النـهـايـات

مفهوم النهاية

ليكن ق اقترانا معرفا على فترة مفتوحة حول العدد أ ، فإذا اقتربت قيم الاقتران ق من العدد ل عندما يقترب المتغير س من المتغير أ ، فإن ل هي نهاية الاقتران ق عندما تقترب س من العدد أ .

يرمز للنهاية $\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$

+ ← تعني يمين النهاية

− ← تعني يسار النهاية

تفحص النهاية من الطرفين إذا لم تكن محددة

$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) = \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

تكون النهاية موجودة

$\lim_{س \to أ} ق(س) = ل$

$\lim_{س \to أ^+} ق(س) \neq \lim_{س \to أ^-} ق(س)$

تكون النهاية غير موجودة

ق(س) ← تعني صورة العدد (وتكون الصورة)

١) عند الدوائر المغلقة ●

٢) عند الخطوط المتصلة ——

٣) عند الدائرة الفارغة ○ الجواب (قيمة غير معرفة)

طرق إيجاد النهاية

١) الرسم

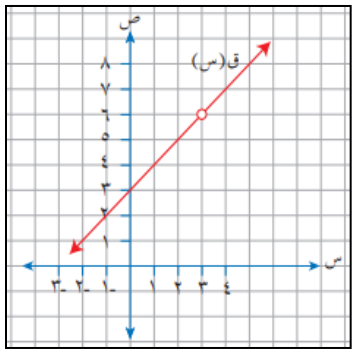
٢) الجداول

٣) نظريات

النهايات من الرسم

ملاحظة : الدوائر في الرسمات ليس لها علاقة في حساب النهاية .

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي



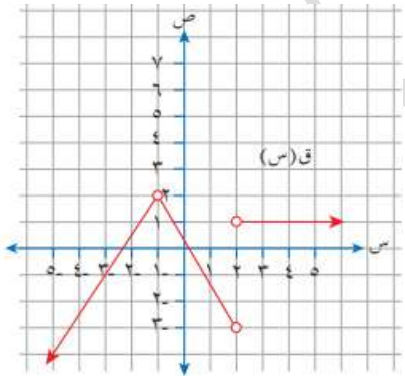
١) $\lim_{س \to ٣^+} ق(س)$

٢) $\lim_{س \to ٣^-} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

٤) ق (٣)

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي



١) $\lim_{س \to -١^+} ق(س)$

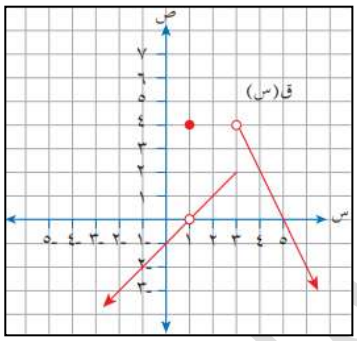
٢) $\lim_{س \to ٢} ق(س)$

٣) $\lim_{س \to ٣} ق(س)$

٤) ق (٣)

٥) ق (٢)

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي

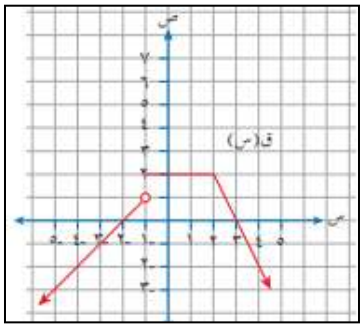


١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٢) جد الثابت أ ، حيث نـهـــــا ق (س) = ٠
س ← أ

٣) جد الثابت ب ، حيث نـهـــــا ق (س) = غير موجودة
س ← ب

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي



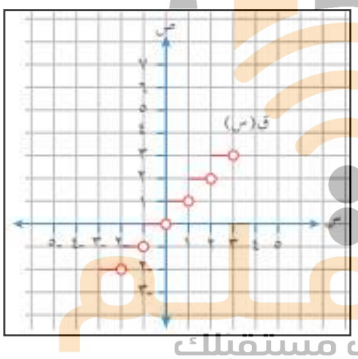
١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ١

٣) جد الثابت أ ، حيث نـهـــــا ق (س) = غير موجودة
س ← أ

٤) جد الثابت ب ، حيث نـهـــــا ق (س) = ٠
س ← ب

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي

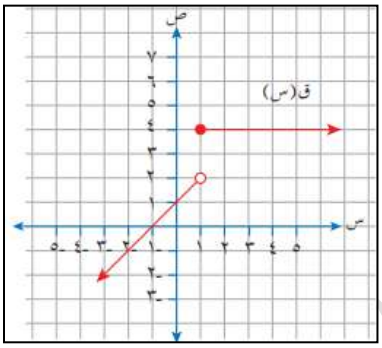


١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٠,٥

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٣) ق (١)

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فجد قيمة كل مما يأتي



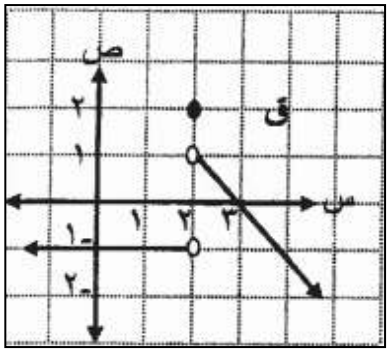
١) قيمة الثابت أ ، حيث
نـهـــــا ق (س) = -١
س ← أ

٢) قيمة الثابت ب ، حيث
نـهـــــا ق (س) = ١
س ← ب

٣) قيمة الثابت جـ ،حيث نـهـــــا ق (س) = غير موجودة
س ← جـ

٤) ق (١)

مثال : اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق (س) فإن



ما نـهـــــا ق(س) ؟
س ← ٢

أ) -١ ب) ١

ج) ٢ د) غير موجودة

النهايات من الجدول

مثال : اعتمادا على الجدول الاتي فإن $\lim_{س \to ٣}$ ق(س)

س	٣,٠١	٣,٠٠١		٢,٩٩٩	٢,٩٩
ق(س)	٢,٠١	٢,٠٠١		٥,٩٩٩	٥,٩٩

مثال : اعتمادا على الجدول الاتي فإن $\lim^{+}_{س \to ٥}$ ق(س)

س	٣,٠١	٥,٠٠١		٤,٩٩٩	٢,٩٩
ق(س)	٨,٠١	٨,٠٠١		٧,٩٩٩	٧,٩٩

نظريات النهايات

قاعدة : الأصل في النهاية التعويض المباشر إلا عند وجود

أسماء اقترانات ق (س) ، هـ (س) ، ل (س) ، ع (س) ،

م (س) ..... الخ يكون الحل بطريقة التوزيع

١) نهاية الثابت = الثابت نفسة

$\lim_{س \to أ}$ جـ = جـ

مثال جد قيم النهايات الاتية :

١) $\lim_{س \to ٥}$ ٨ =

٢) $\lim_{س \to ٩}$ ٧ =

٣) $\lim_{س \to ٣}$ ١٥ =

٤) $\lim^{-}_{س \to ٤}$ -٨ =

٥) $\lim_{س \to ٢}$ -٦ =

٦) $\lim_{س \to -٧}$ - ١٢ =

٧) $\lim^{+}_{س \to ٥}$ ٣٣ =

٨) $\lim_{س \to -٦}$ ٩ =

٩) $\lim^{+}_{س \to ٧}$ ٥ =

١٠) $\lim^{-}_{س \to -٩}$ ٦ =

٢) نـهـايـة الـتعويض = نـعوض مكان كل س العدد

$$\text{نـهـــا}_{س \leftarrow أ} \; س = أ$$

١) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ١} (٣س - ١)$

٢) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٢} (٤س + ٢)$

٣) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٣} (٧ - ٣س)$

٤) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٣}} (٩س^{٢} - ١)$

٥) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٢} س^{٢} (س - ١)$

٦) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٢} (س^{٢} - ٤س + ٥)$

٧) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -٢} (٣س - ٢س^{٢})$

٨) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٢} (٢س - ٥)^{٢}$

٩) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -٢} (س^{٤} - ٣س^{٢} - ٦س - ١٧)^{٥}$

١٠) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -٢} (س^{٤} - ٣س^{٢} - ٦س - ١٧)^{٦}$

١١) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -١} (٢س^{٣} + س^{٢} - ١)$

١٢) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -١} (٢س - ١)^{٣}$

١٣) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -٤} (س^{٢} - ٣)$

١٤) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow \frac{١}{٢}} (٤س^{٢} - ٥)$

١٥) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -١} (٧س^{٢} + ٥س) (س^{٢} + س - ١٠)$

١٦) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٥} \frac{س^{٢} - ٩}{٢س - ٧}$

١٧) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٥}$

١٨) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow ١} (س^{٢} + ١) (س^{٣} + ٥س - ٢)$

١٩) $\text{نـهـــا}_{س \leftarrow -١} (س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥س - ٧)$

٣) توزع النهاية في العمليات الحسابية ووجود أسماء اقترانات

إذا كانت نـهـــــا ق (س) = ل ، نـهـــــا هـ (س) = ك
س ← أ س ← أ

أ) نـهـــــا (ق (س) + هـ (س)) = نـهـــــا ق (س) + نـهـــــا هـ (س) = ل + ك
س ← أ س ← أ س ← أ

ب) نـهـــــا (ق (س) – هـ (س)) = نـهـــــا ق (س) – نـهـــــا هـ (س) = ل – ك
س ← أ س ← أ س ← أ

ج) نـهـــــا (ق (س) × هـ (س)) = نـهـــــا ق (س) × نـهـــــا هـ (س) = ل × ك
س ← أ س ← أ س ← أ

د) نـهـــــا (ق (س) ÷ هـ (س)) = نـهـــــا ق (س) ÷ نـهـــــا هـ (س) = ل ÷ ك
س ← أ س ← أ س ← أ

يقسم سؤال نظريات النهايات إلى قسمين

معطيات

- **إذا كانت ما بعدها معطيات**
- **إذا علمت ما بعدها معطيات**

شرط أن تكون نـهـــــا ق (س) خطية
س ← أ

**١) نـهـــــا ~~جـ~~ق (س) = ب / ~~جـ~~ حـ
س ← أ

**٢) نـهـــــا ق (س) = ب / ~~جـ~~ ١
س ← أ

**٣) نـهـــــا ق (س) + جـ = ب
س ← أ

**٤) نـهـــــا (√ ق(س))^جـ = (√ ب)^جـ
س ← أ

**٥) نـهـــــا √ ق (س)^جـ = √ ب^جـ
س ← أ

مطلوب

- **فـجـد ما بعدها مطلوب**
- **فـإن ما بعدها مطلوب**

١) الثابت خارج النهاية
نـهـــــا جـ ق (س) ← جـ نـهـــــا ق (س)
س ← أ س ← أ

٢) النهاية داخل الجذر
نـهـــــا √ ق (س) ← √ نـهـــــا ق (س)
س ← أ س ← أ

٣) النهاية داخل القوة
٤) نـهـــــا ق^جـ (س) ← (نـهـــــا ق (س))^جـ
س ← أ س ← أ

مثال : إذا علمت أن

$\lim_{س \to ١} ق(س) = ٩$ ، $\lim_{س \to ١} هـ(س) = ٣$

١) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$

٢) $\lim_{س \to ١} (ق(س) \times هـ(س)^{٢})$

٣) $\lim_{س \to ١} (٢ق(س) - هـ(س))$

٣) $\lim_{س \to ٢} (س ق(س) + ٣هـ(س))$

٤) $\lim_{س \to ٢} (\sqrt{ق(س) - ٥} + (هـ(س))^{٢})$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ق(س) - ٣}{٨ - ٢هـ(س)}$

مثال : إذا علمت أن

$\lim_{س \to ٢} \frac{ق(س)}{٣} = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢} ٧هـ(س) = ٤٩$

١) $\lim_{س \to ٢} (٤ق(س) + هـ(س))$

٢) $\lim_{س \to ٢} (٢هـ(س) \times ٣س^{٢})$

مثال : إذا كانت

$\lim_{س \to ٥} ٢ق(س) = ٨$ ، $\lim_{س \to ٥} \frac{هـ(س)}{٣} = -٢$

فجد $\lim_{س \to ٥} (ق^{٢}(س) - ٢هـ(س) - س^{٢})$

مثال : إذا كانت $\lim_{س \to -١} (ق (س) + س^{٣} - ٣) = ٥$

فجد $\lim_{س \to -١} ٣ (ق (س))^{٢}$

مثال : إذا كانت

$\lim_{س \to ٤} ٢ق(س) = ١٠$ ، $\lim_{س \to ٤} ٢هـ (س) + س = ٢٠$

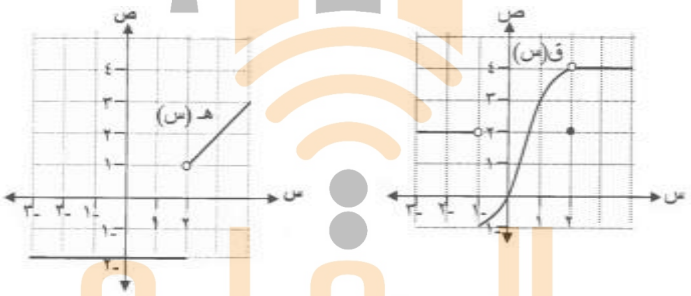
فجد $\lim_{س \to ٤} (٢ ق (س) + ٣هـ (س) + ٥س - ٤)$

مثال : إذا كانت

$\lim_{س \to ٢} ٣ق (س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢} هـ(س) = ٤$

فجد $\lim_{س \to ٢} \sqrt{٢ق^{٢} (س) + ٢هـ (س)}$

مثال : اعتمادا على الشكل الاتي الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق ، هـ أجب عن الفقرتين (١) ، (٢)



١) $\lim_{س \to ١} (٥ق(س) - (هـ (س))^{٢} + ٦س)$

٢) $\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{٣ق(س)}{هـ (س)}$

مثال : إذا كانت ق (٠) = ٣ ، $\lim_{س \to ٠} ٤ق(س) = ٨$

فجد $\lim_{س \to ٠} (٣س ق^{٢} (س) - س)$

٤) نهاية الاقتران المتشعب

للتعويض ← س

للتحديد
- **> : أكبر ← اليمين ← +**
- **< : أصغر ← اليسار ← -**
- **= : المساواة**

الاقتران المتشعب

نقطة عادية	نقطة تحول (تشعب)
ليست على خط الأعداد	على خط الأعداد
نأخذ الاقتران المناسب	وتكون
ويكون	١)الصورة عند المساواة
١) صورة العدد	٢) النهاية تأخذ من اليمين واليسار
٢) النهاية من اليمين واليسار	

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- **٢س – ١ ، س ≤ ٢**
- **س^{٣} – ٢ ، س > ٢**

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نهـــــا ق (س)
س ← ٣

٢) نهـــــا ق (س)
س ← ١

٣) نهـــــا ق (س)
س ← ٢

٤) ق (٥) =

٥) ق (-٣) =

٦) ق (٢) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- **س^{٢} + ١ ، س > ٣**
- **٤س – ٢ ، س ≤ ٣**

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نهـــــا ق (س)
س ← ١

٢) نهـــــا ق (س)
س ← ٤

٣) نهـــــا ق (س)
س ← ٣

٤) ق (٢) =

٥) ق (٣) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٣س – ٥ ، س > ٢
- ١ ، س = ٢
- ٥ – ٢س ، س < ٢

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٠

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٣

٣) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٤) ق (٢) =

٣) نـهـــــا ق (س)
س ← -٢

٤) ق (-١) =

٥) ق (-٣) =

٦) ق (-٢) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٣س – ٢ ، س > -١
- ٣ ، س = -١
- س – ١ ، س < -١

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← -٢

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٠

٣) نـهـــــا ق (س)
س ← -١

٤) ق (-١) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٣س + ٤ ، س ≠ -٢
- ٧ ، س = -٢

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← -١

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← -٣

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٧س + ٢ ، س ∈ ٤
- ٩ ، س ∉ ٤

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٣

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٤

٣) ق (٤) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- س^{٢} – ٢ ، ٠ ≤ س < ٥
- ٤س + ١ ، ٥ ≤ س < ٧

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٦

٣) نـهـــــا ق (س)
س ← ٥

٤) ق (٥) =

٥) ق (٧) =

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٣س ، س < ٢
- ٦ ، ٢ ≤ س < ٤
- ١٠ – ٢س ، س ≥ ٤

فجد قيمة كل مما يأتي

١) نـهـــــا ق (س)
س ← ٣

٢) نـهـــــا ق (س)
س ← ٠

٣) نـهـــــا ق (س)
س ← ٦

٤) نـهـــــا ق (س)
س ← ٢

٥) نـهـــــا ق (س)
س ← ٤

٦) ق (٥) =

مثال : إذا كانت ق (س) =
- س + ٦ ، س ∈ ص
- ٤س + ١ ، س ∉ ص

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة فجد

١) نـهـــــا ق(س)
س←٣

٢) ق (٣)

القلم إمتلك مستقبلك

٥) إيجاد مجاهيل (الثوابت) النهايات

الـثـوابـت

ثوابت تعتمد على تحديد نوع المجاهيل

١) نحدد نوع المجاهيل

٢) نعوض مكان كل س قيمتها

٣) نجد قيمة المجهول

ثوابت في الاقتران المتشعب

كلمة (موجودة) تعني

$$\text{نهـــا}_{س \to أ^+} ق(س) = \text{نهـــا}_{س \to أ^-} ق(س)$$

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ **(أس^٢ – ٣س + ٢) = ٨**

فجد قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to -١}$ **(أس^٢ – ٣س + ٢) = ٨**

فجد قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ **(١٠ – ب س^٢) = ٢**

فجد قيمة الثابت ب ؟

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ١}$ **٢أس – ٦ = ١٦ فجد قيمة الثابت أ ؟**

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ٣}$ **(م س^٢ + ٥س + ١) = ٢٥**

فما قيمة الثابت م ؟

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ **(ل^{٢}س – ٨س) = ٣٤ فجد قيمة الثابت ل ؟**

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ٢}$ **($\sqrt{}$ أس + ٥) = ٣**

فما قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to -٢}$ **(٣ – م س) = ٥ فجد قيمة الثابت م ؟**

مثال : إذا كانت $\text{نهـــا}_{س \to ٥}$ **($\sqrt[٣]{}$ س^٢ – جـ) = -٢**

فما قيمة الثابت جـ ؟

مثال : إذا كانت ق (س) = { أس + ٤ ، س < ٢ ؛ ٦ – س^{٢} ، س ≤ ٢ }

وكانت نـهـــــا ق (س) موجودة فما قيمة الثابت أ ؟
س ← ٢

مثال : إذا كانت ق (س) = { ٣ – ٤س ، س ≥ أ ؛ ٢س + ١ ، س < أ }

وكانت نـهـــــا ق (س) موجودة فما قيمة الثابت أ ؟
س ← أ

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كانت ق (س) = { ٢س^{٢} + أس ، س < ٢ ؛ ٤ ، س ≤ ٢ }

وكانت نـهـــــا ق (س) موجودة فما قيمة الثابت أ ؟
س ← ٢

مثال : إذا كانت ق (س) = { ٧س^{٢} – أ ، س < ١ ؛ ١ + ٢أ ، س ≤ ١ }

وكانت نـهـــــا ق (س) موجودة فما قيمة الثابت أ ؟
س ← ١

فادي الشاقلدي

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٢٥أس – ٢٠ ، س > ١
- ٢٠ ، س = ١
- ٦س + ٢٤ ، س < ١

فما قيمة الثابت أ التي تجعل نـهـــــا ق (س) موجودة ؟
س ← ١

مثال : إذا كانت ق (س) =
- $س^{٢}$ + ب ، س > ٢
- أس + ٦ ، س ≤ ٢

وكانت نـهـــــا ق (س) = ١٤ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟
س ← ٢

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال :

إذا كانت ق (س) =
- ٢أس – ٦ ، س < ٢
- ١٥ ، س = ٢
- س + ٤ ، س > ٢

فما قيمة الثابت أ التي تجعل نـهـــــا ق (س) موجودة ؟
س ← ٢

مثال : إذا كانت ق (س) =
- أس + ب ، س < ٢
- $أس^{٢}$ + ٤ ، س > ٢

وكانت نـهـــــا ق (س) = ٢٤ فما قيمة الثابت أ ، ب ؟
س ← ٢

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كانت ق (س) =
$$\begin{cases} ٥س - أ & ، س > ١ \\ ب\ س^{٢} + ٧ & ، س \leq ١ \end{cases}$$

وكانت نهـــــا ق (س) = ١٦ ، نهـــــا ق (س)
س ← ٣ س ← ١
موجودة فما قيمة الثابتين أ ، ب ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
$$\begin{cases} ٢ل\ س - ٤ & ، س \leq ٢ \\ -ل\ س + ٧س & ، س > ٢ \end{cases}$$

وكانت نهـــا ق (س) موجودة فما قيمة الثابت ل ؟
س←٢

نهاية خارج قسمة اقترانين

قاعدة : الأصل في النهاية التعويض المباشر إلا عند وجود أسماء اقترانات ق (س) ، هـ (س) ، ل (س) ، ع (س) ، م (س) ..... الخ يكون الحل بطريقة التوزيع

جميع الإجابات مقبولة

- عدد موجب
- عدد سالب
- جذر تحته عدد
- عدد كسر
- $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$
- $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = \text{صفر}$
- $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}} =$ في النهاية غير موجودة / في الصورة غير معرفة
- $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} =$ لا تقبل نكمل الحل
  - تحليل
  - توحيد مقامات
  - ضرب بالمرافق

مثال : جد النهايات التالية :

إذا كانت $\lim_{س \to ١}$ ق(س) = ٦ ، $\lim_{س \to ١}$ هـ (س) = -٢

فجد قيمة كل مما يأتي

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ق (س)}}{\text{هـ (س)}}$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{ق (س)} + ٣س}{\text{هـ (س)} + ٢}$

١) التحليل

مثال : جد النهايات التالية :

١) $\lim_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢} + س}{س + ٤}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س + ٣}$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} + ٣س - ٥}{٢س + ١}$

٤) $\lim_{س \to -٥} \sqrt[٣]{٣ - س} + \frac{س + ٥}{س^{٢} - س}$

٥) $\lim_{س \to -٤} ١ - ٦س + \frac{٢س + ٨}{س + ٣}$

٦) $\lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٩}{٢س - ٦}$

٧) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢}$

٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س^{٤} - ٦س^{٢}}{س^{٣} + ٤س^{٢}}$

٩) $\lim_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{س^{٢} - ٤}$

١٠) $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٢٥}{س^{٢} - ٥س}$

القلم إمتلك مستقبلك فادي الشاقلدي

١١) $\lim_{س \to ٢} \frac{٥س^{٢} - ١٠س}{٣س^{٢} - ٦س}$

١٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{(س + ١)^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٤}$

١٣) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} + ٣س - ١٠}{س^{٢} + س - ٦}$

١٤) $\lim_{س \to -٣} \frac{س^{٣} + ٢٧}{٥س + ١٥}$

١٥) $\lim_{س \to ٨} \frac{(س - ٥)^{٢} - ٩}{س - ٨}$

١٦) $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٣} + ٥س^{٢} + ٦س}{س^{٢} - ٤}$

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

١٧) $\lim_{س \to -٣} \frac{٢س^{٢} + ٦س}{س^{٣} + ٢٧}$

١٨) $\lim_{س \to ١} \frac{٥ - ٥س^{٢}}{س^{٢} + س - ٢}$

١٩) $\lim_{س \to ٠} \frac{س^{٤} + ٣س^{٢}}{س^{٣} - ٤س^{٢}}$

٢٠) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} - ١}{س - ١}$

٢١) $\lim_{س \to ٤} \frac{١٢س - ٣س^{٢}}{٢س^{٢} - ٨س}$

٢٢) $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ٦٤}{س^{٢} - ٥س + ٤}$

٢٣) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٢} - ٤س + ٣}{س^{٣} - ١}$

٢٤) $\lim_{س \to ١} \frac{٣س - ٣}{٢ - ٢س}$

٢) توحيد المقامات

١) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}{س - ٣}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{س - ٢}$

٣) $\lim_{س \to ٢} \dfrac{\frac{١}{٤} - \frac{١}{س^{٢}}}{س - ٢}$

٤) $\lim_{س \to ١} \dfrac{\frac{١}{س + ٣} - \frac{١}{٤}}{س - ١}$

٥) $\lim_{س \to ٣} \dfrac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{١}{٥}}{س - ٣}$

٦) $\lim_{س \to -٣} \dfrac{\frac{١}{س} + \frac{١}{٣}}{س^{٢} - ٩}$

القلم إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

٧) $\lim_{س \to ٣}$ $\dfrac{\frac{١}{٣س - ٥} - \frac{١}{٤}}{٣ - س}$

٨) $\lim_{س \to -١}$ $\dfrac{\frac{١}{س + ٢} - \frac{٣}{س + ٤}}{س + ١}$

٩) $\lim_{س \to ٩}$ $\dfrac{\frac{س}{س - ٣} - \frac{س + ٣}{س - ١}}{س - ٩}$

١٠) $\lim_{س \to ٦}$ $\dfrac{\frac{٥}{س - ١} - \frac{٣}{س - ٣}}{س^{٢} - ٣٦}$

١١) $\lim_{س \to ٢}$ $\dfrac{\frac{١}{س} - \frac{١}{٢}}{٢س - ٤}$

١٢) $\lim_{س \to ٣}$ $\dfrac{س - ٣}{\frac{١}{س} - \frac{١}{٣}}$

القلم إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

١٣) $\lim_{س \to ٧} \dfrac{\dfrac{١}{س - ٢} - \dfrac{١}{٥}}{٢س - ١٤}$

١٤) $\lim_{س \to ٤} \left[\dfrac{١}{س} - \dfrac{١}{٤}\right] \left[\dfrac{١}{س - ٤}\right]$

١٥) $\lim_{س \to ٥} \left[\dfrac{١}{س^{٢}} - \dfrac{١}{٢٥}\right] \left[\dfrac{١}{س^{٢} - ٥س}\right]$

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

٣) الضرب بالمرافق

١) $\lim_{س \to ٩} \frac{\sqrt{س} - ٣}{س - ٩}$

٢) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ١} - ٢}{س - ٥}$

٣) $\lim_{س \to -٣} \frac{\sqrt{٦ - س} - ٣}{س + ٣}$

٤) $\lim_{س \to ٢٥} \frac{س - ٢٥}{\sqrt{س} - ٥}$

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

٥) $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س^٢ - ٩} - ٤}{س^٢ - ٢٥}$

٦) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤ - س}{\sqrt{س} - ٢}$

٧) $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$

٨) $\lim_{س \to ٤} \frac{٤ - س}{\sqrt{س + ٥} - ٣}$

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

إذا علمت أن

$\lim_{س \to ٥}$ ق (س) = -٧ ، $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = ٢

فبين أن $\lim_{س \to ٥}$ $\frac{٢ق(س) - ٣هـ(س)}{ق(س) + س + ٧}$ = -٤

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

الاتـصـال

١) الاتـصـال مـن الـرسـم

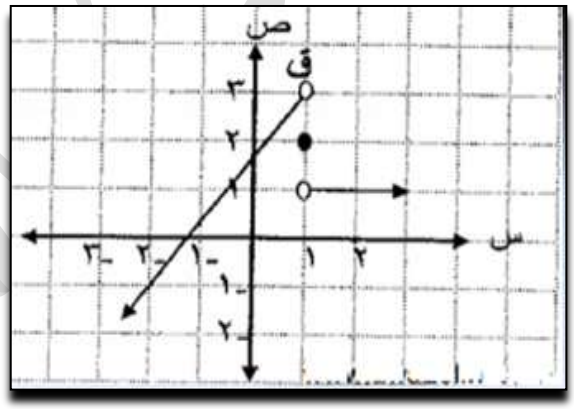
لا يكون الاقتران متصل من خلال الرسم

١) عند الجوات

٢) عند القفزات

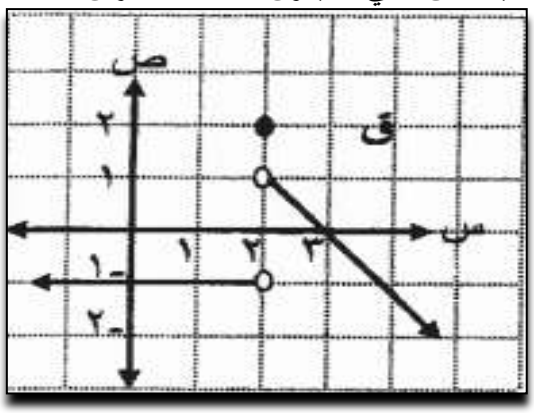
(أي فرغ في الرسمة نأخذ سينات)

١) ما قيمة س التي لا يكون عندها الاقتران متصل ؟



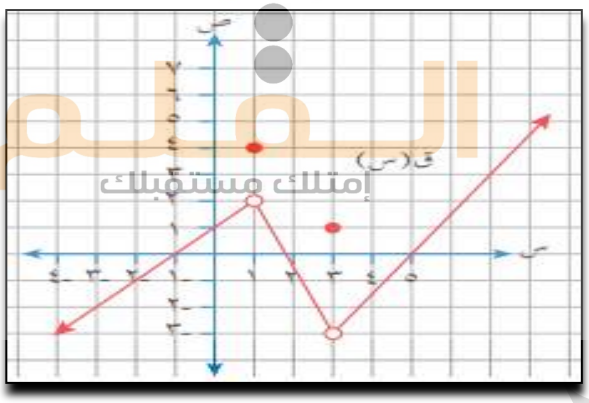
أ) صفر ب) ١ ج) ٣ د) ٢

٢) ما قيمة س التي لا يكون عندها الاقتران متصل ؟

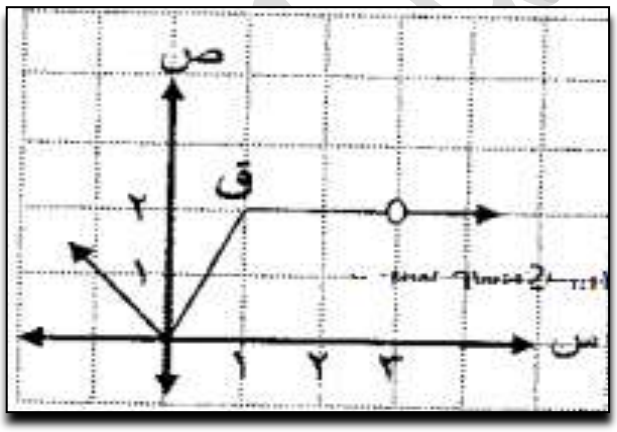


أ) ٢ ب) صفر ج) ٣ د) Φ

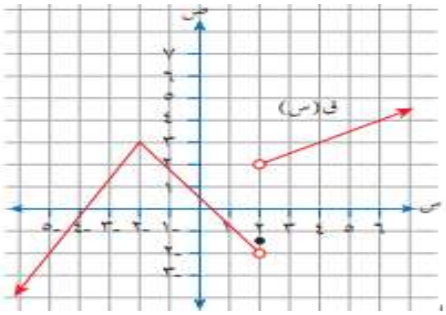
٣) اعتمادا على الشكل المجاور الذ يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية حدد قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل



٤) اعتمادا على الشكل المجاور الذ يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على مجموعة الأعداد الحقيقية حدد قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل

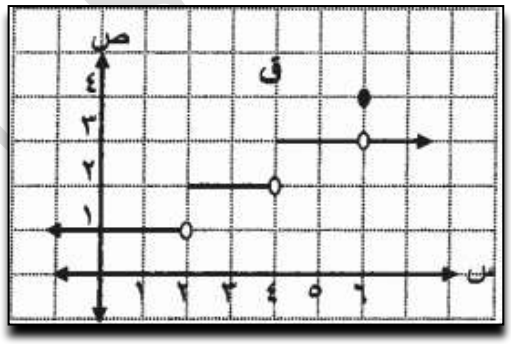


٥) ما قيمة س التي لا يكون عندها الاقتران متصل ؟



٦) معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق

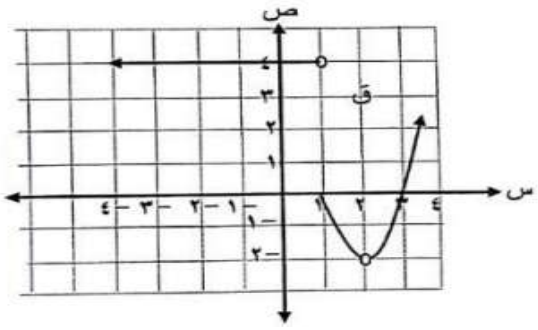
أي قيم س الآتية يكون عندها الاقتران ق متصلا ؟



أ) ٢ ب) ١ ج) ٤ د) ٦

٧) معتمدا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق

أي قيم س الآتية لا يكون عندها الاقتران ق متصلا ؟

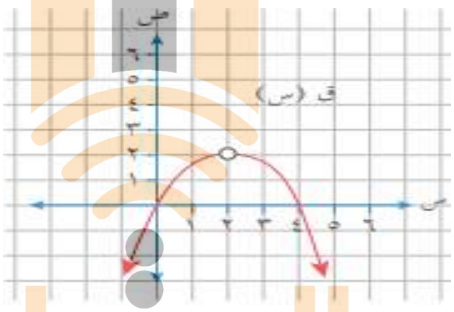


أ) { ٠ ، ٢ } **ب) { ١ ، ٢ }**

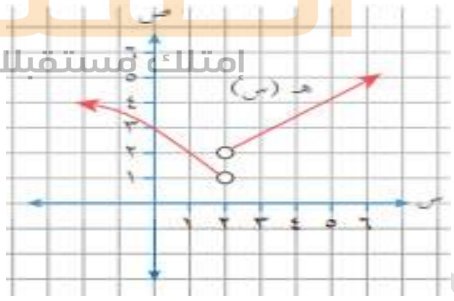
ج) { ١ ، ٣ } **د) { -٢ ، ٢ }**

٨) أي مما يلي اقتران متصل عند س = ٢

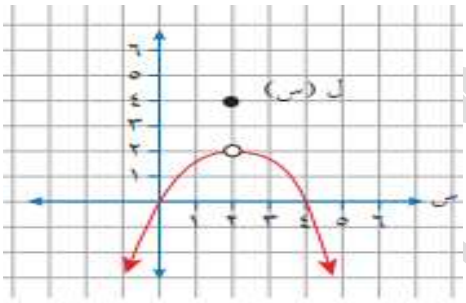
أ)



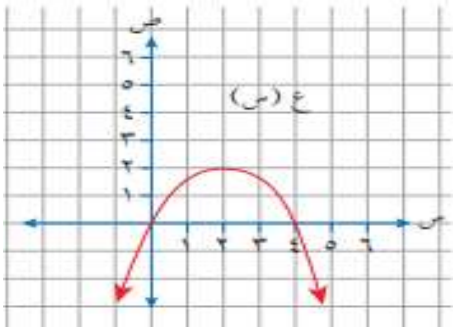
ب)



ج)



د)



٢) نقاط عدم الاتصال للاقترانات

أ) اقتران كثير الحدود	ب) اقتران نسبي
(ليس له مقام)	(له مقام)
نقاط عدم الاتصال	نقاط عدم الاتصال
Φ ، { }	أصفار المقام

مثال : جد نقاط عدم الاتصال للاقترانات التالية

١) إذا كان ق (س) = ٥س جد نقاط عدم الاتصال

٢) إذا كان ق (س) = ٢س^{٢} + س – ١جد نقاط عدم الاتصال

٣) إذا كان ق (س) = س (س^{٣} – ١) جد نقاط عدم الاتصال

٤) إذا كان ق (س) = س^{٢} – ٥س +٦ جد نقاط عدم الاتصال

٥) إذا كان ق (س) = ٤ جد نقاط عدم الاتصال

٦) إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ١)(\text{س} + ٢)}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

٧) إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٢٨}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

٨) إذا كان ق (س) = $\frac{٧}{\text{س} - ٢} + \frac{٥}{\text{س}^{٢} - ٩}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

القلم إمتلك مستقبلك

٩) إذا كان ق (س) = $\frac{س - ٥}{س^{٢} - ٤س}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) { ٠ ، ٤ } ب) { ١ ، ٢ }

ج) { ١ ، ٣ } د) { -٤ ، ٠ }

١٠) إذا كان ق (س) = $\frac{س^{٢} - ٩}{س + ٥}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) {٥} ب) {-٥} ج) {٤} د) {-٤}

١١) إذا كان ق (س) = $\frac{١ - ٢س}{س^{٢} - ١}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) {١} ب) {-١ ، ٢} ج) {-١ ، ١} د) {-١}

١٢) إذا كان ق (س) = $\frac{٣ + س}{س^{٢} + ١}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) {١} ب) {-١ ، ٢} ج) {-١ ، ١} د) { }

١٣) إذا كان ق (س) = $\frac{٧ - ٥س}{٩ + ٣س}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

١٤) إذا كان ق (س) = $\frac{٣س^{٢}}{٢س - ٦}$ ، فإن مجموعة

قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) {١} ب) {٢ ، ٣} ج) {-٣ ، ٢} د) {٣}

١٥) إذا كان ق (س) = $\frac{٢}{س} + \frac{س + ٤}{س + ٢}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) {٢} ب) {-١ ، ٢} ج) {-٢ ، ٠} د) {-٢}

١٦) إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س} + \frac{س + ١}{س + ٣}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

١٧) إذا كان ق (س) = $\frac{٢س}{(س - ٣)(س - ٢)}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

١٨) إذا كان ق (س) = $\frac{س^{٢} + ٣س + ١}{س^{٢}}$

فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

٣) الاتصال عند نقطة

مفتاح السؤال : فأبحث في اتصال (الاقتران) عند س = أ

خطوات الحل

١) نجد الصورة للعدد ق (أ)

٢) نجد النهاية من اليمين واليسار

٣) مقارنة بين الصورة والنهاية

٤) القرار ناتج المقارنة

إذا كانت	إذا كانت
الصورة = النهاية	الصورة ≠ النهاية
إذا الاقتران متصل عند س = أ	إذا الاقتران غير متصل عند س = أ

مثال : إذا كان ق (س) = ٣س^{٢} + ٢س – ١

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

مثال : إذا كانت ق (س) =

$$\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س > ٢ \\ ٥س - ٥ & ، س \leq ٢ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

مثال : إذا كانت ق (س) =

$$\begin{cases} ٢س + ٤ & ، س \leq ١ \\ ٣س + ٣ & ، س > ١ \end{cases}$$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

القلم إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، \ س < ١ \\ ٣س & ، \ ١ \geq س < ٣ \\ س^{٣} - ١٨ & ، \ س > ٣ \end{cases}$

١) فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٠

٢) فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٣) فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

مثال : إذا كانت ق (س) = { ٣س – ١ ، س > ٢ ; س^{٢} + ١ ، س ≤ ٢ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

مثال : إذا كانت ق (س) = { س + ٥ ، س < -١ ; ٩ – ٢س ، -١ ≤ س ≤ ٣ ; س^{٢} – ٦ ، س > ٣ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = -١

مثال : إذا كانت ق (س) = { س^{٢} ، س > ١ ; ٣س + ١ ، س ≤ ١ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

مثال : إذا كانت ق (س) = { س^{٢} – ٢ ، س > ٣ ; ٢س + ١ ، س = ٣ ; ٤س – ٥ ، س < ٣ }

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣ ، س = ٥

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣} & ، س < ٣ \\ ٥س - ٩ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - ٢س}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٤ & ، س = ٢ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} س + ٣ & ، س \neq -١ \\ ٤ & ، س = -١ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = -١

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٢ & ، ٢ < س \geq ٣ \\ ٢س + ٣ & ، ٣ < س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣

القلم إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كانت ق (س) =
- س + ٢ ، س > ١
- ٢س + ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢
- ٥س + ١ ، س < ٢

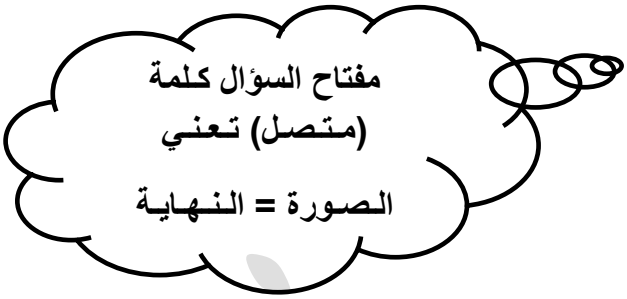
١) فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ١

٢) فابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٢

فادي الشاقلدي

إيجاد المجاهيل (الثوابت) فى الاتصال

قاعدة



مثال : إذا كانت ق (س) =
- أس + ٧ ، س ≥ ٣
- س + ١ ، س < ٣

وكان ق متصلا عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
- س^{٢} + ٧ ، س ≥ -٢
- أس + ١ ، س < -٢

وكان ق متصلا عندما س = -٢ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
- س^{٣} + ١٠ ، س ≠ ٢
- أس^{٢} ، س = ٢

وكان ق متصلا عندما س = ٢ ، فجد قيمة الثابت أ ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
- س^{٢} + ٥ ، س > ٣
- ل ، س ≤ ٣

وكان ق متصلا عندما س = ٣ ، فجد قيمة الثابت ل ؟

القلم
إمتلك مستقبلك
وادي الشاقلدي

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{٣س - ١٢}{س^{٢} - ٣س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ م & ، س = ٤ \end{cases}$

جد قيمة الثابت م التي تجعل الاقتران ق متصلا عند س = ٤

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س > ١ \\ ٣أ & ، س = ١ \\ ٣س + ب & ، س < ١ \end{cases}$

وكان ق متصلا عند س = ١ فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

القلم
إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} أس^{٢} + ب & ، س > ٢ \\ ١٣ & ، س = ٢ \\ ٣أس + ١ & ، س < ٢ \end{cases}$

وكان ق متصلا عند س = ٢ فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

مثال : إذا كانت ق (س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ - س}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ م س + ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$

وكان الاقتران ق متصلا عند س = ٣ ، فما قيمة الثابت م ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
- ٢أس + ب ، س < ٢
- ٨ ، س = ٢
- أس^{٢} + ٣ب س ، س > ٢

وكان ق متصلا عند س = ٢ فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

مثال : إذا كانت ق (س) =
- أس + ٣ ، س < ١
- ٧ ، س = ١
- س – ب ، س > ١

وكان ق متصلا عند س = ١ فجد قيمة الثابتين أ ، ب ؟

الفلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

٤) نـظـريات الاتـصـال

مفتاح السؤال :

ابحث في اتصال (الاقتران) ل = (ق + هـ) عند س = أ

ابحث في اتصال (الاقتران) م = (ق – هـ) عند س = أ

ابحث في اتصال (الاقتران) ع = (ق × هـ) عند س = أ

ابحث في اتصال (الاقتران) و= (ق ÷ هـ) عند س = أ

حيث هـ (أ) ≠ ٠

خطوات الحل

١) ندمج الاقترانين

٢) نجد الصورة للاقتران المدموج

٣) نجد النهاية من اليمين واليسار للاقتران المدموج

٤) مقارنة بين الصورة والنهاية

٥)

القرار ناتج المقارنة

إذا كانت	إذا كانت
الصورة = النهاية	الصورة ≠ النهاية
إذا الاقتران متصل عند س = أ	إذا الاقتران غير متصل عند س = أ

مثال : إذا كان ق (س) = س^{٣} + ٥س ،

هـ (س) = { ٥س ، س ≥ ٠ ؛ س^{٢} ، س < ٠ }

وكان ل (س) = (ق × هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران ل عندما س = ٠

القلم إمتلك مستقبلك

مثال : إذا كان ق (س) = س^{٢} + ٢س ،

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} \text{س} - ١ & ، \ \text{س} \geq ٣ \\ ٥ - \text{س} & ، \ \text{س} < ٣ \end{cases}$$

وكان م (س) = (ق + هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران

م عندما س = ٣

مثال : إذا كان ق (س) = س^{٢} + ١٥ ،

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢} & ، \ \text{س} > ٥ \\ ٣\text{س} & ، \ \text{س} \leq ٥ \end{cases}$$

وكان ع (س) = (ق – هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران

ع عندما س = ٥

القلم
إمتلك مستقبلك
فادي الشاقلدي

مثال : إذا كان ق (س) = ٥س^{٢} + ٥س + ١ ،

هـ (س) =
- **س + ٩ ، س ≥ ٢**
- **٥س + ١ ، س < ٢**

وكان ل (س) = ٢ق (س) + هـ (س) ، فابحث اتصال

الاقتران ل عندما س = ٢

مثال : إذا كـان

ق (س) =
- **٢س + ٤ ، س ≤ ١**
- **٣س – ٢ ، س > ١**

هـ (س) =
- **س^{٢} + ٢ ، س ≤ ١**
- **٨س + ١٠ ، س > ١**

وكان م (س) = (ق + هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران

م عندما س = ١

مثال : إذا كـان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، \ س \geq -٢ \\ س^{٢} - ٨ & ، \ س < -٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} ٣س + ٢ & ، \ س \geq -٢ \\ س^{٢} + س & ، \ س < -٢ \end{cases}$$

وكان م (س) = (ق – هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران

م عندما س = -٢

مثال : إذا كـان

$$\text{ق (س)} = \begin{cases} س^{٢} + ٤ & ، \ س \leq ٢ \\ ٢س + ٦ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ (س)} = \begin{cases} ٢س & ، \ س \leq ٢ \\ س + ٣ & ، \ س > ٢ \end{cases}$$

وكان م (س) = (ق ÷ هـ) (س) ، فابحث اتصال الاقتران

م عندما س = ٢

٥) مجاهيل نظريات الاتصال

مثال : إذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلا عندما س = ٥ ، وكان هـ (٥) = ٤ ، $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{ق(س) + س}{٣هـ(س)} = ١$ ، فجد ق (٥)

مثال : إذا كان كل من الاقترانين ق ، هـ متصلا عندما س = ٥ ، وكان ق (٥) = ٤ ، $\text{نهـا}_{س \to ٥} \frac{٢ق(س) - ٤س}{٢هـ(س) + ٣} = ٤$ ، فجد هـ (٥)

مثال : إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عندما س = ٢ ، وكان ق(٢)= ٦ ، $\text{نهـا}_{س \to ٢} (ق(س) - ٤هـ(س)) = -١٤$

فأجب عن الفقرتين (١) ، (٢)

١) فجد قيمة هـ (٢) تساوي

٢) جد قيمة الثابت ل التي تجعل $\text{نهـا}_{س \to ٢} \frac{(ق(س))^{٢} - ل}{هـ(س)} = ٤$

مثال : إذا كان ق ، هـ اقترانين متصلين عندما س = ٧ ، وكان ق (٧) = ١٢ ، هـ (٧) = ٣ فبين أن $\text{نهـا}_{س \to ٧} \frac{ق(س) - ٢}{هـ(س) + س} = ١$

ورقة عمل

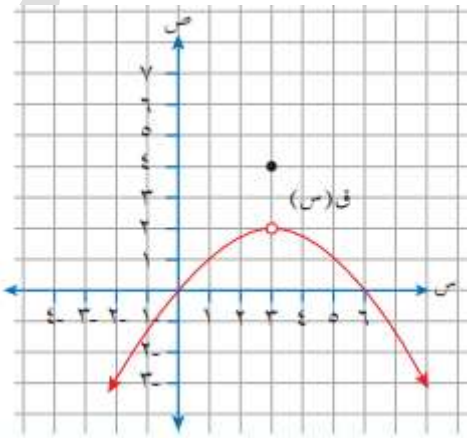
١) إذا كان ق (س) = س^{٣} + ٥س ،

هـ (س) = { ٥س + ٤ ، س ≥ ١ ؛ ٨ + س^{٢} ، س < ١ }

وكان ل (س) = (ق + هـ) (س) ، هل الاقتران متصل ل عندما س = ١

أ) نعم ب) لا

٢) اعتمادا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، ابحث اتصال الاقتران ق عندما س = ٣



٣) يتكون هذا السؤال من خمسة فقرات من نوع الاختيار المتعدد لكل فقرة أربعة بدائل ، واحدة منها فقط صحيح ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح

١) إذا كان م عددا ثابتا ، وكانت

نهـــا (م س^{٢} – ٤س + ٥) = ٥ فإن قيمة الثابت م هي
س ← ١

أ) ١ ب) -١ ج) ٤ د) -٤

٢) نهـــا (س^{٢} – ٤)^{٣} تساوي
س ← -١

أ) -١٢٥ ب) -٢٧ ج) ١٢٥ د) ٢٧

٣) إذا كان ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٢}$ ، فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل هي

أ) { ٥ ، ٠ } ب) {-٥ ، ٠ } ج) {١ ، ٢ } د) {-١ ، -٢}

٤) إذا كانت نهـــا (٣ق(س)) = ٩ فإن قيمة
س ← ٢

نهـــا (ق (س))^{٢}
س ← ٢

أ) ٩ ب) ٨١ ج) ٢٧ د) ٢

٥) إذا كانت هـ (س) = { س – ١ ، س < ٢ ؛ ٣ ، س = ٢ ؛ س^{٢} ، س > ٢ }

فإن نهـــا هـ (س) تساوي
س ← ٢

أ) ٣ ب) ٤ ج) ١ د) غير موجودة