، ٢، ٣، ٤، ... ، ٩٦) فكم لوحة مختلفة يمكن صنعها إذا علمت أن عدد حروف الهجاء العربية (٢٨) حرفاً ؟

س٤ : ما قيمة كل مما يأتي :

١) ل (١٦٢٠) =

٢) ل (٩،٩) =

٣) ل (٠،٢٥) =

٤) ل (٢٦) =

٥) ل (٣٦٤) =

٦) ل (٤٦٨) =

س٥ : جد قيمة (ن) التي تحقق كلاً مما يأتي :

١) ل (ن ، ٢) = ٥٦

٢) ل (ن ، ٣) = ٩ ل (ن ، ٢)

س٦ : جد قيمة (س) في المعادلات التالية

١) $(^{٩}_{س}) = (^{٩}_{٥})$

٢) $(^{س}_{٣}) = (^{س}_{٩})$

س٧ : ما عدد الطرق الممكنة لإختيار (٥) أسئلة للإجابة عليها في إمتحان الرياضيات يتكون من (٧) أسئلة ؟

س٨ : إذا كان عدد أعضاء مجلس إدارة إحدى الشركات (١٠) أعضاء وكان من ضمنهم (٤) سيدات ، ما عدد طرق إختيار رجلين وسيدة من الأعضاء لتمثيل الشركة في أحد المؤتمرات ؟

س٩ : مجموعة مكونة من (٨) طلاب و (٣) معلمين ، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية منهم في كل من الحالات الآتية

م) تتكون اللجنة من (٣) طلاب ومعلم؟

ب) تتكون من معلمين على الأقل ؟

ج) رئيس اللجنة ونائبه من المعلمين والباقي من الطلاب ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

المتغير العشوائي وتوزيع ذي الحدين

التوزيع الإحتمالي (المتغيرات العشوائية المنفصلة)

عند إجراء تجربة نهتم بخاصية معينة.
فمثلاً عند رمي قطعة النقد مرتين فإن الفضاء العيني.

ى = {ص ص، ص ك، ك ص، ك ك}
فإذا دل المتغير العشوائي س على عدد مرات ظهور الصورة فإن
(ص ص) = ٢، (ص ك) = ١، (ك ك) = ٠

المتغير س يسمى بالمتغير العشوائي والقيم التي يأخذها هي {٠، ١، ٢}
تسمى بقيم س و إذا ربطنا رقم (س) مع إحتمالها كما في الجدول

س	٠	١	٢
ل(س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

مثال: تم رمي قطعة نقد مرة واحدة فإن الفضاء العيني؟

مثال: تم رمي قطعتين نقد فإن الفضاء العيني؟

مثال: تم رمي ثلاث قطع نقد فإن الفضاء العيني؟

مثال: لدى عائلة طفل واحد فإن الفضاء العيني

مثال: لدى عائلة طفلان فإن الفضاء العيني

مثال: تم رمي حجر النرد ذات الستة أوجه مرة واحدة فإن الفضاء العيني؟

إمتلك مستقبلك

التوزيع الإحتمالي

*** خطوات الحل :

١) نكتب الفضاء العيني لـ

٢) نكتب قيم س = عدد التجارب

٣) نرسم الجدول

س			
ل(س)			

مثال ① : لدى عائلة ثلاث أطفال و إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الذكور كون جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير (س)

مثال ② : عند رمي قطعة نقد (٣) مرات وإذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الصورة كون جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير (س)

مثال ③ : عند تسجيل طفلين حسب الجنس وتسلسل الولادة وإذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور أكتب التوزيع الإحتمالي للمتغير (س)

القلم إمتلك مستقبلك

ذي الحديين

مثال ④ : إذا كان التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة
{ (٠، ٠٫٢) ، (١، ٤٫٠) ، (٢، ب) }
فما قيمة (ب)

* * القانون

ل(س = ل) = $\binom{ن}{س}$ $م^{س}$ $(١-م)^{ن-س}$

ويسمى (ن)، (م) معاملي المتغير (س)

ن ← عدد مرات إجراء التجربة
س ← المطلوب بالسؤال
م ← دائماً هي الإحتمال

مثال ⑤ : يمثل الجدول المجاور التوزيع الإحتمالي المتغير العشوائي (س)
ما قيمة الثابت (ب) ؟

س	٠	١	٢
ل(س)	٠٫٢	ب	٠٫٥

تذكير من التوافيق

$\binom{ن}{٠}$ = ١

$\binom{ن}{ن}$ = ١

$\binom{ن}{١}$ = ن

مثال ① إذا علمت أن ن = ٣ ، ق = ٠,٦

المطلوب :

أ) ل (س = ٢)

ب) ل (س ≤ ٤) =

ب) ل (س = ٠)

مثال ② : إذا علمت أن ن = ٥ ، ق = ٠,٣

المطلوب

أ) ل (س ≥ ١) =

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ③ عند رمي قطعة نقد (٥) مرات
أ) ما احتمال ظهور الصورة في (٤) مرات؟
ب) ما احتمال ظهور الصورة في جميع المرات؟

مثال ④: عند رمي حجر نرد (٤) مرات ما احتمال ظهور العدد (٢) في ثلاث مرات

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ⑤ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا حدين معاملة ن = ٤ ، م = ٢/١ و
فجد ما يلي
أ) ل (س = ٣)
ب) ل (س > ٣)
ج) ل (س ≥ ١)

مثال ⑥ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذات الحدين معاملة ن = ٥ ، م = ٣/١ و
فجد ما يلي
أ) ل (س = ٢)
ب) ل (س < ١)
ج) ل (س ≤ ٤)

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ⑦ : إذا كان إحتمال أن يصيب شخص هدفاً ما في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي $(\frac{1}{2})$ فإذا أطلق (٥) طلقات على الهدف فما إحتمال ما يلي

أ) إصابة الهدف ٣ مرات ؟

ب) عدم إصابة الهدف ؟

ج) إصابة الهدف واحدة على الأكثر ؟

د) إصابة الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال (٨) : قررت إحدى الشركات الخاصة رفض أي شحنة من المواد التي تشتريها إذا وجدت وحدتان معيبتان أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٧) وحدات فإذا كانت نسبة المعيب في إنتاج تلك الشركة الصناعية (١٠٪) فما إحتمال رفض الشحنة ؟

مثال (٩) : إذا كان (س) متغيراً ذات حدين حيث ن = ٣ وكان ل (س ≥ ٢) = $\frac{٩٨}{١٢٥}$ فجد

١) قيمة ح ؟

٢) ل (س = ؟)

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال (١٠) : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذات حدين حيث ن = ٣ وكان ل (س ≤ ١) = $\frac{١٩}{٢٧}$ فجد قيمة كل من

١) ﻫ

٢) ل (س = ٢)

* * أسئلة متنوعة

س١ : إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين معاملاه ن = ٣ ، ﻫ = $\frac{٢}{٥}$ فجد

أ) قيمة س

ب) أرسم جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (س)

إمتلك مستقبلك

س٢ : إذا كانت نسبة الإنبات في بذور البندورة تساوي ٨٠٪ وتم زراعة خمسة بذور في إحدى الحدائق فما إحتمال إنبات :؟

أ) خمسة بذور ؟

ب) ثلاث بذرات على الأقل ؟

س٣ : إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع (١٠٪) فإذا أخذت (٥) قطع من إنتاج المصنع بطريقة عشوائية فما إحتمال :

أ) أن لا تجد أي قطع معيبة ؟

ب) أن يكون بينها قطعة معيبة ؟

ج) أن لا يزيد عدد القطع المعيبة على قطعة واحدة ؟

س٤ : إذا كان إحتمال نجاح عملية جراحية يساوي ٨٠٪ فما إحتمال نجاح عمليتين على الأقل إذا أجريت ثلاث عمليات ؟

س٦ : صندوق فيه (٥) كرات حمراء و(٣) كرات بيضاء سحبت كرتان علما أن (س) تدل على الكرات الحمراء مع الإرجاع.
المطلوب : أكتب التوزيع الإحتمالي

س٥ : إذا كانت نسبة التالف في إنتاج مصنع لأجهزة الحاسوب (٠.١ و) وأخذت عينة حجمها (٥) أجهزة بطريقة عشوائية فما إحتمال أن يكون جميعها صالحة ؟

العلامة المعيارية

١) ع ← الإنحراف المعياري
٢) س ← علامة الطالب أو القيمة
٣) $\bar{س}$ ← الوسط الحسابي
٤) ز ← القيمة المعيارية

*** القانون

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع}$$

مثال ① : إذا كان الوسط الحسابي يساوي (٨٠) والإنحراف المعياري يساوي (٢) وعلامة الطالب تساوي (٩٠) فما القيمة المعيارية ؟

١) إذا ذُكر في السؤال كلمة ← فوق الوسط تدل على
س = ؟ مجهول ① ز = إشارة موجبة ②

٢) إذا ذُكر في السؤال كلمة تحت الوسط تدل على
س = ؟ مجهول ① ز = إشارة سالبة ②

مثال ② : إذا كان الإنحراف المعياري يساوي (٥) والقيمة المعيارية تساوي (٢) والوسط الحسابي يساوي (٩٠) فما العلامة المجهولة

مثال ③ : إذا كانت علامة الطالب تساوي (٨٠) والإنحراف المعياري يساوي (٣) والقيمة المعيارية تساوي (٢) فما الوسط الحسابي ؟

القلم إمتلك مستقبلك

مثال ① : إذا كان الوسط الحسابي يساوي (٦٠) والإنحراف المعياري يساوي (٢) فما العلامة التي تنحرف إنحرافين فوق الوسط ؟

*** أسئلة متنوعة

س١ : إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٥)، والإنحراف المعياري لها (٤) فإن القيمة التي تنحرف ثلاثة إنحرافات تحت الوسط الحسابي هي

س٢ : إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في أحد الإختبارات هو (١٢) والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين هو (١٫٢) فإن الإنحراف المعياري لعلامات الطلاب في هذا الإختبار يساوي

س٣ : إذا كان علامتا طالبتين من الصف نفسه في الرياضيات (٨٥، ٧٠) والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما (١، -٢) على الترتيب فإن الإنحراف المعياري لعلامات الرياضيات يساوي

إمتلك مستقبلك

س٤ : إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والإنحراف المعياري (٥)، فإن العلامة المعيارية للعلامة (٥٨) هي .

س٥ : صف مكون من (٢٠) طالبة، إذا كانت علامات الطالبات تاليه، زينه، حنين هي (٩٠، ٨٠، س) على الترتيب وعلاماتهن المعيارية (٣، ٢، -١) فما علامة الطالبة حنين .

س٦ : إذا كانت العلامات المعيارية لطلبة يوسف، أحمد، وائل هي (١، -١، ؟) على الترتيب، وكان الوسط الحسابي لعلامات الصف (٧٠) والفرق بين علامتي يوسف وأحمد يساوي (١٠) فما العلامات الفعلية لطلبة الثلاث؟

العلم
إمتلك مستقبلك

س٧ : إذا كان الوسط الحسابي لشعبة الأدبي في الرياضيات (٧٠)، والإنحراف المعياري لها (٨)، والوسط الحسابي لعلامات شعبة المعلوماتية (٧٥)، والإنحراف المعياري لها (٥)، وكانت علامة أحد الطلبة في شعبة الأدبي في الرياضيات (٦٤)، وعلامة أحد طلبة شعبة المعلوماتية (٦٥) فأي العلامتين أفضل ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

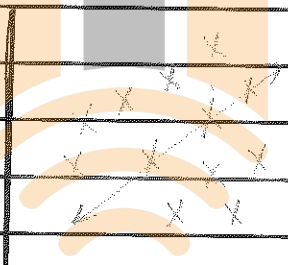
نظرية معامل بيرسون

مثال ① : إذا كان

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٢	٤	٦	٨	٥

أحسب معامل الإرتباط بيرسون (ر) بين المتغيرين س ، ص في الجدول

إمتلك مستقبلك

٣) 

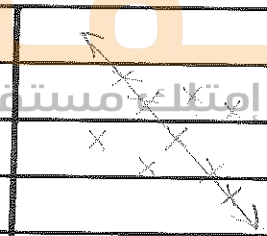
مثال ① إذا علمت أن

$\sum (س - \bar{س})^2 = ٨$

$\sum (ص - \bar{ص})^2 = ؟$

$\sum (س - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ؟$

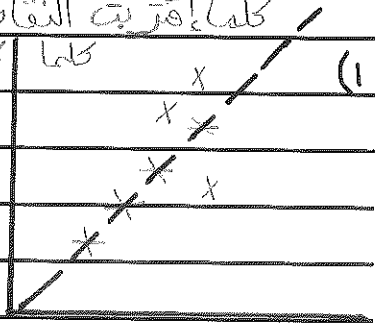
فأوجد معامل بيرسون (ر)

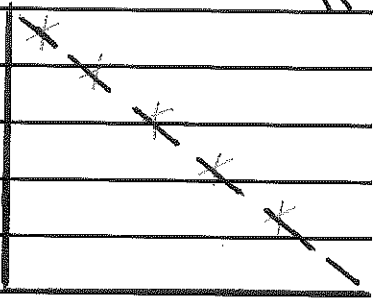
٤) 

إمتلك مستقبلك

مثال ② أذكر أسماء الأشكال التالية

كلما إقتربت النقاط من الخط المستقيم كلما كان الإرتباط أقوى

١) 

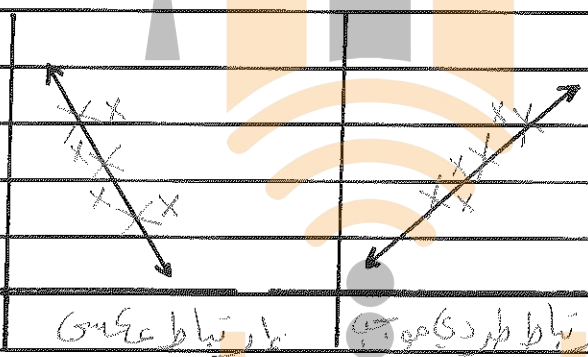
٢) 

$س^*$ ، $ص^*$	س وص في درجات الحرية

تنظر على إشارة معامل (س)
تنظر على إشارة معامل (ص)

إذا كانت الإشارتين مختلفتان	إذا كانت الإشارتين متشابهتان
نعكس إشارة الجواب	تبقى نفس الإشارة مع الجواب

* الإنتشار : تنتشر الأزواج (س، ص) في المستوى الديكارتي.
إذا أمكن إيجاد خط مستقيم يمر بأكبر عدد ممكن بالنقاط فنستطيع قياس قوة الإرتباط بين هذه الأزواج المرتبة.



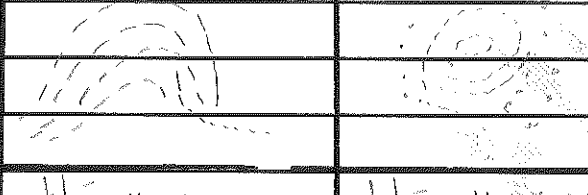
إرتباط طردي موجب قوي

إرتباط عكسي سالب قوي

** الإرتباط نوعان

إرتباط طردي موجب (متزايد) | إرتباط عكسي سالب (متناقص)

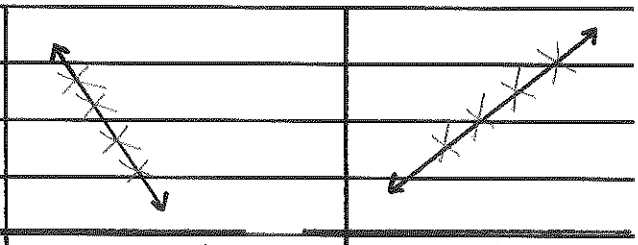
* كلما أقتربت النقاط من الخط المستقيم كان الإرتباط أقوى



عديم الإرتباط ر = صفر

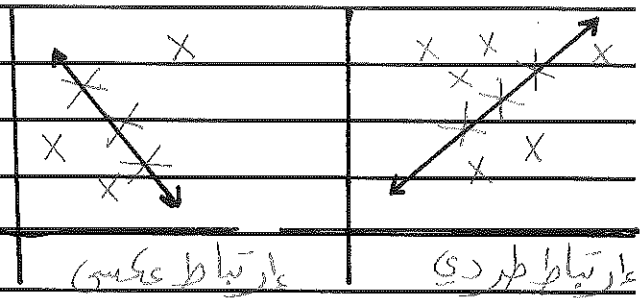
عديم الإرتباط ر = صفر

لا يمكن إيجاد خط مستقيم خطي



إرتباط طردي موجب تام ر = ١

إرتباط عكسي سالب تام ر = -١



إرتباط طردي موجب ضعيف

إرتباط عكسي سالب ضعيف

مثال ① إذا كانت $س^* = ٣س + ٨$ ، $ص^* = ٤ص - ٣$ وكان معامل الإرتباط يساوي (-٠,٥) أحسب معامل بيرسون الجديد.

مثال ② إذا كانت $س^* = ٧ - ٢س$ ، $ص^* = ٢ص + ٩$ وكان معامل بيرسون ر = ٠,٨ أحسب معامل بيرسون الجديد

إمتلك مستقبلك

سؤال وزاري (٢٠١٣)

جد معامل ارتباط بيرسون (ر) بين المتغيرين س ، ص في الجدول الآتي

س	٧	٦	٩	١٠	٨
ص	٨	٧	١٠	٨	١٢

ملاحظة:

$$ر = \frac{\sum (س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=1}^{ن} (س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=1}^{ن} (ص_ي - \bar{ص})^2}}$$

سؤال وزارة ٢٠١٢

أكمل الجدول الآتي لحساب معامل إرتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص :

س	ص	(س - س̄)	(ص - ص̄)	(س - س̄)(ص - ص̄)	(س - س̄)²	(ص - ص̄)²
٣	٦	-٢	-١			
٥	٥	٠	-٢			
٦	٩	١	٢			
٧	٨	٢	١			
٤	٧	-١	٠			
المجموع						

علماً بأن $ر = \frac{\sum_{ت=1}^{ن} (س - س̄)(ص - ص̄)}{\sqrt{\sum (س - س̄)^2 \times \sum (ص - ص̄)^2}}$

إمتلك مستقبلك

معادلة خط الإنحدار

مثال ٥ ① إذا علمت أن س ، ص حسب الجدول الآتي

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	٢	٤	٦	٨	٥

أ حسب معادلة خط الإنحدار

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال ٥ : إذا علمت أن $\hat{ص} = ٣س + ٥$
إحسب ما يلي

١) قدر قيمة ص عندما س = ١٢
٢) توقع قيمة ص عندما س = ١٣
٣) إحسب الخطأ في التنبؤ عندما س = ٢ والحقيقية تساوي (٢٠)
٤) إحسب الخطأ عندما س = ٣ والحقيقية تساوي (١٥)

** قانون ← (الخطأ)

الخطأ = القيمة الحقيقية - القيمة المتنبأ بها

مثال
توصل باحث تربوي إلى معادلة خط الإنحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل في الثانوية العامة (ص) فكانت $\hat{ص} = ٣س + ٦٥$

١) ما قيمة كلاً من P ، ب ؟
٢) درسة الطالبة (٨) ساعات يومياً وحصلت على معدل (٨٦) ، إحسب الخطأ في التنبؤ للمعدل الذي حصلت عليه الطالبة ومعتمداً على معادلة خط الإنحدار المعطاة

مثال: إذا كان س ، ص متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان $\sum_{ي=1}^{٥}(س_ي - \bar{س})(ص - \bar{ص}) = ٤٠$ ، $\sum_{ي=1}^{٥}(س_ي - \bar{س})^2 = ٤٠$ ، $\bar{س} = ٦$ ، $\bar{ص} = ١٢$ فجد معادلة خط الإنحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س ؟

مثال: في دراسة أجراها أحد الطلبة للدراسات العليا توصل إلى معادلة خط الإنحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س) والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة إحدى الجامعات فكانت $\hat{ص} = ٥٣ + ٥س$ معتمداً معادلة خط الإنحدار أجب عن الأسئلة

١) جد قيمة ٩ ، ب ؟

٢) قدر معدل طالب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية له (٥) ساعات ؟

٣) إذا كان معدل طالب درس (٨) ساعات يومياً هو (٩٥) جد الخطأ في التنبؤ ؟

سؤال وزارة (٢٠٠٩) صيفي ضمن دائرة

لتكن $\hat{ص} = ٣و٠ س + ١٠$ هي معادلة خط الإنحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت قيم (س) إذا كانت إحدى قيم (س) تساوي (٩٠) وقيمة (ص) الحقيقية المناظرة لها (٣٦) فإن الخطأ في التنبؤ بقيمة س يساوي

القلم
إمتلك مستقبلك

التوزيع الطبيعي

١) السؤال فيه كلمة توزيع طبيعي

٢) نطبق القانون $ز = \frac{س - س}{ع}$

٣) ل (ز ≥ عند) = السؤال مباشر

ل (ز ≤ عند) = السؤال مباشر

ل (ز ≤ عند) = السؤال عكس مباشر

ل (ز ≥ عند) = السؤال عكس مباشر

سؤال وزارة ٢٠١٤ شتوي

إذا كانت أوزان (١٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤٥) كغم و إنحراف معياري (٤) كغم ما عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٠) كغم ؟

ملاحظة : يمكنك الإستفادة من الجدول الآتي :

ز	٢٫٢٥	٢٫٥	١٫٧٥	١٫٢٥	١٫٥٢	٠٫٨
ل (ز)	٠٫٩٨٧٥	٠٫٩٩٣٨	٠٫٩٥٩٩	٠٫٨٩٤٤	٠٫٩٣٥٧	٠٫٧٨٨١

سؤال وزارة ٢٠١١ شتوي

تتخذ أعمار (١٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٤) سنة وإنحراف معياري (٨) سنوات ما عدد الأشخاص الذين تزيد أعمارهم عن (٦٠) سنة

ملاحظة : يمكنك الإستفادة من الجدول

سؤال وزارة ٢٠١١ صيفي

إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع الطبيعي بوسط حسابي (٣٫٥) كغم وإنحراف معياري (٠٫٥) كغم إذا إختير طفل عشوائياً عند الولادة فما إحتمال أن يكون وزنه أكبر من (٣) كغم

ملاحظة : يمكنك الإستفادة من الجدول

إمتلك مستقبلك

ز	٠٫٨	٠٫٩	١٫٠	١٫١	١٫٢	١٫٣
ل(ز)	٠٫٧٨٨١	٠٫٨١٥٩	٠٫٨٤١٣	٠٫٨٦٤٣	٠٫٨٨٤٩	تمييز

ز	٠٫٥	٠٫٦	٠٫٧	٠٫٨	٠٫٩	١
ل(ز)	٠٫٦٩١٥	٠٫٧٢٥٧	٠٫٧٥٨٠	٠٫٧٨٨١	٠٫٨١٥٩	٠٫٨٤١٣

سؤال وزارة ٢٠٠٩ شتوي

إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعياً وسطه الحسابي (٣٫٢) كغم وإنحرافه المعياري (٠٫٤) كغم إختير أحد الأطفال عشوائياً عند الولادة ما إحتمال أن يكون وزنه أكثر من (٤) كغم

ملاحظة : يمكنك الإستفادة من الجدول

سؤال وزارة ٢٠٠٩ صيفي

تقدم لإمتحان (٥٠٠٠) طالب وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٤١) ، وإنحراف معياري (٦) . جد عدد الطلبة الناجحين في الإمتحان علماً بأن علامة النجاح (٥٠) ؟

ملاحظة : يمكنك الإستفادة من الجدول

إمتلك مستقبلك

ز	صفر	٠٫٥	١	١٫٥	٢	٢٫٥
ل(ز)	٠٫٥٠٠٠	٠٫٦٩١٥	٠٫٨٤١٣	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٩٣٨

ز	صفر	٠٫٥	١	١٫٥	٢	٢٫٥
ل(ز)	٠٫٥٠٠٠	٠٫٦٩١٥	٠٫٨٤١٣	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٩٣٨

سؤال وزارة ٢٠٠٨ شتوي

إذا كانت أوزان طلبة إحدى المدارس تتبع توزيعا طبيعيا وسطه الحسابي يساوي (٤٥) كغم وانحرافه المعياري (٤) كغم اختير أحد الطلبة عشوائيا ما احتمال أن يكون من الطلبة الذي تنحصر أوزانهم بين (٤٣) كغم، (٤٩) كغم ؟

ملاحظة: يمكن الإستفادة من الجدول

سؤال وزارة ٢٠١٣ شتوي

تقدم (١٠٠٠) طالب لإمتحان عام وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بواسط حسابي (٥٤) وإنحراف معياري (٨). جد عدد الطلبة الناجحين في الإمتحان إذا كانت علامة النجاح (٥٠) ؟

ملاحظة: يمكنك الإستفادة من الجدول

ز	صفر	٠٫٥	١	١٫٥	٢
ل(ز)	٠٫٥٠٠٠	٠٫٦٩١٥	٠٫٨٤١٣	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٧٧٢

ز	٠	٠٫٥	١	١٫٥	٢	٢٫٥
ل(ز)	٠٫٥٠٠٠	٠٫٩٩١٥	٠٫٨٤١٣	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٩٣٨

سؤال وزارة ٢٠١٢ شتوي

إذا كان راتب (١٠٠٠) موظف في إحدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٢٠٠) دينار شهرياً وإنحراف معياري (١٠) دنانير فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين (٢٨٠) ديناراً و (٢٢٠) ديناراً؟

ملاحظة: يمكنك الإستعانة بالجدول

ز	٣	٢٫٥	٢	١٫٥	١
ل(ز)	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٣٨	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٣٣٢	٠٫٥٧٩٣

سؤال وزارة ٢٠١٠ صيفي

إذا كانت علامات (١٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي للعلامات (٥٥) والإنحراف المعياري (١٠) وكان عدد الناجحين (٥٣٩٨) طالباً، فما علامة النجاح؟

ملاحظة: يمكنك الإستفادة من الجدول

ز	١	١٫٥	٢	٢٫٥	٣	٣٫٥	٤
ل(ز)	٠٫٥٣٩٨	٠٫٥٧٩٣	٠٫٦١٧٩	٠٫٦٥٥٤	٠٫٦٩١٥		

إمتلك مستقبلك

سؤال وزارة ٢٠١٠ شتوي

تقدم لإمتحان الثانوية العامة في إحدى السنوات (٢٠٠٠) طالب من طلبة أحد الفروع المهنية وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (٥٧) وإنحراف معياري (١٦). إذا علمت أنه لا يسمح للطالب الذي معدلة أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية جد عدد طلبة ذلك الفرع الذي يحق لهم تقديم الطلبات.

ملاحظة: يمكنك الإستفادة من الجدول

ز	صفر	٠٫٥	١	١٫٥	٢
ل(ز)	٠٫٥٠٠٠	٠٫٦٩١٥	٠٫٨٤١٣	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٧٧٢

٠٫٩٩٣٨ ٢٫٥