القمة

في الرياضيات

الفرع العلمي م٣

٢٠١٦-٢٠١٧

إعداد الأستاذ

سعد الدين البستنجي

٠٧٨٨٩٨٢٨٠٦ / ٠٧٩٥٤٢٠٥٤٢

مكتبة نزال
طريقك للنجاح
تطلب من مكتبة /حي نزال طلوع حي نزال/ مقابل مطاعم أهل الخير
٠٧٩٩٩٥٠٧٠١ / ٠٧٨٥٥٢٩٣٢٧

منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

منصة
القلم
التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

بسم الله الرحمن الرحيم

أبنائي وأحبائي الطلبة..

لقد مر عليّ يوم كنت فيه مكانكم، أواجه ما تمرون به الآن من ظروف، حزنت كثيراً، وفرحت أكثر، واجهتني صعوبات كثيرة، وعقبات أكثر، كانت شديدة القساوة كالحجارة أو أشد قساوة، ولكنني لم أتوقف عند هذه الصعاب ولم أدعها تنل مني وتعطل مسيرتي، ولكنني جمعت هذه الصعاب وبنيت منها سلماً أوصلني إلى ما أنا عليه الآن.

وأنتم أبنائي..

اصنعوا مثلي، إجمعوا عقباتكم وصعابكم، وابنوا منها سلما يوصلكم إلى عتبات المجد الذي ترجون، واعلموا بأنه لا يوجد صعاب أمام المجدين، وأن العقبات تندثر أمام المجتهدين،ومن يتعب الآن قليلاً سيفرح غداً كثيراً.

واعلموا أن هذه اللحظات العصيبة عليكم ستكون في يوم من الأيام أجمل الذكريات التي سترونها لأبنائكم كما أفعل أنا الآن.

المؤلف

الدكتور سعد الدين البستنجي

أبنائي وأحبائي الطلبة..
أنتم أبنائي..
منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

منصة
القلم
التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات "سعد الدين البستنجي"

Date: 079/542054 / 078/898280

مراجعة:

• الاقتران الخطي:

يكون على صورة $هـ(س) = أ س + ب$ ،

حيث $أ \neq$ صفر.

- مميزاته:

١. خط مائل مستقيم.

٢. ميله يساوي معامل س إذا كان جاهزاً.

٣. له مجذر وحيد وهو إما صاعد أو هابط

٤. يقطع محور السينات في نقطة واحدة فقط.

٥. يحتاج لنقطتين لرسمه.

- الاقتران الخطي $هـ(س) = أ س + ب$

هابط: أ سالب

صاعد: أ موجب

• ارسم كل من الاقترانات التالية:

أ- $هـ(س) = س + ١$

س = صفر ⟸ $هـ(س) = ٠$

$هـ(٠) = ٠ + ١ = ١$ ⟸ صفر: $٠ = ١ + س$ ⟸ $س = -١$

س	صفر	-١
$هـ(س)$	١	صفر

ب- $هـ(س) = س + ١$ ، $س \in [٣،١]$

س	١	٣
$هـ(س)$	٢	٤

ج- $هـ(س) = س + ١$ ، $س \in (٣،١]$

س	١^*	٣
$هـ(س)$	٢	٤

النهايات:

• النهاية: هي القيمة التي يقترب منها الاقتران عندما تقترب س من رقم معين ويرمز للنهاية بالرمز $نهـا$

• هنالك طرق ثلاثة لإيجاد النهاية:

① الجداول. ② الرسم. ③ القوانين والنظريات

• أولاً: النهاية من الجداول.

س	٠,٩	٠,٩٩	١,٠١	١,١
$هـ(س)$	٢,٨	٢,٩٩	٣,٠١	٣,١

(اليسار) (اليمين)

NOTE BOOK

منصة القلم التعليمية AL QALLAM EDUCATION

Date: .....

- نلاحظ أن س تقترب من العدد (١) و أن $ه(س)$ تقترب من (٣) ولكن ...

$\lim_{س \to ١} ه(س) = ٣$.

• توضيح :

$\lim_{س \to ١} ه(س) = ٣$

- اليسار (الأقل) ← $\lim_{س \to ١^-} ه(س) = ٣$
- اليمين (الأكبر) ← $\lim_{س \to ١^+} ه(س) = ٣$

- حيث نلاحظ أن اليمين = اليسار

و في هذه الحالة نقول أن :

$\lim_{س \to ١} ه(س) = ٣$ "موجودة" .

س	١,٩	١,٩٩			٢,٠١	٢,١
$ه(س)$	٨,٩	٨,٩٩			٧,٠١	٧,١

(اليسار) (اليمين)

اليسار (الأقل) ← $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٩$

اليمين (الأكبر) ← $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٧$

- $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ه(س)$

∴ النهاية غير موجودة لأنه يمين ≠ يسار

س	١,٩	١,٩٩	٢		٢,٠١	٢,١
$ه(س)$	٦,٩	٦,٩٩	١٠		٧,٠١	٧,١

- لاحظ أنه $ه(٢) = ١٠$ ، وكلما اقتربت س من العدد (٢) من جهة اليسار فإن $ه(س)$ تقترب من العدد (٧) ويرمز لها بالرمز : $\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٧$

- وكلما اقتربت س من العدد (٢) من جهة اليمين $س \to ٢^+$ فإن $ه(س)$ تقترب من العدد (٧) ويرمز لها بالرمز : $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = ٧$

- نلاحظ أن :

$\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = \lim_{س \to ٢^-} ه(س) = ٧$

لذلك نقول أن النهاية موجودة و تساوي ٧ ← ← ← $\lim_{س \to ٢} ه(س) = ٧$

لاحظ أن لا علاقة لـ $ه(٢)$ بالنهاية .

النهاية (هام)

- هو جودة ← $\lim_{س \to ا^+} ه(س) = \lim_{س \to ا^-} ه(س)$
- غير موجودة ← $\lim_{س \to ا^+} ه(س) \neq \lim_{س \to ا^-} ه(س)$

- إذا كان $ه(س) = س + ٢$ ، كون جدولاً يبين نهاية $ه(س)$ عندما تقترب س من العدد (٣).

س	٢,١٨	٢,١٩	٣	٣,١	٣,١٢
$ه(س)$	٤,٨	٤,٩	٥	٥,١	٥,١٢

- عندما تقترب س من (٣) فإن $ه(س)$ تقترب من العدد (٥) أي أن ...

$\lim_{س \to ٣} ه(س) = ٥$

- $\lim_{س \to ٣^+} ه(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٣^-} ه(س) = ٥$ } اليمين = اليسار = النهاية موجودة = ٥.

التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

subject: القيمة في الرياضيات Date:

• إذا كان $ه(س) = \frac{س^٤ - ٩}{س - ٣}$ ، $س \neq ٣$

① كون جدولاً يبين نهـ $ه(س)$ $س \to ٣$

② أوجد نهـ $ه(س)$ من الجدول. $س \to ٣$

- الحل:

• ① : أولاً $\frac{س^٤ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س^٢ - ٣)(س^٢ + ٣)}{(س - ٣)} = س^٢ + ٣$

حيث $س \neq ٣$.

من الجدول: .....

س	٢,٨	٢,٩				٣,١	٣,٢
$ه(س)$	٥,٨	٥,٩				٦,١	٦,٢

- نلاحظ نهـ $ه(س)$ = نهـ $ه(س)$ = ٦
$س \to ٣^+$ $س \to ٣^-$

∴ نهـ $ه(س)$ = ٦
$س \to ٣$

② من خلال الرسم:

س	٢	*٣	٤
$ه(س)$	٥	٦	٧

نهـ $ه(س)$ = ٦
$س \to ٣$

• إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س + ١ & س \leq ٢ \\ ١ + س^٢ & س > ٢ \end{cases}$

أوجد نهـ $ه(س)$
$س \to ٢$

س	١,٩	١,٩٩				٢,٠١	٢,١
$ه(س)$	-٠,٩	-٠,٩٩				٣,٠١	٣,١

نهـ $ه(س)$ غير موجودة.
$س \to ٢$

••• $ه(س) = \begin{cases} س + ٢ & ١ \leq س < ٢ \\ ١ + س & ٢ \leq س < ٤ \end{cases}$

١ — $١ + س$ — ٢ — $٢ + س$ — ٤

أطراف: $س = ١$، $س = ٤$ — تحول: $س = ٢$ — عادية: $س = ٣$

• إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س + ١ & س \leq ٢ \\ ٢ س & س > ٢ \end{cases}$

① ارسم $ه(س)$

② نهـ $ه(س)$ $س \to -٢$ ③ نهـ $ه(س)$ $س \to +٢$

④ نهـ $ه(س)$ $س \to ٢$ ⑤ كون جدول وأوجد نهـ $ه(س)$ $س \to ٢$

- الحل:

جدول قيم يمين (٢)

س	٢	٣	٤
$ه(س)$	٤	٣	٥

جدول قيم يسار (٢)

س	٢	١	صفر
$ه(س)$	٤	٢	صفر

② نهـ $ه(س) = ٤$ $س \to -٢$

③ نهـ $ه(س) = ٣$ $س \to +٢$

④ نهـ $ه(س)$ = غير موجودة. $س \to ٢$

⑤ جدول نهـ $ه(س)$: $س \to ٢$

منصة العلمية AL-ALAM EDUCATION

٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦
٠٧٩٥٤٠٥٤٢

subject: معدلية المستقيم Date:

س	١/٨	١/٩		٢/١	٢/٢
ه(س)	٣/٨ (٣-س)	٣/٩ (٢-س)		٣/١ (١+س)	٣/٢ (١+س)

نهاية(س) = ٤ ، نهاية(س) = ٣ ، نهاية(س) غير موجودة

• ه(س) = { ٢س ، س ≥ ٢ ؛ س + ١ ، س < ٢ }

أوجد نهاية ه(س) عند س = ٢

- الحل: نهاية ه(س) = ٣ ، نهاية ه(س) = ٣ ∴ نهاية ه(س) = ٣

س	٢	٣	٤
ه(س)	٣	٤	٥

س	٢	١	جفر
ه(س)	٦	٣	جفر

نهاية(س) = ٦ ، نهاية(س) = ٣ ∴ نهاية ه(س) غير موجودة

• ه(س) = |س| ، س ≠ ٠

أوجد نهاية ه(س) عند س = ٠

- الحل: نهاية ه(س) = ٠ ، نهاية ه(س) = ٠ ∴ نهاية ه(س) = ٠

• ه(س) = |س - ٢|

(أ) ارسم منحنى ه(س).

(ب) جد نهاية ه(س) من الرسم.

(ج) جد نهاية ه(س) من الرسم.

- الحل: |س - ٢| = ٠ ← س - ٢ = ٠ ← س = ٢

نهاية ه(س) = جفر

نهاية ه(س) = ١

• إذا كان ه(س) = |س + ٢|

(أ) ارسم منحنى ه(س)

(ب) جد نهاية ه(س) من الرسم.

(ج) جد نهاية ه(س) من الرسم.

- الحل: ه(س) = |س + ٢| ← س = -٢

نهاية ه(س) = ٤

نهاية ه(س) = ٢

نهاية ه(س) غير موجودة

• ه(س) = |س + ١| ← س + ١ = ٠ ← س = -١

نهاية ه(س) = ٣

• ه(س) = |٢س - ٦| ← ٢س - ٦ = ٠ ← س = ٣

نهاية ه(س) = |٢*٣ - ٦| = جفر

٣ * ه(٢) = ٣

نهاية ه(س) = ٣

نهاية ه(س) = ٣

نهاية ه(س) = نهاية ه(س)

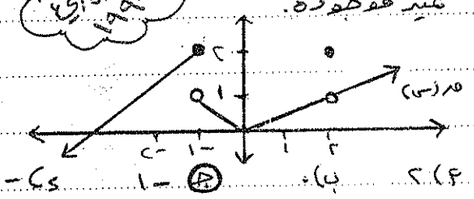
∴ نهاية ه(س) = ٣

NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: ٠٧٩٥٤٢٠٥٢٤ ← ٠٧٨٨٩٨٢٨٠٦ ← حمد لديد البستاني Date:

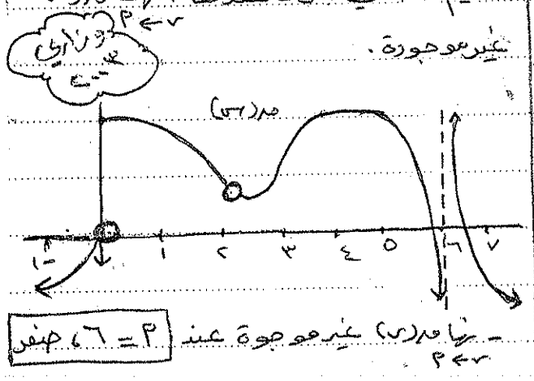
(١) ١ (ب ٢ (ج -٣ (د ٤ ✓

• من الشكل المجاور، ما هي قيم م حيث: م ∈ {-١، ٠، ٢} والتي تكون عندها نهـا مد(س) غير موجودة.



(أ) ٢ (ب ٠ (ج -٢ (د -١ ✓

• الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران مد(س)، ما قيم م التي تكون عندها: نهـا مد(س) غير موجودة.

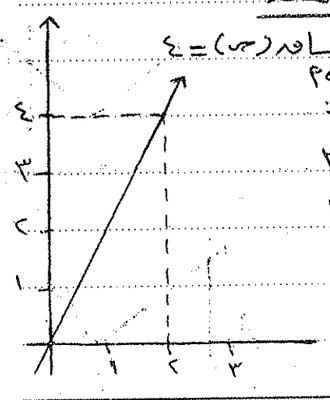


نهـا مد(س) غير موجودة عند م = ٦، فقط

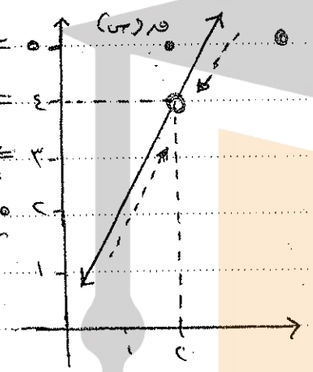
أسئلة هامة

• إذا علمت أن نهـا مد(س) = ٤ فإن قيم م هي:

(أ) ٤ (ب ٣ (ج ٢ ✓ (د ١

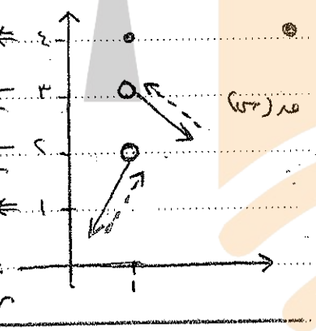


(١) مد(٠) = ٥ (معرّف)

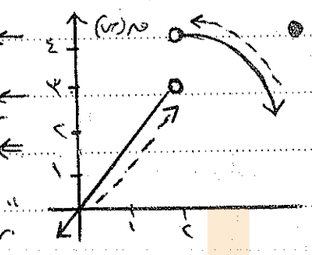


نهـا مد(س) = ٤ ← م = ٢
نهـا مد(س) = ٤ ← م = ٢
نهـا مد(س) = نهـا مد(س) ← م = ٢
٤ = ٤

(٢) مد(١) = ٤

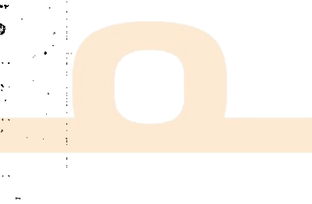


نهـا مد(س) = ٣ ← م = ١
نهـا مد(س) ≠ نهـا مد(س) ← م = -١، ١
نهـا مد(س) غير موجودة ← م = ١

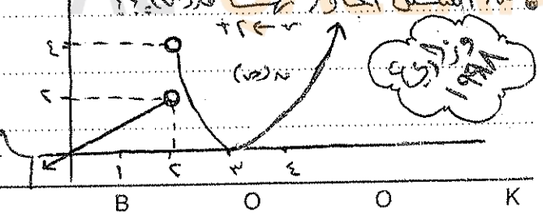


نهـا مد(س) = ٤ ← م = ٢
نهـا مد(س) = ٣ ← م = -٢
اليمين ≠ اليسار
نهـا مد(س) غير موجودة ← م = ٢

نهـا مد(س) ← م = ٣
غير موجودة



• من الشكل المجاور، نهـا مد(س) = ؟؟ ← م = ٢



(أ) ٤ (ب ٣ (ج ٢ (د ١ ✓

N O T E B O O K

subject: الرياضيات Date:

نظريات في النهايات

- لا تتوفر النهاية إلا إذا كانت النهاية موجودة فقط.

نظرية: إذا كانت $\lim_{س \to أ} د(س) = ل$ ، وكانت $\lim_{س \to أ} هـ(س) = ك$ فإن:

① $\lim_{س \to أ} (د(س) + هـ(س)) = ل + ك$

② $\lim_{س \to أ} (د(س) - هـ(س)) = ل - ك$

③ $\lim_{س \to أ} (د(س) \times هـ(س)) = ل \times ك$

④ $\lim_{س \to أ} \left(\frac{د(س)}{هـ(س)}\right) = \frac{ل}{ك}$ ، $ك \neq$ صفر

- $د'(س) \neq د(س^2)$

$د'(س) = (د(س))^2$

- إذا كانت $\lim_{س \to ٤} د(س) = ٥$ ،

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ٣$ ، أوجد:

① $\lim_{س \to ٤} (د(س) \times هـ(س)) =$

(أ) ١٥ (ب) ١٢ (ج) ١٤ (د) ٨

② $\lim_{س \to ٤} (د(س) + ٣س - ٢) =$

(أ) ١٣ (ب) ١٤ (ج) ١٥ (د) صفر

③ $\lim_{س \to ٤} (د'(س) + ٥ هـ(س)) =$

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (ج) ٥٤ (د) ٣٠

④ $\lim_{س \to ٤} \left(\frac{د(س) + ٤س + ١}{هـ^2(س) + ٢س}\right) =$

(أ) $\frac{٢}{٧}$ (ب) $\frac{١٣}{١٥}$ (ج) صفر (د) ١

- إذا علمت أن $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٥$

$\lim_{س \to ٣^+} د(س) =$ غير موجودة ، $\lim_{س \to ٣^-} د(س) \neq \lim_{س \to ٣^+} د(س)$

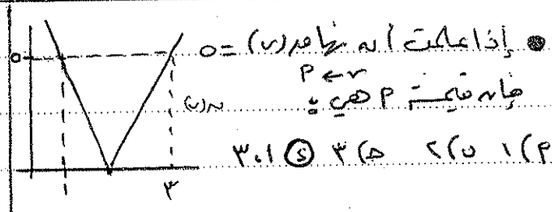
$\lim_{س \to ٣} د(س) = ٤$ و ،

$\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة ، عندما $أ = ؟$

← عندما $أ = ٢$ ، -٢

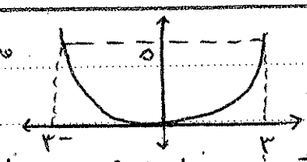
⑤ $\lim_{س \to ١} د(س+١) =$ غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to -١} د(س-١) =$ غير موجودة



- إذا علمت أن $\lim_{س \to أ} د(س) = ٥$ ، فإن $\lim_{س \to أ} د(س)$ هي:

(أ) ١ (ب) ٢ (ج) ٣ (د) ٠



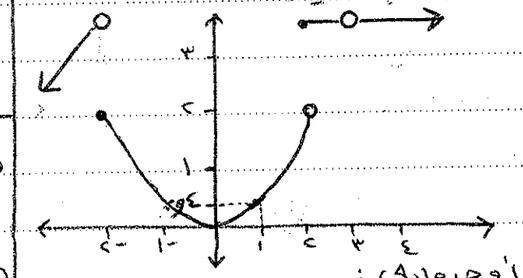
* إذا علمت أن $\lim_{س \to أ} د(س) = ٥$ ، فإن $\lim_{س \to أ} د(س)$ هي:

(أ) ٣ (ب) -٣ (ج) ٣ ، -٣ (د) غير ذلك

* إذا علمت أن $\lim_{س \to أ} د(س) =$ صفر فإن $\lim_{س \to أ} د(س)$ هي:

(أ) صفر (ب) ١ (ج) ٢ (د) ٣

- الشكل المجاور يمثل منحنى $د(س)$:



* أوجد ما يلي:

① $\lim_{س \to -٢} د(س) = ٢$

② $\lim_{س \to -٢} د(س) =$ غير موجودة ، $\lim_{س \to -٢^-} د(س) \neq \lim_{س \to -٢^+} د(س)$

③ $\lim_{س \to ١} د(س) = ٤$ و ،

④ $\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة ، عندما $أ = ؟$

← عندما $أ = ٢$ ، -٢

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات Date:

⑤ نهـا $\frac{\text{س} \times \text{هـ}(\text{س})}{\text{هـ}^2(\text{س})}$ = ؟ ، $\text{س} \to 4$

أ) $\frac{19}{\sqrt{19}}$ ب) $\frac{13}{5}$ ج) $\frac{14}{5}$ د) $\frac{-4}{9}$ ⑤

• إذا كانت نهـا $\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}-3} = 4$ ، أوجد نهـا هـ(س) ؟ $\text{س} \to 3$

نهـا $(2 - \text{هـ}(\text{س}))$ ؟ $\text{س} \to 3$

أ) -6 ب) 6 ج) 4 د) غير ذلك

• نهـا $\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}^2 - 1} = -4$ ، نهـا هـ(س) = ؟ $\text{س} \to 1$

(من 1997 س)

فإن نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}) - \text{هـ}(\text{س}) - 11)$ تساوي ؟ $\text{س} \to 4$

أ) 15 ب) 16 ⑤ 27 د) صفر

• إذا كان هـ(س) كثير حدود و

كانت نهـا $(\frac{1}{2}\text{هـ}(\text{س})^2 + \text{س}^2 - 4) = 12$ ، $\text{س} \to 2$

فجد قيمة نهـا $(\text{هـ}(\text{س}))^2$ ؟ $\text{س} \to 3$

(من 1998)

⑥ 196 ب) 14 ج) صفر د) 7 هـ) صفر

• إذا كانت نهـا هـ(س) = 3 وكانت

نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}) + 3\text{هـ}(\text{س}) - \frac{4}{\text{س}}) = 21$ ، $\text{س} \to -1$

فجد نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}))$ ؟ $\text{س} \to -1$

أ) 52 ب) صفر ج) 2 ⑤ 25

• إذا كانت نهـا $(\text{س}^2 + 2\text{هـ}(\text{س}) - 7) = 4$ ، $\text{س} \to -1$

فإن نهـا $(3\text{هـ}(\text{س}))$ تساوي : $\text{س} \to -1$

⑥ 15 ب) -6 ج) 3 د) غير ذلك

• إذا كانت نهـا هـ(س) = -3 ، $\text{س} \to 3$

نهـا هـ(س) = 4 ، جد : $\text{س} \to 3$

① نهـا $(2\text{هـ}(\text{س}) + 3\text{هـ}(\text{س}))^2$ = ؟ $\text{س} \to 3$

أ) -1 ⑥ 1 ج) 2 د) غير ذلك

② نهـا $\frac{(4\text{س} - 2\text{هـ}(\text{س}))}{\text{هـ}(\text{س})}$ = ؟ $\text{س} \to 3$

أ) -24 ب) 24 ج) 12 د) غير ذلك

③ نهـا $(\frac{\text{س}^3 - 6}{\text{س} + 3} + 2\text{س}\,\text{هـ}(\text{س}))$ = ؟ $\text{س} \to 3$

أ) -10 ⑥ 15 ب) 4 د) غير ذلك

• نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}) - 2\text{هـ}(\text{س}) + 1) =$ صفر ، $\text{س} \to 1$

فإن نهـا هـ(س) تساوي : $\text{س} \to 1$

أ) -1 ⑥ 1 ج) 2 د) -2

• إذا كان هـ(س) كثير حدود و

كانت نهـا $(\frac{1}{2}\text{هـ}(\text{س})^2 + \text{س}^2 - 4) = 12$ ، $\text{س} \to 2$

فجد قيمة نهـا $(\text{هـ}(\text{س}))^2$ ؟ $\text{س} \to 3$

(من 1998)

⑥ 196 ب) 14 ج) صفر د) 7 هـ) صفر

• إذا كانت نهـا هـ(س) = 3 وكانت

نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}) + 3\text{هـ}(\text{س}) - \frac{4}{\text{س}}) = 21$ ، $\text{س} \to -1$

فجد نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}))$ ؟ $\text{س} \to -1$

أ) 52 ب) صفر ج) 2 ⑥ 25

• إذا كانت نهـا $(\text{س}^2 + 2\text{هـ}(\text{س}) - 7) = 4$ ، $\text{س} \to -1$

فإن نهـا $(3\text{هـ}(\text{س}))$ تساوي : $\text{س} \to -1$

⑥ 15 ب) -6 ج) 3 د) غير ذلك

• إذا كانت نهـا $(\frac{\text{هـ}(\text{س})}{\text{س}^2 - 4} - \frac{1}{\text{س} - 2}) = 1$ ، $\text{س} \to 2$

فإن نهـا هـ(س) تساوي : $\text{س} \to 2$

أ) -1 ⑥ 1 ج) 2 د) -2

• إذا كانت نهـا $(\text{هـ}^2(\text{س}) - 4\text{هـ}(\text{س})) =$ صفر ، $\text{س} \to 1$

أوجد نهـا هـ(س) تساوي : $\text{س} \to 1$

أ) صفر ب) 4 ⑥ 4 أو 0 د) غير ذلك

• إذا كان هـ(س) = $2\text{س}^2 + 4\text{س} + 5$ ،

$\text{ع} \in \mathbb{R}$ ، جد قيمة م إذا كانت نهـا هـ(س) = 10 ، $\text{س} \to \text{م}$

أ) 4 ⑥ $\frac{3}{4}$ ج) صفر د) 7

⇐ قاعدة الاستبدال

نهـا هـ(س) = نهـا هـ(ص) = نهـا هـ(ع)

$\text{س} \to \text{أ}$ $\text{ص} \to \text{ب}$ $\text{ع} \to \text{ج}$

← نفس الاقتران هـ

← نفس أ ، ← نفس الاجابة.

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

NOTE BOOK

● اذا كانت $\lim_{س\to ٣} هـ(س) = ٥$ أوجد $\lim_{ص\to ٣} هـ(ص)$

$\lim_{س\to ٣} هـ(س) = \lim_{ع\to ٣} هـ(ع) = \lim_{ص\to ٣} هـ(ص) = ٥$

● إذا كانت $\lim_{س\to ٥} هـ(س) = ٤$ ، أوجد:

$\lim_{س\to ٥} (٢س + ١)$ ؟

أ) ٣ ب) صفر د) ٥ ج) ٤

● إذا كانت $\lim_{س\to ٢} هـ(س) = ٥$ ، أوجد:

$\lim_{س\to ٢} هـ^{٢}(س + ٣)$

أ) ٢٥ ب) ٤٠ د) ٣٠ ج) ١٥

● إذا كانت $\lim_{س\to ٣} هـ(س) = ٤$ أوجد

$\lim_{س\to ٣} (هـ(٢س + ٥) + ٣س - ٤)$:

أ) صفر ب) ٣ د) ٤ ج) ٧

● إذا كانت $\lim_{س\to ٣} هـ(س) = ٦$ أوجد

$\lim_{س\to ٣} (\sqrt{٢س + ١} + ٢س - ٥)$:

أ) ٧ ب) صفر د) ٩ ج) غير ذلك

● إذا كانت $\lim_{س\to ٥} هـ(س) = ٥$ ، أوجد

$\lim_{س\to ٥} (هـ^{٢}(٥س + ١) + ٤س^{٢} + ٢)$:

أ) ٥ ب) ٣١ د) ٧ ج) ٣٠

● إذا كانت $\lim_{س\to ٢} هـ(٢س + ١) = ٤$ ، أوجد

$\lim_{س\to ٢} هـ(٤س - ١)$:

- الحل: $\lim_{س\to ٣} (٢س + ١) \to \lim_{ص\to ٧} هـ(ص) = ٤$

$\to \lim_{س\to ٣} هـ(٤س - ١) \to \lim_{ع\to ٧} هـ(ع) = ٤$

$\therefore \lim_{ع\to ٧} هـ(ع) = \lim_{ص\to ٧} هـ(ص) = \lim_{س\to ٢} هـ(٤س - ١) = ٤$

● إذا كانت $\lim_{س\to ٢} هـ(٢س + ١) = ٥$ ، $هـ(٣) = ٤$

فإن $\lim_{س\to ٢} (٣هـ^{٢}(س) - ٢س + ١) =$ ؟

أ) ٧٠ ب) ٥٠ د) ٣٠ ج) ٤٠

● $\lim_{س\to ١} هـ(٢س + ١) = ٨$ ، $هـ(٣) = ٦$ ، فإن

$\lim_{س\to ١} (هـ^{٢}(س) + ٢س - ٧)$ تساوي:

أ) ٦٥ ب) ٦٤ ج) ٦٣ د) ٤٠

● إذا كانت $\lim_{س\to ٣} (٣س - هـ(س)) = ٦$ ،

أوجد $\lim_{س\to ٥} هـ(٢س + ٣)$:

أ) ٩ ب) -٩ د) ٤ ج) -٣

● إذا علمت $\lim_{س\to ٢} هـ(س) = \lim_{س\to ٢} (س - م)$

أوجد قيمة م ؟؟

أ) -٢ ب) ٢ د) -٣ ج) غير ذلك

● إذا كانت $\lim_{س\to ٥} هـ(س) = ٥$ ، أوجد

$\lim_{س\to ٦} (هـ^{٢}(٥س + ١) + ٤س^{٢} + ٢)$:

أ) ٥ ب) ٣١ د) ٧ ج) ٣٠

● إذا كانت $\lim_{س\to ٢} هـ(٤س + ١) = ٤$ ، أوجد

$\lim_{س\to ٣} هـ(٤س - ١)$:

● إذا كانت $\lim_{س\to ٥} هـ(س) = ٨$ ، فإن

$\lim_{س\to ٥} (٢س - \sqrt{٣هـ(س)})$ تساوي:

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

أ) ٤ ب) ٦ ج) -٦ د) غير ذلك

• نها ه(س) = ٤، نها (س² + ٢ه(س) + ٤) = ١٦
س←٨ س←٤
فإن قيمة الثابت ٢ تساوي:
أ) ١٥ ب) -١٥ ج) ٣ د) غير ذلك

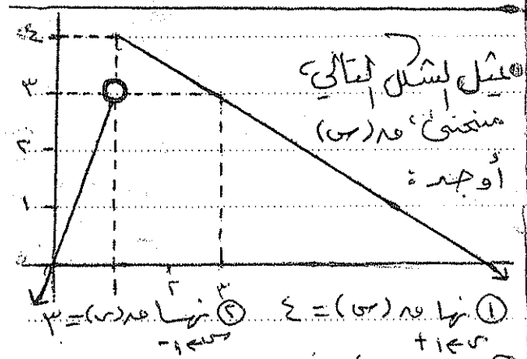
• نها (ه(س) - ٣س) = ١، فإن
س←٢
نها (س ه(س) (√(٧س) + ٢)) تساوي:
س←٩
أ) ٤٩ ب) ٩٨ ج) ٥ د) صفر

• نها ه(س - ٢) = ١١، فإن
س←٤
نها (٢ه(س + ٣) + ٧) تساوي:
س←-١
أ) -٩ ب) ٣ ج) صفر د) ٢٩

• إذا كانت نها (ه(س) - ٦ه(س) + ٩) = صفر، فإن نها (٣ه(س) + ٥س) تساوي:
س←٤ س←٤
أ) ٢٦ ب) ٥ ج) صفر د) ٣

• نها (٣س² - ل(٢س - ١) + ب) = ١،
س←٠
وكانت نها ل(س) = ٧، ما قيمة الثابت ب:
س←٢
أ) ٣ ب) ٤ ج) -٤ د) غير ذلك

مثل الشكل التالي منحنى ه(س) أوجد:

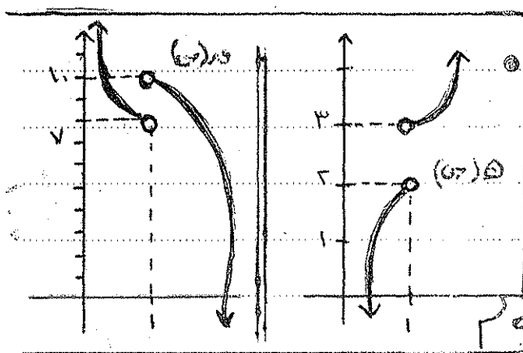


١) نها ه(س) = ٤
س←١+
٢) نها ه(س) = ٣
س←١-
٣) نها ه(س) = غير موجودة
٤) نها ه(س) = ٣
س←١
٥) نها ه(س) = ٣
س←٣-
٦) نها ه(س) = ٣
س←٣+
٧) نها ه(٤ - س) = ٤
س←٣-
٨) نها ه(س) = ٣
س←٣
٩) نها ه(٧ - س) = نها ه(س) = ٣
س←٦ س←١-
١٠) نها ه(٥ - ٢س) = نها ه(س) = ٤
س←١+ س←٢-

• إذا كانت نها ه(س) = نها ه(س + ٣)
س←٧ س←٤
فإن قيمة م =
م
أ) ٧ ب) -٧ ج) ١٣ د) غير ذلك

• إذا كانت نها ه(٥س + ١) = ١٠، فإن قيمة
س←٢
م إذا علمت أن نها (٢س + م ه(س)) = ٥
س←٧
أ) ٢,٧ ب) -٢,٧ ج) ٦ د) ٥

• إذا علمت أن نها ه(٣س) = ٣ وعلمت أن
س←٤
نها ه(٤س) = ٥، فجد نها ه(س) + ٤س² + ٥
س←١
أ) ٧٢ ب) ٧٣ ج) ٧٤ د) ٧٥



subject: النهاية في الرياضيات Date:

نهـا (هـ - مـ) (س)
س ← ١

نهـا هـ(س) = ٣ ، نهـا هـ(س)² = ٢
س ← ١ + ، س ← ١ -

نهـا مـ(س)² = ١٠ ، نهـا مـ(س) = ٧
س ← ١ + ، س ← ١ -

⇦ نهـا (هـ - مـ)(س) = -٧ ، نهـا (هـ - مـ)(س) = ٥
س ← ١ + ، س ← ١ -

نهـا (هـ - مـ) (س) = غير موجودة.
س ← ١

** امتحان قطر :

• إذا كان مـ(س) اقتراناً متصلاً وكانت لمنحنى (١،٣) واقعة على منحنى الاقتران مـ(س) وكانت نهـا (مـ(٢س - ١) + ٣س² + م) = ٦،
س ← ٢
فإن (م) تساوي :

أ) ١ ب) -١ ج) -٦ د) ٥ هـ) -٥

• إذا كان ق(س) = { نهـا هـ(س) ، س ≥ ٢ ، س
س ← ٢
٥ س ، س < ٢

و كانت نهـا ق(س) موجودة ، أوجد نهـا هـ(س).
س ← ٢ ، س ← ٢+

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٣٦ د) -٥ هـ) ٥

• إذا كان مـ(س) اقتراناً متصلاً وكانت النقطة (١،٣) واقعة على المنحنى فإن نهـا (مـ(٢س - ١) - ٢س² + ١) = ؟
س ← ٢

أ) -١٦ ب) ١ ج) -٤ د) -٦

• إذا أثبتت أن نهـا (مـ(س) - ٦مـ(س) + ٩) = صفراً ، أوجد نهـا (مـ³(س) + ٥س)
س ← ٤ ، س ← ٤

• إذا أثبتت أن نهـا مـ(س + ٣) = ٥ ، و
س ← ٤
كانت نهـا مـ(٢س + ١) = و كانت
س ← ٢
مـ(٣) = ٤ ، مـ(٥) = ٦ ، أوجد
نهـا (مـ(٣س - ١) + ٤س + ٥)
س ← ٢

• إذا كانت نهـا (س جتا ٢س) = صفر
س ← π/٢
فما أقل قيمة لـ (م) ؟

أ) ٢ ب) -٢ ج) ٣ د) -٣

نهاية للاقتران النسبي

- مباشر
  - شكل صفر / شكل صفر
  - صفر / شكل صفر
  - شكل صفر / صفر
- غير مباشر
  - صفر / صفر

• نهـا (س + ٥) / (س + ٧) = شكل صفر / شكل صفر = ٥/٧
س ← ٠

• نهـا (س - ١) / (س² + ٣) = صفر / شكل صفر = صفر / ٤ = صفر
س ← ١

• نهـا (س - ١) / س = صفر / صفر = ١/صفر = -∞
س ← ٠

• نهـا (س + ٧) / س = شكل صفر / صفر = ٧/صفر = ∞
س ← ٠

NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

القسم العلمي — الرياضيات

subject: ..... Date: .....

• $\lim_{س \to 1} \frac{س^3 - 1}{س - 1}$ = صفر/صفر للتعويض.

• $\lim_{س \to 1} (س^3 + 2س + \frac{6}{س}) = 1 + 2 + 6 = 9$

• $\lim_{س \to 2} (\frac{س + 5}{س^2 + 1}) = \frac{2 + 5}{4 + 1} = \frac{7}{5}$

• $\lim_{س \to 2} (4 + س)^س = (4 + 2)^2 = (6)^2 = 36$

• $\lim_{س \to 1} (2س^3 + \sqrt{س + 7} + س^4)$
$= (2 + \sqrt{1 + 7} + 1) = 5$

• $\lim_{س \to 7} 4 = 4$

قاعدة: $\lim_{س \to م} ا(س) = \lim_{س \to م} ب(س)$ = ثابت نفسه

• $\lim_{س \to 2} (\frac{3}{2})^س = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$

• $\lim_{س \to 1} (\frac{5س - 1}{س^2 - 2}) = \frac{5 - 1}{1 - 2} = -4$

• $\lim_{س \to 5} (\frac{س - 5}{4 + س^2}) = \frac{5 - 5}{4 + 25} =$ صفر

• $\lim_{ص \to 10} (\frac{7 - ص}{س - 10}) = \frac{-3}{\text{صفر}} = -\infty$

• $\lim_{س \to 3} \sqrt{س - 2} = \sqrt{3 - 2} = 1$

• $\lim_{س \to 2^+} \sqrt{س - 2}$ = صفر

RULE:

- الأصل في النهاية التعويض المباشر ...
أما إذا كان ناتج التعويض المباشر صفر/صفر فنلجأ إلى عدة طرق لإيجاد النهاية ...

(١) إخراج العامل المشترك:

• $\lim_{س \to 0} (\frac{س^4 + 5س}{س^3 + 3س^2}) =$

أ) 4 ب) 6 ج) $\frac{5}{3}$ د) $\frac{3}{5}$

• $\lim_{س \to 0} (\frac{س^3 - 5س^2}{س^4 - 3س^2}) =$

أ) $\frac{5}{3}$ ب) $\frac{3}{5}$ ج) $-\frac{5}{3}$ د) $-\frac{3}{5}$

• $\lim_{س \to 0} (\frac{س^4}{س^3 - س^2}) =$

أ) صفر ب) -1 ج) 1 د) 2

• $\lim_{س \to 0} (\frac{س^4 - س^2}{س^3}) =$

أ) صفر ب) ∞ ج) $-\infty$ د) 1

(٢) التحليل إلى العوامل:

$س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)$

$س^2 + 3س + 2 = (س + 2)(س + 1)$

• $\lim_{س \to 1} \frac{(س - 1)(س + 4)}{(س - 1)(س + 1)}$ تساوي:

منصة القمم التعليمية AL QAHAM EDUCATION

م) صفر ب) ٤ ج) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{٥}{٤}$

• نهـا $\frac{س^٤ + ٦س - ٧}{س^٢ + ٢س - ٣}$ تساوي:
$س \to ١$
م) ٢ ب) ٣ ج) ٤ د) -٢

• نهـا $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - ٤}$ تساوي:
$س \to ٢$
م) ٣ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

• نهـا $\left(\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ + س - ٢}\right)$ تساوي:
$س \to -٢$
م) ٣ ب) -٣ ج) $-\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٣}$

• نهـا $(\frac{٢س - س^٢}{س - ٢})^٣$ تساوي:
$س \to ٢$
م) -٨ ب) ٨ ج) -٤ د) ٤

• نهـا $\frac{(س+٢)^٢ - ٩}{س}$ = نهـا $\frac{س^٢ + ٦س - ٨}{س - ١}$
$س \to ٠$ $س \to ١$

نهـا $\frac{س(س+٦)}{س}$ = ٠ + ٦ = ٦
$س \to ٠$

• نهـا $\frac{س^٤ - س}{س^٣ - ١}$ تساوي
$س \to ١$
م) ١ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٢}$ د) غير ذلك

• نهـا $\frac{(٢س+١)^٢ - ٢٥}{س - ٢}$ تساوي
$س \to ٢$
م) ٠ ب) صفر ج) ١٠ د) ٤

• نهـا $\frac{س^٣ + ٣س^٢ + ٢س - ٦}{س - ١}$ = نهـا $\frac{س^٣ + ٤س + ٦}{١}$
$س \to ١$ $س \to ١$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ب
	١	٣	٢	-٦
١		١	٤	٦
	١	٤	٦	صفر

$\Leftarrow$ نهـا $س^٢ + ٤س + ٦$
$س \to ١$

• أوجد نهـا $\frac{س^٣ + س - ١٠}{س^٣ - س^٢ - ٤}$ = $\frac{صفر}{صفر}$
$س \to ٢$

الحل:

* نقسم البسط والمقام على $(س - ٢)$

$\frac{س^٣ + س - ١٠}{س - ٢}$ ← $\frac{س^٣ - س^٢ - ٤}{س - ٢}$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ج
	١	٠	١	-١٠
٢		٢	٤	١٠
	١	٢	٥	صفر

← $س^٢ + ٢س + ٥$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ج
	١	-١	٠	-٤
٢		٢	٢	٤
	١	١	٢	صفر

← $س^٢ + س + ٢$

* نهـا $\frac{س^٢ + ٢س + ٥}{س^٢ + س + ٢}$
$س \to ٢$

= $\frac{٤ + ٤ + ٥}{٤ + ٢ + ٢}$ = $\frac{١٣}{٨}$

القسمة التركيبية

• $\frac{س^٣ + ٣س^٢ + ٢س - ٦}{س - ١}$ = $س^٢ + ٤س + ٦$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ب
	١	٣	٢	-٦
١		١	٤	٦
	١	٤	٦	صفر

← $س^٢ + ٤س + ٦$

• نهـا $\frac{س^٤ - ٨}{س^٢ - ٤}$ تساوي:
$س \to ٢$
م) ٣ ب) ٢ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٢}$

• نهـا $\frac{س^٤ - ٨}{س^٢ - ٤}$ تساوي:
$س \to ٢$

	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ج
	١	٠	٠	٠	-٨
٢		٢	٤	٨	١٦
	١	٢	٤	٨	٨

← $س^٣ + ٢س^٢ + ٤س + ٨$

	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ج
	١	٢	٤	٨
٢		٢	٨	٢٤
	١	٤	١٢	٣٢

← $س^٢ + ٤س + ١٢$

• نهـا $\frac{س^٢ + ٤س + ١٢}{س + ٢}$ = $\frac{٣٢}{٤}$ = ٨
$س \to -٢$

• نهـا $\frac{س^٣ + ٢س^٢ + ٤س + ٨}{س^٢ + ٤}$ = $\frac{٠}{٨}$ = ٠
$س \to -٢$

• نهـا $\frac{س^٣ + ٢س^٢ + ٤س + ٨}{س^٢ + ٤}$ = نهـا $\frac{س^٢ + ٤}{١}$
$س \to -٢$ $س \to -٢$

= ٨

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

٠٧٨٥٤٠٥٤٤
٠٧٨٨٨٨٨٠٦

● أوجد نهـا $\frac{ص^3 - ٣ص + ٢}{ص^3 - ص^2 - ص + ١}$ ، ص ← ١

- الحل: بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

$\frac{ص^3 - ٣ص + ٢}{ص - ١}$ ← نقسم على (ص - ١)

$\frac{ص^3 - ص^2 - ص + ١}{ص - ١}$

* $ص^3 - ٣ص + ٢$ ← ص - ١

	١	٠	٣-	٢
١		١	١	٢-
	١	١	٢-	صفر

لـ $ص^2 + ص - ٢$

* $ص^3 - ص^2 - ص + ١$ ← ص - ١

	١	١-	١-	١
١		١	٠	١-
	١	٠	١-	صفر

لـ $ص^2 - ١$

* نهـا $\frac{ص^2 + ص - ٢}{ص^2 - ١}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ ، ص ← ١

← نهـا $\frac{(ص+٢)(ص-١)}{(ص+١)(ص-١)}$ = نهـا $\frac{١+٢}{١+١}$ = $\frac{٣}{٢}$ ، ص ← ١

● أوجد نهـا $\frac{س^3 - ٤س + ٣}{س^2 + ٢س - ٣}$ ، س ← ١

- الحل: بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

← نهـا $\frac{(س^2 + س - ٣)(س-١)}{(س+٣)(س-١)}$ ، س ← ١

← نهـا $\frac{س^2 + س - ٣}{س+٣}$ ، س ← ١

← نهـا $\frac{(س-٤)(س-١)}{(س+٣)(س-١)}$ ، س ← ١

← نهـا $\frac{س-٤}{س+٣}$ ، س ← ١

← نهـا $\frac{١-٤}{١+٣}$ = $\frac{-٣}{٤}$

● أوجد نهـا $\frac{س^3 - ٤س}{س^2 - ٢س - ٨}$ ، س ← ٢

- الحل: بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

← نهـا $\frac{س(س-٢)(س+٢)}{(س-٤)(س+٢)}$ ، س ← ٢

← نهـا $\frac{س}{س-٤}$ ، س ← ٢

← نهـا $\frac{٢-}{٢-٤}$ = $\frac{-٢}{-٦}$ = $\frac{١}{٣}$

● أوجد نهـا $\frac{س^4 - ٢س - ٨}{س^3 + ٢س^2 - ٤س - ٨}$ ، س ← ٢

أ) $\frac{٤}{٥}$ ب) $\frac{٦}{١٣}$ ج) $\frac{-٦}{١٣}$ د) $\frac{١٣}{٦}$

● أوجد نهـا $\frac{(س^4 - ١٦)(س+٣)}{س^2 - س - ٢}$ ، س ← ٢

- الحل: بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

← نهـا $\frac{(س^2 - ٤)(س^2 + ٤)(س+٣)}{(س-٢)(س+١)}$ ، س ← ٢

← نهـا $\frac{(س-٢)(س+٢)(س^2+٤)(س+٣)}{(س-٢)(س+١)}$ ، س ← ٢

← نهـا $\frac{(س+٢)(س^2+٤)(س+٣)}{(س+١)}$ ، س ← ٢

← نهـا $\frac{٤ \times ٨ \times ٥}{٣} = \frac{١٦٠}{٣}$

● نهـا $\frac{س^2 - ١}{س - ١}$ ، س ← ١ = نهـا س + ١ ، س ← ١ = ١ + ١ = ٢

● نهـا $\frac{س^3 - ١}{س - ١}$ ، س ← ١ = نهـا $(س^2 + س + ١)$ ، س ← ١ = ١ + ١ + ١ = ٣

● نهـا $\frac{س^5 - ١}{س - ١}$ ، س ← ١ = نهـا $(س^4 + س^3 + س^2 + س + ١)$ ، س ← ١

= (١ + ١ + ١ + ١ + ١) = ٥

① $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

• احسب نهـا $\frac{س^{ن}-1}{س^{٣}-1}$ ، $س \to 1$

- الحل : بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to1} \frac{س-1}{س^{٣}-1} = \frac{س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+1}{س^{٢}+س+1} = \frac{1+1+1+1+1}{1+1+1} = \frac{٥}{٣}$$

• أثبت أن نهـا $\frac{س^{ن}-1}{س-1} = ن$ ، $س \to 1$

- الحل : بالتعويض المباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to1} \frac{س^{ن}-1}{س-1} = \text{نهـا}_{س\to1}(س^{ن-1}+س^{ن-2}+\dots+1)$$

$$\Leftarrow 1+1+1+\dots+1 = ن \quad \#$$

• أثبت أن نهـا $\frac{س^{ن}-1}{س^{٣}-1} = \frac{ن}{٣}$ ، $س \to 1$

- الحل : $س^{ن}-1$

$$\text{نهـا}_{س\to1} \frac{س-1}{س^{٣}-1} = \text{نهـا}_{س\to1} \frac{س^{ن-1}+س^{ن-2}+\dots+1}{س^{٢}+س+1}$$

$$= \frac{1+1+1+\dots+1}{1+\dots+1+1+1} = \frac{ن}{٣} \quad \#$$

• أوجد نهـا $\frac{س^{٥}-1}{(س-1)^{٥}}$ ، $س \to 1$

- الحل : تعويض مباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to1} \frac{س^{٥}-1}{(س-1)^{٥}} = \frac{(س-1)(س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+1)}{(س-1)^{٥}} = \frac{صفر}{صفر}$$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to1} \frac{س^{٤}+س^{٣}+س^{٢}+س+1}{(س-1)^{٤}} = \frac{٥}{٠} = ص \text{ غير موجودة}$$

٣ توحيد المقامات:

• $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{د} = \frac{أد+بجـ}{بد}$

• $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أد-بجـ}{بد}$

• $\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{ب} = \frac{أ-جـ}{ب}$

• أوجد نهـا $\frac{\frac{1}{س}-\frac{1}{٢}}{س-٢}$ ، $س \to ٢$

- الحل :

تعويض مباشر = $\frac{صفر}{صفر}$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to2} \left(\frac{1}{س}-\frac{1}{٢}\right) \times \frac{1}{س-٢}$$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س\to2} \frac{٢-س}{٢س} \times \frac{1}{س-٢} = \frac{-1}{٤}$$

• أوجد نهـا $\frac{\frac{1}{س+٢}-\frac{1}{٦}}{٨-٢س}$ ، $س \to ٤$

- الحل :

$$= \text{نهـا}_{س\to4} \frac{٦-(س+٣)}{٦(س+٢)} \times \frac{1}{٨-٢س}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to4} \frac{٦-س-٣}{٦(س+٢)} \times \frac{1}{٢(٤-س)}$$

$$= \text{نهـا}_{س\to4} \frac{٤-س}{٦(س+٢)} \times \frac{1}{٢(٤-س)}$$

$$= \frac{1}{٧٢}$$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة الرياضيات Date:

● جد نهـا $\frac{\frac{1}{س+2}-\frac{1}{2}}{س}$ (1998)

$س \to 0$

$= نهـا \left(\frac{1}{س}\right) \times \frac{2-(س+2)}{2(س+2)}$

$س \to 0$

$= نهـا \frac{-س}{س \times 2(س+2)}$

$س \to 0$

$= نهـا \frac{-1}{2(س+2)} = \frac{-1}{2(2)} = -\frac{1}{4}$

$س \to 0$

● نهـا $\left(\frac{1}{س}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{س-5}\right)$ تساوي (1999)

$س \to 5$

$= نهـا \left(\frac{5-س}{5س}\right)\left(\frac{1}{س-5}\right)$

$س \to 5$

$= نهـا \frac{-1}{5س} = \frac{-1}{5 \times 5} = \frac{-1}{25}$

$س \to 5$

● نهـا $\left(\frac{1}{س}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{س-2}\right)$ تساوي

$س \to 2$

$= نهـا \frac{-1}{2س} \left(\frac{2-س}{س-2}\right)$

$س \to 2$

$= نهـا \frac{-1}{2س} = \frac{-1}{2 \times 2} = -\frac{1}{4}$

$س \to 2$

● أوجد نهـا $\left(\frac{1}{س^2-2س}-\frac{1}{4-2س}\right)$

$س \to 2$

$= نهـا \left(\frac{1}{س(س-2)}+\frac{1}{2(س-2)}\right)$

$س \to 2$

* الآن نقوم بتوحيد المقامات ...

$= نهـا \frac{2+س}{2س(س-2)}$

$س \to 2$

● نهـا $\left(\frac{1}{س-2}-\frac{4}{س^2-4}\right)$ تساوي

$س \to 2$

$= نهـا \left(\frac{1}{س-2}-\frac{4}{(س-2)(س+2)}\right)$

$س \to 2$

$= نهـا \frac{(س+2)-4}{(س-2)(س+2)}$

$س \to 2$

$= نهـا \frac{س-2}{(س-2)(س+2)} = \frac{1}{4}$

$س \to 2$

● نهـا $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{س}\right)\left(\frac{1}{س-2}\right)$ تساوي

$س \to 2$

$= نهـا \left(\frac{س-2}{2س}\right)\left(\frac{1}{س-2}\right)$

$س \to 2$

$= نهـا \frac{1}{2س} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$

$س \to 2$

● أوجد نهـا $\left(\frac{1}{س-1}-\frac{3}{س^3-1}\right)$

$س \to 1$

- الحل:

$= نهـا \left(\frac{1}{س-1}-\frac{3}{(س-1)(س^2+س+1)}\right)$

$س \to 1$

$= نهـا \frac{س^2+س+1-3}{(س-1)(س^2+س+1)}$

$س \to 1$

$= نهـا \frac{(س+2)(س-1)}{(س-1)(س^2+س+1)}$

$س \to 1$

$= \frac{3}{3} = 1$

● نهـا $\left(\frac{س+2}{س-2}-\frac{س^2+12}{س^2-4}\right)$

$س \to 2$

- الحل:

$= نهـا \left(\frac{س+2}{س-2} \times \frac{س+2}{س+2}-\frac{س^2+12}{س^2-4}\right)$

$س \to 2$

$= نهـا \left(\frac{س^2+4س+4-س^2-12}{(س-2)(س+2)}\right)$

$س \to 2$

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

سعد الدين البستمي ؟

subject: Date:

$= \text{نها}_{س \to 2} \frac{س^2 - 4س + 8}{(س-2)(س+2)}$

$= \text{نها}_{س \to 2} \frac{ع (س-2)}{(س-2)(س+2)}$

$= \text{نها}_{س \to 2} \frac{ع}{س+2} = \frac{ع}{4} = 1$

● أوجد $\text{نها}_{س \to -1} \frac{س+1}{\frac{3}{4+س} + س}$

- الحل:

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} (س+1) \times \frac{1}{\frac{3}{4+س} + س}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{(س+1)(س+4)}{3 + (س+4)س}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{(س+1)(س+4)}{س^2 + 4س + 3}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{(س+1)(س+4)}{(س+1)(س+3)} = \frac{3}{2}$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 2} \frac{س^2 - 6س + 8}{\frac{1}{س+2} - \frac{1}{6}}$

- الحل:

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} (س^2 - 6س + 8) \div \left(\frac{1}{س+2} - \frac{1}{6}\right)$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} (س^2 - 6س + 8) \div \frac{6 - (س+2)}{6(س+2)}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} (س^2 - 6س + 8) \div \frac{4 - س}{6(س+2)}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} (س^2 - 6س + 8) \times \frac{6(س+2)}{4 - س}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} \frac{(س-2)(س-4)}{-(س-4)} \times 6(س+2)$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 4} -(س-2) \times 6(س+2) = -2 \times 6 \times 6 = -72$

● $\text{نها}_{س \to 1} \frac{1 - س^2}{\frac{1}{س^3} - 1}$ تساوي

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{(1-س)(1+س)}{\frac{1 - س^3}{س^3}}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{(1-س)(1+س)س^3}{(1-س)(1+س+س^2)}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{(1+س)س^3}{1+س+س^2} = \frac{1 \times 1 \times (1+1)}{1+1+1} = \frac{2}{3}$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 1} \frac{س^2 - \frac{1}{س}}{س - 1}$

- الحل:

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{س^3 - 1}{س}}{س^2 - 1}$ $\Leftarrow \text{نها}_{س \to 1} \frac{س^3 - 1}{س^4 - 1}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س-1)(س^2+س+1)}{(س-1)(س+1)} = \frac{3}{2}$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{1}{س+1} - 2}{س - 1}$

- الحل:

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{\frac{1 - 2س - 2س^2}{س+1}}{س - 1}$ $\Leftarrow \text{نها}_{س \to 1} \frac{-2س^2 - س + 1}{س^2 - 1}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to 1} \frac{-(2س-1)(س+1)}{(س-1)(س+1)} = \frac{-3}{1} = -3$

● $\text{نها}_{س \to -1} \frac{س + \frac{3}{4+س}}{1+س}$ تساوي

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{\frac{س(4+س)+3}{4+س}}{1+س}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{س^2 + 4س + 3}{(4+س)(1+س)}$

$\Leftarrow = \text{نها}_{س \to -1} \frac{(س+1)(س+3)}{(4+س)(1+س)} = \frac{2}{3}$

التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$$\lim_{س\to -1} \frac{س^2+4س+3}{(س+1)(س+4)} = \lim_{س\to -1} \frac{(س+3)(س+1)}{(س+1)(س+4)} = \frac{2}{3}$$

٤ الضرب بالمرافق:

المقدار		
$3-\sqrt{س}$	$3+\sqrt{س}$	$9-س$
$\sqrt{س+2}-5$	$\sqrt{س+2}+5$	$س+25-2$
$\sqrt{س+7}$	$\sqrt{س}+7$	$س+7$
$س-7\sqrt{س}+1$	$س+7\sqrt{س}+1$	$(س-7)^2-(س+1)$

• أوجد $\lim_{س\to 25} \frac{\sqrt{س}-5}{س-25}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to 25} \frac{\sqrt{س}-5}{س-25} \times \frac{\sqrt{س}+5}{\sqrt{س}+5}$$

$$= \lim_{س\to 25} \frac{(س-25)}{(س-25)(\sqrt{س}+5)} = \frac{1}{10}$$

• أوجد $\lim_{س\to -3} \frac{\sqrt{-6-س}-3}{3+س}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to -3} \frac{\sqrt{-6-س}-3}{3+س} \times \frac{\sqrt{-6-س}+3}{\sqrt{-6-س}+3}$$

$$= \lim_{س\to -3} \frac{-6-س-9}{(3+س)(\sqrt{-6-س}+3)}$$

$$= \lim_{س\to -3} \frac{-(3+س)}{(3+س)(\sqrt{-6-س}+3)} = \frac{-1}{6}$$

• أوجد $\lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+6}-3}{س-3}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to 3} \frac{\sqrt{س+6}-3}{س-3} \times \frac{\sqrt{س+6}+3}{\sqrt{س+6}+3}$$

$$= \lim_{س\to 3} \frac{(س-3)}{(س-3)(\sqrt{س+6}+3)} = \frac{1}{6}$$

• أوجد $\lim_{س\to 4} \frac{س-4}{\sqrt{س+5}-3}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{س-4}{\sqrt{س+5}-3} \times \frac{\sqrt{س+5}+3}{\sqrt{س+5}+3}$$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{(س-4)(\sqrt{س+5}+3)}{س+5-9}$$

$$= \lim_{س\to 4} \frac{(س-4)(\sqrt{س+5}+3)}{(س-4)} = 3+3 = 6$$

• أوجد $\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س^2+8}-3}{س-1}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س^2+8}-3}{س-1} \times \frac{\sqrt{س^2+8}+3}{\sqrt{س^2+8}+3}$$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{س^2+8-9}{(س-1)(\sqrt{س^2+8}+3)}$$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{س^2-1}{(س-1)(\sqrt{س^2+8}+3)}$$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)(\sqrt{س^2+8}+3)}$$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{س+1}{\sqrt{س^2+8}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

• أوجد $\lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س+3}-2}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

$$= \lim_{س\to 1} \frac{\sqrt{س}-1}{\sqrt{س+3}-2} \times \frac{\sqrt{س}+1}{\sqrt{س}+1} \times \frac{\sqrt{س+3}+2}{\sqrt{س+3}+2}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س-1)}{س^2-3س+4} \times \frac{\sqrt{س+3}+2}{\sqrt{س}+1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{(س-1)}{(س-1)(س-3)} \times \frac{\sqrt{س+3}+2}{\sqrt{س}+1} = 2$$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+س+1}-1}{س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+س+1}-1}{س} \times \frac{\sqrt{س^2+س+1}+1}{\sqrt{س^2+س+1}+1}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{س^2+س+1-1}{س(\sqrt{س^2+س+1}+1)}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{س(س+1)}{س(\sqrt{س^2+س+1}+1)}$$

$$= \frac{1+0}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 1} \frac{س-\sqrt{3س-2}}{1-س} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س-\sqrt{3س-2}}{1-س} \times \frac{س+\sqrt{3س-2}}{س+\sqrt{3س-2}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س^2-3س+2}{(1-س)(س+\sqrt{3س-2})}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{(1-س)(2-س)}{(1-س)(س+\sqrt{3س-2})}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 4} \left(\frac{6}{\sqrt{3س}-3} - \frac{}{س-4} \right)$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{6-\sqrt{3س}}{\sqrt{س}} \times \frac{1}{س-4}$$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{6-\sqrt{3س}}{\sqrt{س}(س-4)}$$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{6-\sqrt{3س}}{\sqrt{س}(س-4)} \times \frac{6+\sqrt{3س}}{6+\sqrt{3س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{36-9س}{\sqrt{س}(س-4)(6+\sqrt{3س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{-9(4-س)}{\sqrt{س}(س-4)(6+\sqrt{3س})}$$

$$= \text{نها}_{س \to 4} \frac{-9}{\sqrt{س}(6+\sqrt{3س})}$$

$$= \frac{-9}{(2)(12)} = \frac{-9}{24} = \frac{-3}{8}$$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1}{\sqrt{1+س}} - 1 \right)$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1-\sqrt{1+س}}{\sqrt{1+س}} \right) \times \frac{1+\sqrt{1+س}}{1+\sqrt{1+س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{-س}{\sqrt{1+س}(1+\sqrt{1+س})} \right)$$

$$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{-1}{\sqrt{1+س}(1+\sqrt{1+س})}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٨س}{٤ - س}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ٨س}{٤ - س} \times \frac{\sqrt{س} + ٧}{س^٢ + ٧\sqrt{س}}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س - ٨)}{(٤ - س)(س^٢ + ٧\sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س^٣ - ٤٩)}{(٤ - س)(س^٢ + ٧\sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س - ٤)(س^٢ + ٣س + ١٦)}{(٤ - س)(س^٢ + ٧\sqrt{س})}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س^٢ + ٣س + ١٦)}{-(س^٢ + ٧\sqrt{س})}$

$= \frac{٤ \times ٣٢}{-٣٢} = -٤$

● أوجد $\lim_{س \to ٠^+} \frac{\sqrt{س}}{٢ - \sqrt{س + ٤}}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{\sqrt{س}}{٢ - \sqrt{س + ٤}} \times \frac{٢ + \sqrt{س + ٤}}{٢ + \sqrt{س + ٤}}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{\sqrt{س}(٢ + \sqrt{س + ٤})}{-س}$

$= \lim_{س \to ٠^+} \frac{٢ + \sqrt{س + ٤}}{-\sqrt{س}}$

$= \frac{٤}{-٠^+} = -\infty$

● أوجد $\lim_{س \to ١} \frac{س^٥ - ٤س + ٣}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(٥س^٤ + ٤)}{(س - ١)}$

$= ٥ + ٤ = ٩$

⑤ التوزيع المنتظم :

● $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ + ٧س - ١٨}{س - ٤}$ صفر / صفر

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} + \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١٦}{س - ٤} + \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)} + \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$= \lim_{س \to ٤} (س + ٤) + \frac{(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)}$

$= ٤ + ٤ + \frac{١}{٢ + ٢} = ٨ + \frac{١}{٤} = \frac{٣٣}{٤}$

● أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٤ + س^٣ + ٣س + ٢\sqrt{س + ٢} - ٢٠}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} + \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢} + \frac{٣س - ٦}{س - ٢} + \frac{٢\sqrt{س + ٢} - ٢}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢} (س + ٢) + (س^٢ + ٢س + ٤) + ٣ + \frac{١}{\sqrt{س + ٢} + ٢}$

$= ٤ + ٤ + ٤ + ٣ + \frac{١}{٤} = ١٩\frac{١}{٤}$

● أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ \sqrt{س} - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ \sqrt{س} - ١٦\sqrt{س} + ١٦\sqrt{س} - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^٤ - ١٦}{\sqrt{س} + ٤} + \frac{١٦\sqrt{س} - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س^٢ + ١٦)(س + ٤)(س - ٤)}{\sqrt{س} + ٤} + \frac{١٦(\sqrt{س} - ٢)}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢}$

$= \frac{٣٢ \times ٨ \times ٤}{٤} + \frac{١٦(س - ٤)}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)}$

$= ٢٥٦ + \frac{١٦}{٤ + ٢} = ٢٥٦ + ٢ = ٢٥٨$

subject: سعد الديد البستنجي Date:

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٣} - ١٦س + \lim_{س \to ٤} ١٦س - ٣٢}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س-٤)(س+٤)}{(س-٤)} + \lim_{س \to ٤} \frac{١٦(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)}$

$= \lim_{س \to ٤} س(س+٤) + \lim_{س \to ٤} \frac{١٦}{س+٢} = ٢٠$

● أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{(س-١)^{٢} - ١٨س}{س - ٤}$

* بطرح وإضافة $٩س$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س-١)^{٢} - ٩س + ٩س - ١٨}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{[(س-١)^{٢} - ٩]}{س - ٤} +$

$\lim_{س \to ٤} \frac{٩[س - ٢]}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س^{٢} + ٢س + ١ - ٩)}{(س - ٤)}$

$+ \lim_{س \to ٤} \frac{٩(س-٢)}{(س-٤)} \times \frac{س+٢}{س+٢}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{س(س+٤)(س+٢)}{(س-٤)} +$

$\lim_{س \to ٤} \frac{٩(س-٤)}{(س-٤)(س+٢)}$

$= ٦ \times ٢ + \frac{٩}{٤} = \frac{٥٧}{٤}$

٦ مرافعة الجذر (التكعيبي)

الاقتران	مرافعة الجذر التكعيبي	الجواب
$س^{٣} - ١س + ٣$	$(س+١)^{٣} + ٣(س+١)^{٢} + ٣(س+١) + ١$	$(س+١)^{٣} - (٣)^{٣}$
$س^{٣} + ٢س - ٥$	$(س+٢)^{٣} + ٥(س+٢)^{٢} + ٢(س+٢) + (٥)$	$(س+٢)^{٣} - (٥)^{٣}$
$س^{٣} - ٧س + ٢$	$(س+٣)^{٣} + ٧(س+٣)^{٢} + ٢(س+٣) + ٤$	$(س+٧) - (٢)^{٣}$

● أوجد $\lim_{س \to ٨} \frac{س^{٣} - ٢}{س - ٨} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{س^{٢} - ٢}{س - ٨} \times \frac{(س^{٣})^{٢} + ٢س^{٣} + ٤}{(س^{٣})^{٢} + ٢س^{٣} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٨} \frac{(س-٨)}{(س-٨)(س^{٣})^{٢} + ٢س^{٣} + ٤)}$

$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$

● أوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢}{س - ٥} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^{٣} - ٢س^{٢} + ٢}{س - ٥} \times \frac{(٣)^{٢} + ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٢}}{(٣)^{٢} + ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{٢٧ - ٥س^{٢} - ٢}{(س-٥)(٩ + ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{(٥ - س)(٥ + س)}{(س-٥)(٩ + ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-(٥ + س)}{(٩ + ٣س^{٣} + ٢س^{٢} + (س^{٣} + ٢س^{٢})^{٢}}$

$= \frac{-١٠}{٢٧}$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

NOTE BOOK

٠٧٩٥٢٤٠٥٢٢
٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦

سؤال الدرس المستبعد

subject: Date:

• إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{ق - ٩}{س - ١}$ فجد قيمة ق ؟

* أولاً : نجد نهاية الطرف الأيمن

$$\lim_{س \to ١} \frac{\sqrt[٣]{س} - ١}{س - ١} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢} + \sqrt[٣]{س} + ١}{\sqrt[٣]{س^٢} + \sqrt[٣]{س} + ١}$$

$$= \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{(س - ١)(\sqrt[٣]{س^٢} + \sqrt[٣]{س} + ١)}$$

$$= \frac{١}{٣}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣} \times \frac{س - ٩}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\lim_{س \to ٣} \frac{(س + ٣)(س - ٣)}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{١}{٣}$$

$$\lim_{س \to ٣} س + ٣ = \frac{١}{٣}$$

$$\Leftarrow \sqrt{٣} + ٣ = ٣ \Leftarrow \frac{١}{٣} = \sqrt{ق} + ٣$$

$$\Leftarrow \sqrt{ق} = ٠ \Leftarrow \frac{١}{٣} = \sqrt{ق}$$

$$\therefore ق = \frac{١}{٣٦}$$

• أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt[٣]{س+٦}}{س - ٢}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢ - \sqrt[٣]{س+٦} + ٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} - \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} - ٢}{س - ٢}$$

(١) (٢)

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٢}{\sqrt{س+٢} + ٢}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

• أوجد $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{\sqrt[٣]{س} + ٢}$

(١) $\frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{س + ٨}$ (٢) $\frac{\sqrt[٣]{س} + ٢}{س + ٨}$

(١) $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt{١ - س} - ٣}{س + ٨} \times \frac{\sqrt{١ - س} + ٣}{\sqrt{١ - س} + ٣}$

$$= \lim_{س \to -٨} \frac{١ - س - ٩}{(س + ٨)(\sqrt{١ - س} + ٣)}$$

$$= \lim_{س \to -٨} \frac{-(س + ٨)}{(س + ٨)(\sqrt{١ - س} + ٣)} = -\frac{١}{٦}$$

(٢) $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{س} + ٢}{س + ٨} \times \frac{\sqrt[٣]{س^٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + (٢)^٢}{\sqrt[٣]{س^٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + (٢)^٢}$

$$= \lim_{س \to -٨} \frac{س + ٨}{(س + ٨)(\sqrt[٣]{س^٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$

$$\therefore \text{النهاية} = \frac{-\frac{١}{٦}}{\frac{١}{١٢}} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$$

---

(٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} + ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢}{(س - ٢)(\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$

$$\therefore \text{النهاية} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

1999

• أوجد $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - \sqrt[٣]{س+٦}}{س - ٢}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢ - \sqrt[٣]{س+٦} + ٢}{س - ٢}$$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} - \lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} - ٢}{س - ٢}$$

(١) (٢)

(١) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س+٢} - ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt{س+٢} + ٢}{\sqrt{س+٢} + ٢}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{(س - ٢)(\sqrt{س+٢} + ٢)}$$

$$= \frac{١}{٤}$$

(٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س+٦} + ٢}{س - ٢} \times \frac{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}{\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤}$

$$= \lim_{س \to ٢} \frac{س + ٢}{(س - ٢)(\sqrt[٣]{(س+٦)^٢} - ٢\sqrt[٣]{س+٦} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{١٢}$$

$$\therefore \text{النهاية} = \frac{١}{٤} - \frac{١}{١٢} = \frac{٢}{١٢} = \frac{١}{٦}$$

٢١

NOTE BOOK

منصة القلم التعليمية QALAM EDUCATION

● أوجد نهـا $\frac{س^3 - 3س - 2}{س^3 + 6س - 2}$ عندما $س \to 2$

$= نهـا \frac{\frac{س^3 - 3س - 2}{س - 2}}{\frac{س^3 + 6س - 2}{س - 2}}$ ①

② نهـا $س^3 + 6س - 2$ عندما $س \to 2$

① نهـا $\frac{س^3 - 3س - 2}{س - 2}$ عندما $س \to 2$

	1	0	-3	-2
2		2	4	2
	1	2	1	صفر

$\therefore$ نهـا $س^2 + 2س + 1 = 9$ عندما $س \to 2$

② نهـا $\frac{س^3 + 6س - 2}{س - 2}$ عندما $س \to 2$ $\times \frac{(س^3 + 6س)^2 + 2(س^3 + 6س) + 4}{(س^3 + 6س)^2 + 2(س^3 + 6س) + 4}$

$= نهـا \frac{س^3 + 6 - 8}{(س - 2)((س^3 + 6س)^2 + 2(س^3 + 6س) + 4)}$ عندما $س \to 2$

$= \frac{1}{12}$

$\therefore$ النهاية $= \frac{9}{\frac{1}{12}} = 9 \times 12 = 108$

● أوجد نهـا $\frac{\sqrt[3]{س^2 + 2} - 2}{س - 8}$ عندما $س \to 8$

$= نهـا \frac{\sqrt[3]{س^2 + 2} - 2}{س - 8} \times \frac{\sqrt[3]{(س^2 + 2)^2} + 2\sqrt[3]{س^2 + 2} + 4}{\sqrt[3]{(س^2 + 2)^2} + 2\sqrt[3]{س^2 + 2} + 4}$ عندما $س \to 8$

$= نهـا \frac{س^2 + 2 - 8}{(س - 8)(\sqrt[3]{(س^2 + 2)^2} + 2\sqrt[3]{س^2 + 2} + 4)}$ عندما $س \to 8$

$= نهـا \frac{س + 2}{(\sqrt[3]{(س^2 + 2)^2} + 2\sqrt[3]{س^2 + 2} + 4)}$ عندما $س \to 8$

$= \frac{10}{12 \times 4} = \frac{1}{8}$

٧ نهايات الأسس

$* \frac{(هـ(س))^ن}{(هـ(س))^ن} = \left(\frac{هـ(س)}{هـ(س)}\right)^ن$

● أوجد نهـا $\frac{(س - 5)^7}{(س^2 - 25)^7} = \frac{صفر}{صفر}$ عندما $س \to 5$

$= نهـا \left(\frac{س - 5}{س^2 - 25}\right)^7 = نهـا \left(\frac{س - 5}{(س - 5)(س + 5)}\right)^7$ عندما $س \to 5$

$= نهـا \left(\frac{1}{س + 5}\right)^7 = \left(\frac{1}{10}\right)^7 = \frac{1}{(10)^7}$ عندما $س \to 5$

● أوجد نهـا $\frac{\sqrt[7]{س - 1} - 3}{س - 1} = \frac{صفر}{صفر}$ عندما $س \to 1$

$= نهـا \frac{\sqrt[7]{س - 1} - 3}{س - 1} = نهـا \frac{\sqrt[7]{س - 1} - 3}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}$ عندما $س \to 1$

$= \frac{3}{7}$

٨ نهايات المشتقة

$* \frac{(هـ(س))^ن}{(هـ(س))^ل} = (هـ(س))^{ن - ل}$

● أوجد نهـا $\frac{\sqrt[7]{س^2 - 1} - 1}{س - 1} = \frac{صفر}{صفر}$ عندما $س \to 1$

$= نهـا \frac{\sqrt[7]{س^2 - 1} - 1}{\sqrt[7]{س^4 - 1} - 1}$ عندما $س \to 1$

$\therefore$ نهـا $\frac{ص^2 - 1}{ص^4 - 1}$ عندما $ص \to 1$ $(س = ص^7)$

$= نهـا \frac{(ص - 1)(ص + 1)}{(ص - 1)(ص^3 + ص^2 + ص + 1)}$ عندما $ص \to 1$

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: التفاضل (الرياضيات) Date:

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص^{\frac{2}{7}})^{\frac{3}{7}} - 1}{ص^{\frac{3}{7}} - 1} = \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص^2 - 1}{ص^3 - 1}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص-1)(ص+1)}{(ص-1)(ص^2+ص+1)} = \frac{2}{3}$$

● أوجد نها $\frac{\sqrt[3]{س} - 1}{\sqrt{س} - 1}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - 1}{س^{\frac{1}{2}} - 1}$$

$س = ص^6$ ، $س \to 1 \Leftarrow ص \to 1$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص^6)^{\frac{1}{3}} - 1}{(ص^6)^{\frac{1}{2}} - 1} = \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص^2 - 1}{ص^3 - 1}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص-1)(ص+1)}{(ص-1)(ص^2+ص+1)} = \frac{2}{3}$$

● أوجد نها $\frac{\sqrt[3]{س} - 1}{س - 1}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - 1}{س - 1}$$

$س = ص^3$ ، $ص \to 1 \Leftarrow س \to 1$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص - 1}{ص^3 - 1}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص-1)}{(ص-1)(ص^2+ص+1)} = \frac{1}{3}$$

● أوجد نها $\frac{\sqrt[3]{س} - \sqrt[4]{س}}{س - 1}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$= \text{نها}_{س \to 1} \frac{س^{\frac{1}{3}} - س^{\frac{1}{4}}}{س - 1}$$

$س = ص^{12}$ ، $ص \to 1 \Leftarrow س \to 1$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{(ص^{12})^{\frac{1}{3}} - (ص^{12})^{\frac{1}{4}}}{(ص^{12}) - 1}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص^4 - ص^3}{ص^6 - 1}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 1} \frac{ص^3 (ص-1)}{(ص-1)(ص^5+ص^4+ص^3+ص^2+ص+1)} = \frac{1}{6}$$

● أوجد نها $\frac{\sqrt[4]{8س} - 2}{\sqrt[5]{16س} - 2}$ $\leftarrow$ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\text{نها}_{ص \to 2} \frac{\frac{\sqrt[4]{8س} - 2}{س - 2}}{\frac{\sqrt[5]{16س} - 2}{س - 2}} \leftarrow \begin{matrix} ص^4 = 8س \\ ص^5 = 16س \end{matrix}$$

$$\text{نها}_{ص \to 2} \frac{\frac{ص - 2}{\frac{ص^4}{8} - 2}}{\frac{ص - 2}{\frac{ص^5}{16} - 2}} = \text{نها}_{ص \to 2} \frac{\frac{ص - 2}{\frac{ص^4 - 16}{8}}}{\frac{ص - 2}{\frac{ص^5 - 32}{16}}} = \text{نها}_{ص \to 2} \frac{\frac{8(ص-2)}{ص^4 - 16}}{\frac{16(ص-2)}{ص^5 - 32}}$$

$$= \text{نها}_{ص \to 2} \frac{8(ص-2)}{(ص-2)(ص+2)(ص^2+4)} \times \frac{(ص-2)(ص^4+ص^3+ص^2+ص+1)}{16(ص-2)}$$

$$= \frac{8 \times 80}{32 \times 16} = \frac{10}{8}$$

● أوجد نها $\frac{\sqrt{س^2 - 1} + \sqrt{س - 1}}{\sqrt{س - 1}}$

$س \to 1^+$

$$= \text{نها}_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{(س-1)(س+1)} + \sqrt{(س-1)}}{\sqrt{(س-1)}}$$

$$= \text{نها}_{س \to 1^+} \frac{\sqrt{(س-1)} \times (\sqrt{س+1} + 1)}{\sqrt{(س-1)}} = \sqrt{2} + 1$$

NOTE BOOK
منصة التعليمية AL-SALLAM EDUCATION

سؤال الدين (المتجه)

• $\lim_{س\to 1} \frac{س^{ن}-1}{س-1}$ ، $ن \neq 1$ تساوي $ن$

$س-1=0 \Leftarrow س=1$

$\lim_{س\to 1} \frac{س-1}{س-1}$ غير موجودة.

$\lim_{س\to 1} \frac{1}{س-1}$ غير موجودة.

∴ $\lim_{س\to 1}$ ق(س) غير موجودة.

توضيح

- فردي ← $\lim_{س\to 1} \frac{س^{ن}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س^{٥}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س^{٣}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س+1}{س-1}$
  - $= ٥^{٢}$
- زوجي ← $\lim_{س\to 1} \frac{س^{ن}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س^{٢}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س^{٤}-1}{س-1}$ ← زوجي ← $\lim_{س\to 1} \frac{س^{ن}-1}{س-1}$
  - $\lim_{س\to 1} \frac{س^{٢}-1}{س-1}$ ← غير موجودة
  - $\lim_{س\to 1} \frac{(س^{٢}-1)}{(س-1)}$ ← $\lim_{س\to 1} \frac{س+1}{س-1}$
  - $= ٢^{٧}$

• إذا كانت $\lim_{س\to ٣} \frac{س^{٢}+ب س+٥}{س-٣}$ موجودة جد قيم (ب) ؟؟

← تعويض المقام بساوي صفر ← بساوي لبسط الصفر

← $٩+٣ب+٥=0$ ← صفر ← $ب = -\frac{٩}{٣}$

• إذا علمت أن $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}+ب س-٧}{س-١} = جـ$ أوجد قيمة كل من ب ، جـ ، $٢ب+٣جـ$ ؟؟

← $(١)^{٣}+ب-٧=0$ ← صفر ← $ب=٦$

← $\lim_{س\to ١} \frac{س^{٣}+٦س-٧}{س-١} = جـ$

← $\lim_{س\to ١} \frac{(س+٧)(س-١)}{(س-١)} = جـ$ ← $جـ=٨$

← $٢ب+٣جـ=١٢+٢٤=٣٦$

• إذا كانت $\lim_{س\to ٣} \frac{س^{٢}+٣}{س-١} = ١٠$ فجد قيمة ؟

← $٣+٣جـ=١١$ ← $٣جـ=٨$ ← $جـ=٤$

• إذا علمت أن $\lim_{س\to ٣} \frac{س^{٢}-(٣-٢جـ)س-٦جـ}{س-٣} = ١١$ جد جـ ؟؟

← $\lim_{س\to ٣} \frac{(س-٢)(س+٣جـ)}{(س-٣)} = ١١$

← $\lim_{س\to ٣} \frac{س^{٢}-٧}{س-٣} = ١٠$ ← $\frac{٩+٣ب-٧}{0} = ١٠$ ← $٢+٣ب=٢٠$

← $٣ب=١٨$ ← $ب=٦$

• إذا علمت أن $\lim_{س\to ٥} \frac{س^{٢}-ب}{س-٥} = ١٠$ جد ب.

- ناتج تعويض المقام = صفر فإنه لتعويض البسط يساوي صفر.

← $٢٥-ب=0$ ← صفر ← $ب=٢٥$

٩ الثوابت

• إذا كانت النهاية موجودة وكان المقام يساوي صفر فإنه البسط يساوي صفر.

- إذا كان جذري البسط والمقام متماثلين وفردي نوعي الجذر
- إذا كان الجذر زوجي والجهة مختلفة أو اليسار نوعي الجذر
- إذا كان الجذر زوجي والجهة غير مختلفة نوعي الجذر وقوة تكون النهاية غير موجودة.

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● نهـا $\frac{3س^2 - (6-م)س - 32}{س^2 - 4}$ = -2، جد م؟
س←2

← نهـا $\frac{(س-2)(3س+م)}{(س-2)(س+2)}$ = -2
س←2

= $\frac{6+م}{4}$ = -2 ← 6+م = -8 ← م = -14

● إذا كانت نهـا $\frac{2س^2 - (2+م)س + 3}{س-1}$ = 10
س←1

← إذا عوضنا في البسط بالرقم 1 سيكون الناتج صفر = صفر. اذن الطريقة لا تصلح. إذن الحل سيكون ...

نهـا $\frac{(س-1)(2س-م)}{(س-1)}$ = 10
س←1

← 2-م = 10 ← م = -8

● إذا علمت أن نهـا $\frac{س^2 + ب س + م}{س-2}$ = 4
س←2

جد قيمة م، ب ؟

- الحل: ← 4+2ب+م = صفر ← 2ب+م = -4 ... ①

	١	ب	م
؟	٢	٢+ب	4+2ب
	١	صفر	

س+(2+ب) = 4 ←

← 4+ب = 4 ← ب = صفر

← بالتعويض في ① ← م = -4

١٠ نظرية الساندويش

● إذا كانت ق ≤ نهـا د(س) ≤ م بإيجاد نهـا د(س) = م
س←ج س←ج

● إذا كان $\frac{س^2 - 9}{س - 3}$ ≤ د(س) ≤ 2س ،
أوجد نهـا د(س) ؟
س←3

- الحل: نهـا $\frac{س^2 - 9}{س - 3}$ ≤ نهـا د(س) ≤ نهـا 2س
س←3 س←3 س←3

← نهـا (س+3)(س-3)/(س-3) ≤ نهـا د(س) ≤ 6
س←3 س←3

← نهـا س+3 ≤ نهـا د(س) ≤ 6
س←3 س←3

← 6 ≤ نهـا د(س) ≤ 6 ← نهـا د(س) = 6
س←3 س←3

● إذا علمت أن (2س^2 - 9) ≤ د(س) ≤ 3س
فجد نهـا (2د(س) + 3س)
س←3

- الحل: نهـا (2س^2 - 9) ≤ نهـا د(س) ≤ نهـا 3س
س←3 س←3 س←3

← 9 ≤ نهـا د(س) ≤ 9
س←3

← نهـا د(س) = 9 ← نهـا (2د(س) + 3س) = 27
س←3 س←3

● أثبت أن نهـا س^2 جا $\frac{1}{س}$ = صفر
س←صفر

- الحل: ← -1 ≤ جا $\frac{1}{س}$ ≤ 1

← بالضرب في س^2

← نهـا -س^2 ≤ نهـا س^2 جا $\frac{1}{س}$ ≤ نهـا س^2
س←صفر س←صفر س←صفر

← صفر ≤ نهـا س^2 جا $\frac{1}{س}$ ≤ صفر
س←صفر

جا، جتا
قصد زيرو
-1 ، 1

NOTEBOOK
منصة العلم التعليمية AL-OALLAM EDUCATION

• نهـا $\frac{1}{س}$ جا$\frac{1}{س}$ = صفر
س ← ∞

الاختبار

• إذا علمت أن نهـا $\frac{س-٣}{س^{٢}+ب س+ب}$ = ١٦ ، فجد قيمة ب ؟ ب = ٩
س ← ٣
غير موجودة ، أوجد قيم ب ، ب.
(ب = ٦ ، ب = -٩)

• إذا كانت نهـا $\frac{س^{٢}-ب س+ب}{س-٥}$ = ٨ ، فجد نهـا $\frac{س^{٢}-١}{س+٤-\frac{٩}{٥}}$ ؟ $\left(\frac{-٥٠}{٩}\right)$
س ← ٥ ، س ← ١
أوجد قيم ب ، ب.
(ب = ٢ ، ب = -١٥)

• جد نهـا $\frac{\sqrt{٥-٣س}-٢}{١-\sqrt{س}}$ ؟ $\left(\frac{١}{٢}\right)$
س ← ١

• جد نهـا $(س-٥)\left(\frac{٧س^{٢}-٢٨}{س^{٢}-٢٥}\right)$
س ← ٥
$\left(\frac{-٢٨}{١٠}\right)$.

• جد نهـا $\frac{\sqrt{٣س+١}-٢}{س^{٢}-١}$ ؟ $\left(\frac{٣}{٨}\right)$
س ← ١

• جد نهـا $\frac{\sqrt{٣س^{٢}-٢س}-٣\sqrt{س}+٢}{س-١}$ ؟ $\left(\frac{-٥}{١٢}\right)$
س ← ١

• جد نهـا $\frac{\sqrt[٣]{٥+س}+س+٨}{س-١}$ ؟ $\left(\frac{١}{٧٢}\right)$
س ← ١

• جد نهـا $\frac{\sqrt{س}}{(٤+\sqrt{٤س}-٣)^{٢}}$ ؟ (٤)
س ← ٠+

• إذا علمت أن نهـا $\frac{س-٣}{\sqrt{س^{٢}+ب س+ب}-٤}$ = ٨ ، فجد قيمة ب ؟ ب = ٩
س ← ٣
غير موجودة ، أوجد قيم ب ، ب.
(ب = ٦ ، ب = -٩)

• إذا علمت أن نهـا $\frac{٣س^{٢}+٨ب-٤س(ب+١)}{(٣س-٤)(س-٢)}$
س ← ٢

• جد نهـا $\frac{\sqrt{٣س+١٠}-\sqrt{س+١٣}}{س-٣}$ ؟ $\frac{١}{٨}$
س ← ٣

نهايات الاقترانات الدائرية

• نهـا $\frac{جا س}{س}$ = ١
س ← ٠

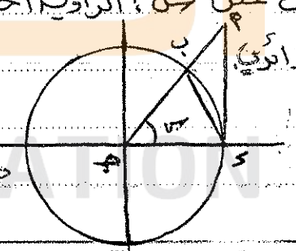
- البرهان :

* مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

* مساحة المثلث المساوي للساقين = $\frac{١}{٢}$ × حاصل ضرب ضلعين متجاورين × جا الزاوية المحصورة

* مساحة القطاع الدائري = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} س ، حيث تمثل س : الزاوية المحصورة بالتقدير الدائري

ب جـ = جـ د = ١



القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION
NOTEBOOK

ΔABC مساحة قطاع دائري $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \text{جا} س < \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times س < \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \text{ظا} س$

$\frac{1}{2} \text{جا} س < \frac{1}{2} س < \frac{1}{2} \text{ظا} س$

$\Leftarrow$ نقسم على $\frac{1}{2} \text{جا} س$:

$1 < \frac{س}{\text{جا} س} < \frac{\text{ظا} س}{\text{جا} س} \Leftarrow 1 < \frac{س}{\text{جا} س} < \frac{1}{\text{جتا} س}$

$\Leftarrow$ نقلب المتباينة:

$1 > \frac{\text{جا} س}{س} > \text{جتا} س$

$\Leftarrow$ نأخذ النهاية:

$\text{نها}_{س \to 0} 1 > \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} > \text{نها}_{س \to 0} \text{جتا} س$

$1 > \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} > 1$

$\Leftarrow$ حسب نظرية السانديش:

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} = 1$

● $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} = 1 \Leftrightarrow \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} = 1$

● $\text{نها}_{س \to \pi} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{\text{جا} \pi}{\pi} =$ صفر

● بيّن أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(أس)}{أس} = 1$

- البرهان:

نفرض ص $= أس \Leftarrow$ س $= 0$ ، ص $\to 0$

$\Leftarrow \text{نها}_{ص \to 0} \frac{\text{جا} ص}{ص} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} = 1$ #

● بيّن أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

- البرهان:

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} أس}{ب س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} أس}{أس} \times \frac{أس}{ب س} = 1 \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ}{ب}$ #

● بيّن أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} أس}{ب س} = \frac{أ}{ب}$

- البرهان:

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} أس}{ب س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا} أس}{\text{جتا} أس}}{ب س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} أس}{ب س \times \text{جتا} أس}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} أس}{أس} \times \frac{أس}{ب س} \times \frac{1}{\text{جتا} أس} = 1 \times \frac{أ}{ب} \times \frac{1}{\text{جتا}(0)} = 1 \times \frac{أ}{ب} \times 1 = \frac{أ}{ب}$ #

● بيّن أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 أس}{\text{جا}^2 ب س} = \frac{أ^2}{ب^2}$

- البرهان:

$\text{نها}_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا}^2 أس}{أس^2} \times أس^2 \div \frac{\text{جا} ب س}{ب س} \times ب س \right)$

$= \frac{أ^2 س}{ب^2 س} = \frac{أ^2}{ب^2}$

● بيّن أن $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} = 1$

- البرهان:

$\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س}}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س \text{جتا} س} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا} س}{س} \times \frac{1}{\text{جتا} س}$

$= 1 \times \frac{1}{\text{جتا}(0)} = 1 \times 1 = 1$ #

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

• $\lim_{س\to0} \frac{ظا ٣س}{ظا ٢س} = 1$

• $\lim_{س\to0} \frac{٢س}{ظا ب س} = \frac{٢}{ب}$

• $\lim_{س\to0} \frac{جا ٢س}{ظا ب س} = \frac{٢}{ب}$

• $\lim_{س\to0} \frac{جا ٣س}{٤س}$ ← يُحل بطريقتين...

(١) $\lim_{س\to0} \frac{جا ٣س}{٤س} \times \frac{\frac{٣س}{٣س}}{\frac{٣س}{٣س}} = \lim_{س\to0} \frac{١ \times ٣س}{٤س} = \frac{٣}{٤}$

(٢) $\lim_{س\to0} \frac{جا ٣س}{٤س}$ ← $ص = ٣س$ ← $س = \frac{ص}{٣}$ ← $\lim_{ص\to0} \frac{ص}{\frac{٤ص}{٣}} = \frac{٣}{٤}$ حاص

• $\lim_{س\to0} \frac{ظا ١٠س}{٥س}$

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا ١٠س}{٥س} \times \frac{\frac{١٠س}{١٠س}}{\frac{٥س}{١٠س}} = \frac{١٠س}{٥س} = ٢$

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا ١٠س}{٥س}$ ← $ص = ١٠س$ ← $س = \frac{ص}{١٠}$ ← $\lim_{ص\to0} \frac{ظاص}{\frac{٥ص}{١٠}} = ٢$

• $\lim_{س\to1} \frac{جا(س-١)}{س-١}$ ← $ص = س-١$ ← $س = ١ + ص$ ← $\lim_{ص\to0} \frac{جاص}{ص} = ١$

• $\lim_{س\to٧} \frac{جا(س-٧)}{(س-٧)} = ١$

• $\lim_{س\to1} \frac{جا(س^٢-١)}{س-١}$

$= \lim_{س\to1} \frac{جا(س^٢-١)}{س^٢-١} \times (س^٢-١)$

• أوجد $\lim_{س\to٤} \frac{جا(١٨س-٢)}{س-٤}$

الحل: $\lim_{س\to٤} \frac{جا(١٨س-٢)}{١٨س-٢} \times (١٨س-٢)$

$= \lim_{س\to٤} \frac{١٨س-٢}{س-٤} = \lim_{س\to٤} \frac{١٨(س-٤)}{س-٤} = ١٨$

$= ١ + ١ = ٢$

• أوجد $\lim_{س\to٤} \frac{جا(١٨س-٢)}{س-٤}$

الحل: $\lim_{س\to٤} \frac{جا(١٨س-٢)}{١٨س-٢} \times (١٨س-٢)$

$= \lim_{س\to٤} \frac{١٨س-٢}{س-٤} = \lim_{س\to٤} \frac{١٨(س-٤)}{س-٤} = ١٨$

• أوجد $\lim_{س\to0} \frac{جا(ظا ٥س)}{س}$

الحل: $\lim_{س\to0} \frac{جا(ظا ٥س)}{ظا ٥س} \times ظا ٥س$

$= \lim_{س\to0} \frac{ظا ٥س}{س} = ٥$

• أوجد $\lim_{س\to٢} \frac{جا(س^٢-٤)}{ظا(س^٣-٨)}$

الحل: $\lim_{س\to٢} \frac{جا(س^٢-٤)}{س^٢-٤} \times \frac{س^٢-٤}{ظا(س^٣-٨)} \times \frac{س^٣-٨}{س^٣-٨}$

$= \lim_{س\to٢} \frac{س^٢-٤}{س^٣-٨} = \lim_{س\to٢} \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)} = \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

• أوجد $\lim_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{\pi^٢-س^٢}$

الحل: $\lim_{س\to\pi} \frac{جا(\pi-س)}{\pi-س} \times \frac{(\pi-س)}{(\pi-س)(\pi+س)}$

$= \frac{١}{٢\pi}$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

٠٧٨ ٨٩٨٢٨٠٦ سعد الدين البستنجي ٠٧٩ ٥٤٤٠٥٤٤

subject: Date:

$$\text{نها}_{س\to\pi} \frac{س-\pi}{س^2-\pi^2} = \text{نها}_{س\to\pi} \frac{(س-\pi)}{(س+\pi)(س-\pi)} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\text{نها}_{س\to\pi} \frac{1}{س+\pi} = \frac{1}{\pi+\pi} = \frac{1}{2\pi}$$

● أوجد $\text{نها}_{س\to0} \frac{\text{جا}2س + \text{ظا}5س}{6س}$ تساوي؟

$$\text{نها} = \text{نها}_{س\to0} \frac{\text{جا}3س}{6س} + \frac{\text{ظا}5س}{6س} = \frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{8}{6}$$

● نها $\frac{\text{جا}5س + \text{ظا}7س}{3س + \text{جا}2س}$ تساوي؟ $س\to0$

$$\text{نها} = \frac{\frac{\text{جا}5س}{5س}\times5س + \frac{\text{ظا}7س}{7س}\times7س}{3س + \frac{\text{جا}2س}{2س}\times2س}$$

$$\text{نها} = \frac{5 + 7}{3 + 2} = \frac{12}{5}$$

● أوجد نها $\frac{7س}{\text{جا}2س + \text{ظا}4س}$ $س\to0$

$$\text{نها} = \frac{7س}{\frac{\text{جا}2س}{2س}\times2س + \frac{\text{ظا}4س}{4س}\times4س}$$

$$\text{نها} = \frac{7س}{2س + 4س} = \text{نها} \frac{7س}{6س} = \frac{7}{6}$$

● نها $\frac{\text{جا}5س + \text{ظا}4س}{3س^2 + \text{جا}3س}$ تساوي؟ $س\to0$

$$\text{نها} = \frac{\frac{\text{جا}5س}{5س}\times5س + \frac{\text{ظا}4س}{4س}\times4س}{3س^2 + \frac{\text{جا}3س}{3س}\times3س}$$

$$\text{نها} = \frac{5 + 4}{0 + 3} = \text{نها} \frac{9}{3(3+3)} = 3$$

● أوجد نها $\frac{\text{جا}^2 3س + \text{ظا}^2 2س}{7س^2 + \text{جا}^2 5س}$ $س\to0$

$$\text{نها} = \frac{\text{جا}3س \times \text{جا}3س + \text{ظا}2س \times \text{ظا}2س}{7س^2 + \text{جا}5س \times \text{جا}5س}$$

$$\text{نها} = \frac{\frac{\text{جا}3س}{3س}\times\frac{\text{جا}3س}{3س}\times3س\times3س + \frac{\text{ظا}2س}{2س}\times\frac{\text{ظا}2س}{2س}\times2س\times2س}{7س^2 + \frac{\text{جا}5س}{5س}\times\frac{\text{جا}5س}{5س}\times5س\times5س}$$

$$\text{نها} = \frac{9 + 4}{7 + 25} = \frac{13}{32}$$

تمارين بجلد ٢

* $\text{قا}س = \frac{1}{\text{جتا}س}$ * $\text{قتا}س = \frac{1}{\text{جا}س}$

● أوجد نها $5س(\text{قتا}3س + \text{ظتا}7س)$ $س\to0$

الحل:

$$\text{نها} = \text{نها}_{س\to0} \left(\frac{1}{\text{جا}3س} + \frac{1}{\text{ظا}7س}\right)\frac{5س}{5س}$$

$$\text{نها} = \left(\frac{5س}{\text{جا}3س} + \frac{5س}{\text{ظا}7س}\right) = \frac{5}{3} + \frac{5}{7}$$

● أوجد نها $\frac{2س^2 + س\,\text{ظا}2س}{\text{جا}^2 س}$ $س\to0$

الحل:

$$\text{نها} = \frac{\frac{2س^2}{س\times س} + \frac{س\,\text{ظا}2س}{س\times س}}{\frac{\text{جا}س}{س}\times\frac{\text{جا}س}{س}}$$

$$\text{نها} = \frac{2 + 2}{1} = 4$$

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

● أوجد $\lim_{س\to 0} \frac{جا^٤س}{س^٣ - س^٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

- الحل: * بالقسمة على $س^٢$:

$$\lim_{س\to 0} \frac{\frac{جا^٤س \times جا^٤س}{س \times س}}{\frac{س^٢(س-١)}{س^٢}} = \frac{٤ \times ٤}{-١} = -١٦$$

متطابقة

* $جا^٢س = ١ - جتا^٢س$ * $جتا^٢س = ١ - جا^٢س$

● أوجد $\lim_{س\to 0} \frac{جا^٢س}{قاس - ١}$

- الحل:

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا^٢س}{\frac{١}{جتاس} - ١} = \lim_{س\to 0} \frac{جتاس جا^٢س}{١ - جتاس}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جتاس(١ - جتا^٢س)}{١ - جتاس}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جتاس(١ - جتاس)(١ + جتاس)}{(١ - جتاس)}$$

$$= ١ + ١ = ٢$$

● ما قيمة $\lim_{س\to 0} \frac{١ - جا^٢س - جتا^٢س}{٤س}$

- الحل:

$$= \lim_{س\to 0} \frac{١ - جتا^٢س - جا^٢س}{٤س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا^٢س}{٤س} - \frac{جا^٢س}{٤س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس \, جاس}{٤س} - \frac{جا^٢س}{٤س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جاس \, جاس}{٤س} - \frac{جا^٢س}{٤س}$$

$$= \lim_{س\to 0} \frac{جا^٢س}{٤س} = \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١}{٤} \, جا صفر = \frac{٢}{٤} = -\frac{١}{٢}$$

● أثبت أن $\lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جاس - ١}{٤ جتا^٢س - ٣} = -\frac{١}{٣}$

- الحل:

$$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جاس - ١}{٤ - ٤جا^٢س - ٣} = \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{٢جاس - ١}{١ - ٤جا^٢س}$$

$$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{-١}{(١ - ٢جاس)(١ + ٢جاس)} = \lim_{س\to \frac{\pi}{٢}} \frac{-١}{١ + ٢جاس} = -\frac{١}{٣}$$

متطابقة

* $١ - جا٢س = (جتاس - جاس)^٢ = (جاس - جتاس)^٢$

● أوجد $\lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - جا٢س}{جتاس - جاس}$

- الحل:

$$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{(جتاس - جاس)^٢}{جتاس - جاس} = \lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} جتاس - جاس$$

$$= جتا\frac{\pi}{٤} - جا\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = صفر$$

● أوجد $\lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{١ - جا٢س}{جاس - جتاس}$

- الحل:

$$= \lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} \frac{(جاس - جتاس)^٢}{جاس - جتاس} = \lim_{س\to \frac{\pi}{٤}} جاس - جتاس$$

$$= جا\frac{\pi}{٤} - جتا\frac{\pi}{٤} = صفر$$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: "المعرفة الرياضيات" Date:

متطابقة

* $1 - \text{جتا}2س = 2\text{جا}^2 س$
* $1 - \text{جتا}2س = 2\text{جا}^2 س$
* $\text{جتا}س - 1 = -2\text{جا}^2 \frac{س}{2}$
* $1 - \text{جتا}6س = 2\text{جا}^2 3س$
* $\text{جتا}2س - 1 = -2\text{جا}^2 س$
* $1 - \text{جتا}س = 2\text{جا}^2 \frac{س}{2}$

● $\text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}8س}{5س^2}$ تساوي ...

- الحل:

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{2\text{جا}^2 4س}{5س^2} = \text{نها}_{س \to 0} \frac{2\text{جا}4س \times \text{جا}4س}{5س \times س}$

$= 2 \times \frac{4}{5} \times 4 = \frac{32}{5}$

● أوجد $\text{نها}_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}س}{س^2}$

- الحل:

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{2\text{جا}^2 \frac{س}{2}}{س^2}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{2\text{جا}\frac{س}{2} \times \text{جا}\frac{س}{2}}{س \times س}$

$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ملاحظة:

* $\text{جا}\pi = \text{صفر}$
* $\text{جتا}\pi = -1$
* $\text{جا}\frac{\pi}{2} = 1$
* $\text{جتا}\frac{\pi}{2} = \text{صفر}$

* $\text{جا}(\text{صفر}) = \text{صفر}$ أو $\text{جا}2\pi = \text{صفر}$
* $\text{جتا}(\text{صفر}) = 1$ أو $\text{جتا}2\pi = 1$

متطابقات

* $\text{جا}(س + ص) = \text{جا}س \text{جتا}ص + \text{جتا}س \text{جا}ص$
* $\text{جا}(س - ص) = \text{جا}س \text{جتا}ص - \text{جتا}س \text{جا}ص$
* $\text{جتا}(س + ص) = \text{جتا}س \text{جتا}ص - \text{جا}س \text{جا}ص$
* $\text{جتا}(س - ص) = \text{جتا}س \text{جتا}ص + \text{جا}س \text{جا}ص$

● $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(س + \pi)}{س}$ تساوي ...

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س \text{جتا}\pi + \text{جتا}س \text{جا}\pi}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{-\text{جا}س}{س} = -1$

● $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}(س + \frac{\pi}{2})}{س}$ تساوي ...

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جتا}س \text{جتا}\frac{\pi}{2} - \text{جا}س \text{جا}\frac{\pi}{2}}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{-\text{جا}س}{\text{جا}س} = -1$

● $\text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}(س + 2\pi)}{س}$ تساوي ...

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س \text{جتا}2\pi + \text{جتا}س \text{جا}2\pi}{س}$

$= \text{نها}_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س} = 1$

• أوجد $\lim_{س \to \pi^2} \frac{جاس}{س - \pi^2}$

- الحل:

نفرض ص = س - π^2

$\Leftarrow$ س = ص + π^2 .

$\Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{جا(ص + \pi^2)}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جاص جتا\pi^2 + جتاص جا\pi^2}{ص}$

$= \lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{ص} = 1$.

متطابقة

* $جاس = جا(\pi - س)$

* $جتاس = جا(\frac{\pi}{2} - س)$

• $\lim_{س \to \pi} \frac{جاس}{س - \pi}$ لماذا ؟

$\Leftarrow \lim_{س \to \pi} \frac{جا(\pi - س)}{س - \pi}$ ، ص = π - س ، س $\to \pi$ ، ص $\to 0$

$\Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{ص} = 1$

• $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتاس}{\frac{\pi}{2} - س}$ لماذا ؟...

1998

$\Leftarrow \lim_{ن \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{\frac{\pi}{2} - س} \Leftarrow \lim_{ص \to 0} \frac{جاص}{ص}$

$= 1$

• $\lim_{س \to 2} \frac{جتا(\frac{\pi}{2} س)}{س - 2}$ لماذا ؟...

- الحل: * $جتا س = جا(\frac{\pi}{2} - س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} س)}{س - 2}$

$\Leftarrow \lim_{س \to 2} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} س)}{-\frac{\pi}{2}(2 - س)}$

$= \lim_{ص \to 2} \frac{1}{س - 2} \times \frac{-\frac{\pi}{2}س - \pi}{\frac{\pi}{2}س}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{-\pi(س - 2)}{(\frac{\pi}{2}س)(س - 2)} = \frac{\pi}{4}$

• $\lim_{س \to 0} \frac{جا\pi س}{س - 1}$

م) خطأ ب) أ ح) π د) $-\pi$

• $\lim_{س \to 1} \frac{جا\pi س}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{جا(\pi - \pi س)}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{جا(\pi - \pi س)}{(\pi - \pi س)} \times \frac{(\pi - \pi س)}{س - 1}$

$= \lim_{س \to 1} \frac{\pi - \pi س}{س - 1} = \lim_{س \to 1} \frac{\pi(1 - س)}{س - 1}$

$= -\pi$

متطابقات

* $جاس + جاص = 2جا(\frac{س + ص}{2}) جتا(\frac{س - ص}{2})$

* $جاس - جاص = 2جتا(\frac{س + ص}{2}) جا(\frac{س - ص}{2})$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

Saed el-Dein Bustanji ← 0795420542 ، 0788982806

subject: Date:

* جتا س + جتا ص = ٢ جتا ((س + ص)/٢) جتا ((س − ص)/٢)

* جتا س − جتا ص = −٢ جا ((س + ص)/٢) جا ((س − ص)/٢)

● أوجد نها (س ← أ) (جا ٨س − جا ٨أ) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا ((٨س + ٨أ)/٢) جا ((٨س − ٨أ)/٢) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا (٤س + ٤أ) جا (٤س − ٤أ) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا (٤(س + أ)) × جا (٤(س − أ)) / (س − أ)

= ٢ × جتا ٨أ × ٤ = ٨ جتا ٨أ

● أوجد نها (س ← ٠) (جتا ٦س − جتا ٢س) / ٥س²

= نها (س ← ٠) (−٢ جا ٤س جا ٢س) / (٥س × س)

= −٢ × ٤/٥ × ٢ = −١٦/٥

● أثبت أن نها (س ← أ) (جا ٢س − جا ٢أ) / (س − أ) = ٢ جتا ٢أ

حيث أ ≠ ...

= نها (س ← أ) ٢ جتا ((٢س + ٢أ)/٢) جا ((٢س − ٢أ)/٢) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا (س + أ) جا (س − أ) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا (س + أ) × جا (س − أ) / (س − أ)

= ٢ جتا (أ + أ) × ١ = ٢ جتا ٢أ #

● أوجد نها (س ← أ) (جا ٥س − جا ٥أ) / (س − أ)

= نها (س ← أ) ٢ جتا ((٥س + ٥أ)/٢) جا ((٥س − ٥أ)/٢) / ((س − أ) × ٥/٢) × ٥/٢

= نها (س ← أ) ٢ جتا ((٥س + ٥أ)/٢) × ٥/٢

= نها (س ← أ) جتا ((٥س + ٥أ)/٢) × ٥ = ٥ جتا (١٠أ/٢) = ٥ جتا ٥أ

● أوجد نها (س ← أ) (جتا ٥س − جتا ٥أ) / (س − أ)

= نها (س ← أ) −٢ جا ((٥س + ٥أ)/٢) جا ((٥س − ٥أ)/٢) / ((س − أ) × ٥/٢) × ٥/٢

= نها (س ← أ) −٢ جا ((٥س + ٥أ)/٢) × ٧/٢ = ٧ جا ٧س.

● أوجد نها (ع ← س) (قا ٥ع − قا ٥س) / (ع − س)

= نها (ع ← س) (١/جتا ٥ع − ١/جتا ٥س) / (ع − س)

= نها (ع ← س) ((جتا ٥س − جتا ٥ع) / (جتا ٥ع جتا ٥س)) / (ع − س)

= نها (ع ← س) (جتا ٥س − جتا ٥ع) / ((جتا ٥ع جتا ٥س)(ع − س))

N O T E B O O K

$= \text{نها} - ٢ \text{جا}\left(\frac{٥س+٥ع}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٥س-٥ع}{٢}\right) \times \frac{٥}{٢}$

$ع \to س$

$= -(\text{جتا}\, ٥س + \text{جتا}\, ٥ع)(ع - س) \times \frac{٥}{٢}$

$= \text{نها} - ٢ \text{جا}\left(\frac{٥س+٥ع}{٢}\right) \times \frac{٥}{٢} \times -١$

$ع \to س$ $\quad$ $\text{جتا}\, ٥ع \, \text{جتا}\, ٥س$

$= \frac{-٢ \text{جا}\, ٥س}{\text{جتا}\, ٥س} \times \frac{-٥}{٢} = ٥ \text{طا}\, ٥س \times \frac{١}{\text{جتا}\, ٥س}$

● أوجد نها $\frac{\text{قتا}\, ٧ع - \text{قتا}\, ٧س}{ع - س}$

$ع \to س$

$= \text{نها} \frac{\frac{١}{\text{جا}\, ٧ع} - \frac{١}{\text{جا}\, ٧س}}{ع - س} = \text{نها} \frac{\text{جا}\, ٧س - \text{جا}\, ٧ع}{\text{جا}\, ٧ع \, \text{جا}\, ٧س \, (ع - س)}$

$ع \to س$

$= \text{نها} \; ٢ \text{جتا}\left(\frac{٧س+٧ع}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{٧س-٧ع}{٢}\right) \times \frac{٧}{٢}$

$ع \to س$ $\quad$ $(\text{جا}\, ٧ع \, \text{جا}\, ٧س)(ع - س) \times \frac{٧}{٢}$

$= \text{نها} \; ٢ \text{جتا}\left(\frac{٧س+٧ع}{٢}\right) \times \frac{٧}{٢} \times ١-$

$ع \to س$ $\quad$ $(\text{جا}\, ٧ع \, \text{جا}\, ٧س)$

$= \frac{٢ \text{جتا}\, ٧س}{\text{جا}\, ٧س \, \text{جا}\, ٧س} \times \frac{-٧}{٢} = \frac{-٧ \, \text{جتا}\, ٧س}{\text{جا}\, ٧س} \times \frac{١}{\text{جا}\, ٧س}$

$= -٧ \, \text{ظتا}\, ٧س \, \text{متا}\, ٧س$

* نها $\frac{\text{جا}\, ٣س}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= ٣ \times$ نها $\frac{\text{جا}\, ٣س}{٣س}$ $\quad$ $٣س \to ٠$

$= ٣ \times ١ = ٣$

* نها $\frac{\text{جا}\, ٥س}{\text{جا}\, ٢س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= \text{نها} \frac{\frac{\text{جا}\, ٥س}{س}}{\frac{\text{جا}\, ٢س}{س}} = \frac{٥}{٢}$

$س \to ٠$

* نها $\frac{\text{جا}\, ٣س}{\text{جا}\, ٥س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= \text{نها} \frac{\frac{\text{جا}\, ٣س}{س}}{\frac{\text{جا}\, ٥س}{س}} = \frac{٣}{٥}$

$س \to ٠$

* نها $\frac{\text{جا}\, ٣س}{\text{جا}\, ٥س}$ $\quad$ $س \to \pi$

$= \text{نها} \frac{\text{جا}(\pi - ٣س)}{\text{جا}(\pi - ٥س)} = \text{نها} \frac{\text{جا}(\pi - ٣س)}{(\pi - ٣س)} \times \frac{(\pi - ٥س)}{\text{جا}(\pi - ٥س)} \times \frac{٣}{٥}$

$س \to \pi$ $\quad$ $(\pi - ٣س) \to ٠$ $\quad$ $(\pi - ٥س) \to ٠$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

* نها $\frac{\text{جا}\, ٣س}{\text{جا}\, ٥س}$ $\quad$ $س \to \pi$

$= \text{نها} \frac{\text{جا}(\pi - ٣س)}{\text{جا}(\pi - ٥س)} = \text{نها} \frac{\text{جا}(\pi - ٣س)}{(\pi - ٣س)} \times \frac{(\pi - ٥س)}{\text{جا}(\pi - ٥س)} \times \frac{٣}{٥}$

$س \to \pi$ $\quad$ $(\pi - ٣س) \to ٠$ $\quad$ $(\pi - ٥س) \to ٠$

$= ١ \times ١ \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$

* نها $\frac{\text{جا}\, س}{(\pi - س)}$ $\quad$ $س \to \pi$

$= \text{نها} - \frac{\text{جا}(\pi - س)}{(\pi - س)}$ $\quad$ $(\pi - س) \to ٠$ $\quad$ $س \to \pi$

$= \text{نها} - \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} = -١$

$ص \to ٠$

نها جاس $= \text{نها} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{(\pi - س)}$

$س \to \pi$ $\quad$ $(\pi - س) \to ٠$ $\quad$ $س \to \pi$

$= \text{نها} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} = ١$

$ص \to ٠$

$\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

* ١ - جا^{٢}س = جتا^{٢}س $\Leftarrow$ ١ - جتا^{٢}س = جا^{٢}س

$\Leftarrow$ |جاس| = جا^{٢}س

* نها $\frac{\text{١ - جتاس}}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= \text{نها} \frac{\text{جا}^٢س}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= \text{نها} \frac{|\text{جاس}|}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$\Leftarrow$ نها $\frac{|\text{جاس}|}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

نها $\frac{\text{جاس}}{س} = ١$ $\quad$ $س \to ٠^+$

نها $\frac{-\text{جاس}}{س} = -١$ $\quad$ $س \to ٠^-$

* ١ - جتا٢س = ٢ جا^{٢}س

* ١ - جتا٦س = ٢ جا^{٢}٣س

* ١ - جتاس = ٢ جا$^٢\frac{س}{٢}$

● أوجد نها $\frac{\text{١ - جتا٢س}}{س^٢}$ $\quad$ $س \to ٠$

(١٩٩٩)

١ (م) $\quad$ ب) -١ $\quad$ ج) صفر $\quad$ د) غير موجودة

$\because$ ١ - جتا٢س = ٢ جا^{٢}س

● نها $\frac{\text{١ + جتاس}}{\text{جاس}}$ $\quad$ $س \to \pi$

م) صفر $\quad$ ب) $\frac{-١}{٢}$ $\quad$ ج) $\frac{١}{٢}$ $\quad$ د) ٢

● توظيف هام جداً:

* نها $\frac{\text{جا}\, ١س}{س}$ $\quad$ $س \to ٠$

$= \text{نها} \frac{\text{جاس}}{س} = ١$ $\quad$ $س \to ٠^+$

$= \text{نها} \frac{-\text{جاس}}{-س} = -١$ $\quad$ $س \to ٠^-$

سعد الدين البستنجي

079/5420542

0788982806

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: "القمة في الرياضيات" Date:

● أوجد نهـا $\frac{٦ - ٦ \text{ جتا}^{٤} س}{س^{٥} \leftarrow ٠}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦(١ - \text{جتا}^{٤} س)^{٢}}{٥ س^{٢}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦ \text{ جا}^{٤} س}{٥ س^{٢}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٦ \text{ جا}^{٤} س}{٥ س} \times \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^{٤} س}{س} = \frac{٦}{٥} \times ٤ \times ٤ = \frac{٩٦}{٥}$

● أوجد نهـا $\frac{١ - \text{جتا}^{٢} س}{١ - \text{جتا}^{٣} س}$ ، $س \leftarrow ٠$

بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{(١ - \text{جتا} س)(١ + \text{جتا} س)}{(١ - \text{جتا} س)(١ + \text{جتا} س + \text{جتا}^{٢} س)}$

$= \frac{١ + ١}{١ + ١ + ١} = \frac{٢}{٣}$

● أوجد نهـا $\frac{\text{ظا} س - \text{جا} س}{س^{٣}}$ ، $س \leftarrow ٠$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} - \text{جا} س}{س^{٣}} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} س - \text{جا} س \text{ جتا} س}{س^{٣} \text{ جتا} س}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} س (١ - \text{جتا} س)}{س^{٣} \text{ جتا} س} \times \frac{١ + \text{جتا} س}{١ + \text{جتا} س}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^{٢} س (١ - \text{جتا}^{٢} س)}{س^{٣} \text{ جتا} س (١ + \text{جتا} س)}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^{٢} س}{س^{٢}} \times \frac{١}{\text{جتا} س (١ + \text{جتا} س)} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

● أوجد نهـا $\frac{\text{جا}^{٣} س}{س^{٣} (١ + \text{جتا} س) \text{ جتا} س}$ ، $س \leftarrow ٠$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}^{٣} س}{س^{٣}} \times \frac{١}{(١ + \text{جتا} س) \text{ جتا} س} = ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

● أوجد نهـا $\frac{\text{جا}٢س - ٢ \text{ جا} س}{س^{٣}}$ ، $س \leftarrow ٠$

* بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ جا} س \text{ جتا} س - ٢ \text{ جا} س}{س^{٣}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{(\text{جتا} س - ١)}{س^{٢}} \times \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} ٢ \text{ جا} س$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ جا} س}{س} \times \frac{-٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س^{٢}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٣ \text{ جا} س}{س} \times \frac{-٢ \text{ جا} \frac{س}{٢} \text{ جا} \frac{س}{٢}}{س \times س}$

$= ٢ \times ١ \times -٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = -١$

● أوجد نهـا $\frac{١ - \sqrt{\text{جتا} س}}{س \text{ جا} س}$ ، $س \leftarrow ٠$

- الحل:

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \sqrt{\text{جتا} س}}{س \text{ جا} س} \times \frac{١ + \sqrt{\text{جتا} س}}{١ + \sqrt{\text{جتا} س}}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \text{جتا} س}{س \text{ جا} س (١ + \sqrt{\text{جتا} س})}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س \text{ جا} س (١ + \sqrt{\text{جتا} س})} = \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} \frac{٢ \text{ جا}^{٢} \frac{س}{٢}}{س \text{ جا} ٢ \frac{س}{٢} (١ + \sqrt{\text{جتا} س})}$

$= \text{نهـا}_{س \leftarrow ٠} ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١ + \sqrt{\text{جتا} س}} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٤}$

منصة العلم التعليمية AL-3ALAM EDUCATION

● أوجد $\lim_{س\to 0} \frac{1-\text{جتا}2س}{س}$

- الحل:

$= \lim_{س\to 0} \frac{1-\text{جتا}2س}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{2\text{جا}^2س}{س}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{2\times|\text{جا}س|}{س} = \lim_{س\to 0^+} \frac{2\times\text{جا}س}{س} = 2$

$= \lim_{س\to 0} \frac{2\times|\text{جا}س|}{س} \rightarrow \lim_{س\to 0^-} \frac{2\times-\text{جا}س}{س} = -2$

∴ النهاية غير موجودة.

● جد $\lim_{س\to \frac{\pi}{2}} \frac{ص}{\text{جا}س}$ ؟ $ص = 2-س$ ، $س = 2-ص$ ، $س\to\frac{\pi}{2}$ ، $ص\to 0$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{ص}{\text{جا}(2-ص)} = \lim_{ص\to 0} \frac{ص}{\text{جا}(2\pi-\pi ص)}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{ص}{\text{جا}2\pi\,\text{جتا}\pi ص - \text{جتا}2\pi\,\text{جا}\pi ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{ص}{-\text{جا}\pi ص} = \frac{-1}{\pi}$

● احسب $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\text{جا}س}{(\pi-2س)^2}$ ؟

- الحل:

نفرض $ص = \pi - 2س \Leftarrow س = \frac{\pi}{2} - \frac{ص}{2}$

$س\to\frac{\pi}{2} \Leftarrow ص\to 0$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{1-\text{جا}(\frac{\pi}{2}-\frac{ص}{2})}{ص^2}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\frac{1}{2}\text{جا}ص + \frac{1}{2}\text{جتا}ص - \frac{1}{2}\text{جتا}ص + \frac{1}{2}\text{جا}ص}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{\text{جا}ص}{ص}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{1-\text{جا}\frac{\pi}{2}\text{جتا}ص - \text{جتا}\frac{\pi}{2}\text{جا}ص}{ص^2}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{1-\text{جتا}ص}{ص^2} = \lim_{ص\to 0} \frac{2\text{جا}^2\frac{ص}{2}}{ص^2}$

$= \lim_{ص\to 0} 2\,\text{جا}\frac{ص}{4}\,\text{جا}\frac{ص}{4} = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

● أوجد $\lim_{س\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\text{جتا}2س}{(\pi+2س)^2}$

- الحل:

$ص = \pi + 2س$

$س = \frac{ص}{2} - \frac{\pi}{2}$

$س\to -\frac{\pi}{2} \Leftarrow ص\to 0$

$= \lim_{س\to -\frac{\pi}{2}} \frac{2\text{جتا}^2س}{(\pi+2س)^2}$

$= \lim_{ص\to 0} \frac{2\text{جتا}^2(\frac{ص}{2}-\frac{\pi}{2})}{ص^2} = \lim_{ص\to 0} \frac{2\text{جا}^2(\frac{\pi}{2}-ص)}{ص^2}$

$= \lim_{ص\to 0} 2\left(\frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2}-ص)}{ص}\right)^2 = 2\times(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$

● أوجد $\lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}2س - \text{جتا}2س - 1}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جا}س\text{جتا}س - \text{جتا}^2س + \text{جا}^2س - \text{جا}س - \text{جتا}س}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$

$= \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جا}س\text{جتا}س - 2\text{جتا}^2س}{\text{جا}س - \text{جتا}س} = \lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جتا}س(\text{جا}س-\text{جتا}س)}{(\text{جا}س-\text{جتا}س)}$

$= 2\,\text{جتا}\frac{\pi}{4} = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

● أوجد $\lim_{س\to\frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}س - \text{جتا}س}{س - \frac{\pi}{4}}$ $\Leftarrow ص = س - \frac{\pi}{4}$

$س = ص + \frac{\pi}{4}$

subject: القمة في الرياضيات Date:

* لأسئلة النهاية على الاقتران المتشعب
ثلاث حالات :
(١) عند النقط العادية : وفيها الإتجاه إلى اليمين واليسار حيث يقوم بالتعويض مباشرة .
(٢) عند نقط التشعب : وفيها نحتاج إلى إيجاد اليمين واليسار .
(٣) عند الأطراف : وفي هذه الحالة نجد النهاية من جهة

● إذا كان ق(س) = { ٣س + ١ ، إذا س ≤ ٢ ; ٥س ، ٢ < س ≤ ٣ ; ٧س ، ٣ < س < ٥ ; ٩ ، س = ٥ }

أوجد :
(١) نها ق(س) : نقطة عادية ... تعويض مباشر
س ← ٤
٧س ، ٣ < س < ٥ ; ٥س ، ٢ ≤ س ≤ ٣ ; ٣س + ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢
١ ٢ ٣ ٥
∴ نها ق(س) = نها ٧س = ٢٨
س←٤ س←٤
(٢) نها ق(س) : نقطة تحول ... يمين ويسار
س ← ٣
⇐ من اليمين : نها ق(س) = نها ٧س = ٢١
س←٣⁺ س←٣⁺
⇐ من اليسار : نها ق(س) = نها ٥س = ١٥
س←٣⁻ س←٣⁻
* نها ق(س) ≠ نها ق(س) ⇐ نهاية غير موجودة
س←٣⁺ س←٣⁻

(٣) نها ق(س) : نقطة تحول ... عين ويسار
س ← ٢
⇐ من اليمين : نها ق(س) = نها (٥س) = ١٠
س←٢⁺ س←٢⁺
⇐ من اليسار : نها ق(س) = نها (٣س + ١) = ٥
س←٢⁻ س←٢⁻
⇐ نها ق(س) ≠ نها ق(س) ∴ النهاية غير موجودة
س←٢⁺ س←٢⁻

(٤) نها ق(س) : طرف ... من جهة واحدة
س ← ١
⇐ نها ق(س) = نها (٣س + ١) = ٣
س←١⁺ س←١⁺

(٥) نها ق(س) : طرف ... من جهة واحدة
س ← ٥
⇐ نها ق(س) = نها (٧س) = ٣٥
س←٥⁻ س←٥⁻

● إذا كان ق(س) = { (س² − ١)/(س − ١) ، س ≠ ١ ; ٥ ، س = ١ }
أوجد نها ق(س)
س ← ١
نها (س² − ١)/(س − ١) = نها (س + ١) = ٢
س←١ (بحذف ١) س←١
⇐ في حالة عدم وجود المتباينات تكون النهاية موجودة عند إشارة عدم المساواة

● إذا كان ق(س) = { س² + ٢ ، س ≤ ١ ; ٥س ، س > ١ ; ٧ ، س = ١ }
وعلمت أن نها ق(س) موجودة ، أوجد ؟
س ← ١
⇐ بما أن النهاية موجودة ⇐ اليمين = اليسار .

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

* $\lim_{س \to -1} (س^2 + 2س) = \lim_{س \to 1+} ب س \Leftarrow 1 + ب = 0 \Leftarrow ب = -1$

● إذا كانت $د(س) = \begin{cases} 2س + ب & ، س < 2 \\ ه س^2 + 3ب & ، س > 2 \end{cases}$

وعلمت أن $\lim_{س \to 2} د(س) = 10$ ، أوجد قيمة $ه$ ، $ب$ ؟

$\lim_{س \to 2+} د(س) = \lim_{س \to 2-} د(س) = 10$

$\Leftarrow 4ه + ب = 20 + 3ب = 10 \Leftarrow 20 + 2ب = 10 \Leftarrow$

$ب = -5$ ،

$\Leftarrow 4ه + ب = 10 \Leftarrow 4ه - 5 = 10 \Leftarrow ه = \frac{15}{4}$

● إذا كانت $د(س) = \begin{cases} جا 2س & ، س < \frac{\pi}{4} \\ 4ه س + \frac{\pi}{2} & ، س > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} د(س)$ موجودة ، فأوجد قيم $ه$ ؟

الحل: $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}+} جا 2س = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}-} 4ه س + \frac{\pi}{2}$

$1 = ه\pi - 1 \Leftarrow ه = \frac{2}{\pi}$

● إذا كانت $د(س) = \begin{cases} ك(س+1)^2 & ، س \geq 1 \\ (ك^2 - 5)س & ، س < 1 \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \to 1} د(س)$ موجودة أوجد قيم الثابت $ك$ ، إن وجدت .

الحل: $\lim_{س \to 1+} د(س) = \lim_{س \to 1-} د(س) \Leftarrow 4ك = ك^2 - 5$

$\Leftarrow ك^2 - 4ك - 5 = 0 \Leftarrow (ك - 5)(ك + 1)$

$\Leftarrow ك = 5$ أو $ك = -1$.

● إذا كانت $د(س) = \begin{cases} \frac{جا ه س}{س} & ، س > صفر \\ ه & ، س < صفر \end{cases}$

أوجد قيمة $ه$ إذا كانت $\lim_{س \to صفر} د(س)$ موجودة

الحل: $\lim_{س \to 0+} \frac{جا ه س}{س} = \lim_{س \to 0-} ه \Leftarrow ه = 5$

* معنى المطلق: $|-5| = 5 ، |-7| = 7$

$|س| = 2 \Leftarrow س = \pm 2$.

$\Leftarrow |س - 2| = 10 \Leftarrow س - 2 = \pm 10$

$\Leftarrow س - 2 = 10 \Leftarrow س = 12$

$\Leftarrow س - 2 = -10 \Leftarrow س = -8$

● خصائص المطلق:

1) $|س - ص| = |ص - س|$

2) $|س| = ه \Leftarrow س = \pm ه$

3) $|س| \cdot |ص| = |س ص|$

4) $\frac{|س|}{|ص|} = \left|\frac{س}{ص}\right|$

● إيجاد التعريف:

● إذا كانت $د(س) = |س - 5|$ اكتب $د$ بالصورة المجزأة .

الحل: $س - 5 = صفر$ ----- +++++ ، 5

$\Leftarrow س = 5$

$\Leftarrow د(س) = \begin{cases} س - 5 & ، س \geq 5 \\ -(س - 5) & ، س < 5 \end{cases}$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● $ه_{ن}(س) = |٧ - س|$ اكتب $ه_{ن}$ بالصورة المجزأة.

الحل: $س - ٧ =$ صفر $\Leftarrow$ $س = ٧$

$$ه_{ن}(س) = \begin{cases} ٧ - س ، س \leq ٧ \\ -(٧ - س) ، س \geq ٧ \end{cases}$$

● $ه_{ن}(س) = |٦ - ٢س| \Leftarrow ٦ - ٢س = ٠$

$\Leftarrow س = ٣$

	$(٦-٢س)^{٢}$		٣	
	+ + +	− − −		+ + +

$$ه_{ن}(س) = \begin{cases} ٦ - ٢س ، س \leq ٣ \\ -(٦ - ٢س) ، س \geq ٣ \end{cases}$$

● $ه_{ن}(س) = |س^{٢} - ٩| \Leftarrow س^{٢} - ٩ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$

	$(س^{٢}-٩)^{٣}$		-٣		٣	
	+ + +	− − −		− − −		+ + +

$$ه_{ن}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٩ ، س \leq -٣ \text{ أو } س \geq ٣ \\ -(س^{٢} - ٩) ، -٣ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

● $ه_{ن}(س) = |س - س^{٢}| \Leftarrow س - س^{٢} =$ صفر

$\Leftarrow س(١ - س) =$ صفر $\Leftarrow س = ٠ ، س = ١$.

	$س - س^{٢}$		٠		١	
	+ + + + +	− − − − −		− − − − −		+ + + + +

$$ه_{ن}(س) = \begin{cases} س - س^{٢} ، س \leq ٠ \text{ أو } س \geq ١ \\ -(س - س^{٢}) ، ٠ \leq س \leq ١ \end{cases}$$

● $ه_{ن}(س) = ١ س^{٢} - ٤س + ٣$.

الحل: $\Leftarrow س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \Leftarrow$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

$\Leftarrow س = ٣ ، س = ١$

	$(س-٣)(س-١)$		١		٣	
	+ + + +	− − − −		− − − −		+ + + +

$$ه_{ن}(س) = \begin{cases} س^{٢} - ٤س + ٣ ، س \leq ١ \text{ أو } س \geq ٣ \\ -(س^{٢} - ٤س + ٣) ، ١ \leq س \leq ٣ \end{cases}$$

* النتيجة:

* إذا كانت $ق > ٠$ فإن

* $|س| = ق \Leftarrow س = ق ، -ق$

* $|س| \leq ق \Leftarrow -ق \leq س \leq ق$

* $|س| < ق \Leftarrow -ق < س < ق$

* $|س| \geq ق \Leftarrow س \geq ق ، س \leq -ق$

* $(\sqrt{س})^{٢} = س$

* $\sqrt{س^{٢}} = |س|$

$|س| = ٥ \Leftarrow س = ٥ ، س = -٥$

$س^{٢} = ٢٥ ، \sqrt{س^{٢}} = \sqrt{٢٥} \Leftarrow$

$|س| = ٥ \Leftarrow س = \pm ٥$.

لاحظ أن $\sqrt{(س-٥)^{٢}} = |س - ٥|$.

● $ه_{ن}(س) = \sqrt{س^{٢}} + |١ - س|$ اكتب $ه_{ن}$ بالصورة المجزأة.

الحل: $ه_{ن}(س) = |س| + |١ - س|$.

$|س| = \begin{cases} س ، س \geq ٠ \\ -س ، س < ٠ \end{cases}$ ، $|س - ١| = \begin{cases} س - ١ ، س \geq ١ \\ ١ - س ، س < ١ \end{cases}$

① $-س$	① $س$	$س$	$|س|$
$١ - س$	$١ - س$	$س - ١$	$|س| - ١$
$١ - ٢س$	١	$٢س - ١$	$ه_{ن}(س)$

● $ه_{ن}(س) = ١ س^{٢} - ٤س + ٣$.

الحل: $\Leftarrow س^{٢} - ٤س + ٣ = ٠ \Leftarrow$

$(س - ٣)(س + ٣) = ٠$

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} 3س - 1 & ، س \geq 1 \\ 1 & ، س = 1 \\ 1 - 2س & ، س < 1 \end{cases}$$

● أوجد نهـا $\frac{س^3 - أ^3}{س - أ}$

-الحل:

$$\text{أ}^3 = \begin{cases} -3س & س < 0 \\ +3س & س \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{نهـا}_{س \to -3} \frac{س^3 - 3س}{س + 3} = \text{نهـا}_{س \to -3} \frac{س(س^2 - 3)}{(س + 3)} = 3$$

● أوجد نهـا $\frac{س^3 - أ^3}{س - أ}$

-الحل:

$$\text{نهـا}_{س \to -3} \frac{س^2 + 3س}{س + 3} = \text{نهـا}_{س \to -3} \frac{س(س+3)}{(س+3)} = -3$$

● أوجد نهـا $\frac{س}{\sqrt{س+1} - 1}$

-الحل:

$$\text{نهـا}_{س \to 0} \frac{\sqrt{س}}{س + 3\sqrt{س}} = \frac{1}{3} \text{ ، نهـا}_{س \to 0^-} \frac{\sqrt{س}}{-3\sqrt{س}} = \frac{-1}{3}$$

* اليمين ≠ اليسار ⇐ النهاية غير موجودة

توضيح هام

* لإيجاد نهاية اقتران يشمل على القيمة المطلقة نقوم بإعادة تعريف الاقتران وتحدد القاعدة التي تنتمي إليها النقطة ثم نحل السؤال كما في الطرق السابقة أو....

* نعوض مباشرة قيمة (س) داخل اقترانه القيمة المطلقة فإذا كان ناتج التعويض...

(١) موجب: نهمل القيمة المطلقة ونجد النهاية حسب الطرق السابقة.

(٢) سالب: نهمل القيمة المطلقة ونعكس إشارة كل حد داخل القيمة المطلقة.

(٣) صفر: نعيد تعريف اقترانه لقيمة المطلقة.

● أوجد نهـا $\frac{س^2 - 11}{س - 1}$

* ناتج تعويض (٢) داخل القيمة المطلقة موجب.

$$= \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{(س-1)(س+1)}{(س-1)} = 3$$

● نهـا $\frac{5س - 1 - 9}{س - 2}$

* ناتج تعويض (٢) داخل القيمة المطلقة موجب.

$$= \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{5س - 1 - 9}{س - 2} = \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{5س - 10}{س - 2}$$

⇐ تعويض مباشر = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ⇐ نهـا $\frac{5(س-2)}{(س-2)} = 5$

● نهـا $\frac{س - 6 - 4}{س - 2}$

* ناتج التعويض (٢) داخل القيمة المطلقة سالب.

$$= \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{-س + 6 - 4}{س - 2} \Leftarrow \text{نهـا}_{س \to 2} \frac{-س + 2}{س - 2}$$

$$\Leftarrow \text{نهـا}_{س \to 2} -1 = -1$$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: (الغمة في الرياضيات) Date:

$\lim_{س \to 2} \frac{س^3 - 3س^2 + 1}{س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{3س^2 - 6س}{1} = 12 - 12 = 0$

$= \lim_{س \to 2} \frac{(س-2)(س+2)}{(س-2)} = 4$

$\lim_{س \to 3} \frac{5س^2 - 13س + 10}{8} = \frac{45 - 39 + 10}{8} = \frac{16}{8} = 2$

$= \lim_{س \to 3} \frac{10س - 13}{6س - 4} = \frac{17}{14}$

$\lim_{س \to 5} \frac{س^2 - 3س - 10}{س^2 - 25} = \lim_{س \to 5} \frac{(س-5)(س+2)}{(س-5)(س+5)} = \frac{7}{10}$

$= \lim_{س \to 5} \frac{س+2}{س+5} = \frac{7}{10}$

$\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = 1$

* نلاحظ أن تعويض (0) داخل دالة المقلوب اليساري صفر لذلك نقوم بإعادة التعريف.

* $\lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{س} = 1$ * $\lim_{س \to 0^-} \frac{جا س}{-س} = -1$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

$\lim_{س \to 0} \frac{12س^2 + 4س + 1}{س}$

- الحل:

$\therefore 12س^2 + 4س + 1 = \begin{cases} \frac{2س^2 + 4س}{س} & ، س \geq -2 \\ \frac{-2س^2 - 4س}{س} & ، س < -2 \end{cases}$

$\lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{|س|} + س \right)$ $\Leftarrow$ $|س| = \sqrt{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{|س|} + س \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + 4س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{2س(س+2)}{س} = 4$

$\lim_{س \to 0} \frac{-2س^2 - 4س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{-2س(س+2)}{س} = -4$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - 9}{س^3 - 3س} \Leftarrow \lim_{س \to 3} \frac{9 - س^2}{3س - س^3} \Leftarrow 9 - س^2 = 0 \Leftarrow س = \pm 3$

$= \lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+3)}{س(س-3)}$

$= \lim_{س \to 3} \frac{س+3}{س} = \frac{6}{3} = 2$

$\lim_{س \to 0} \frac{5س - س^2}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{5 - س}{1} = 5$

$\Leftarrow س(5 - س) =$ صفر $\Leftarrow س = 0 ، س = 5$

	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$5س - س^2$	-	-	0	+	0	-	-

$\Leftarrow \lim_{س \to 0^-} \frac{-س^2 + 5س}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-س(-س+5)}{س} = 5$

* $\lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{|س|} = \lim_{س \to 0^+} \frac{2س^2}{س} = \lim_{س \to 0^+} 2س = 0$

* $\lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{|س|} = \lim_{س \to 0^-} \frac{2س^2}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -2س = 0$

$\Leftarrow$ اليمين $=$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية موجودة $= 0$

* $\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{2س^2 + 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} 2س + 3 = 3$

* $\lim_{س \to 0} \frac{2س^2 + 3س}{|س|} = \lim_{س \to 0^-} \frac{2س^2 + 3س}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -2س - 3 = -3$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

* $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 3س}{|س|} = \lim_{س \to 0^+} \frac{س^2 + 3س}{س} = \lim_{س \to 0^+} س + 3 = 3$

* $\lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 3س}{|س|} = \lim_{س \to 0^-} \frac{س^2 + 3س}{-س} = \lim_{س \to 0^-} -س - 3 = -3$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

* $\lim_{س \to 0} \frac{|س|}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{س}{س} = 1$

* $\lim_{س \to 0} \frac{|س|}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-س}{س} = -1$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

* $\lim_{س \to 0} \frac{|س|}{س^2} = \lim_{س \to 0^+} \frac{س}{س^2} = \lim_{س \to 0^+} \frac{1}{س} = \infty$

* $\lim_{س \to 0} \frac{|س|}{س^2} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-س}{س^2} = \lim_{س \to 0^-} \frac{-1}{س} = \infty$

$\Leftarrow$ اليمين $=$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية موجودة $= \infty$

منصة العلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

نهـا $\frac{|3س-9|}{|س^2-6س+9|}$ = نهـا $\frac{|3(س-3)|}{|(س-3)^2|}$ = نهـا $\frac{3}{س-3}$ = $\frac{3}{0}$ = ∞

$س \to 3$ $س \to 3$ $س \to 3$

∴ النهاية غير موجودة.

نهـا $\frac{|س^2+3س-4|}{|س-1|}$ = نهـا $\frac{|(س+4)(س-1)|}{|س-1|}$ = نهـا $|س+4|$ = 5

$س \to 1$ $س \to 1$ $س \to 1$

نهـا $\frac{|س|+س}{س}$ = نهـا $\frac{-س+س}{س}$ = 0

$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

نهـا $\frac{|س|+س}{س}$ = نهـا $\frac{س+س}{س}$ = 2

$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

∴ نهـا $\frac{|س|+س}{س}$ غير موجودة.

$س \to 0$

نهـا $\frac{|س|}{س}$ = نهـا $\frac{-س}{س}$ = -1

$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

نهـا $\frac{|س|}{س}$ = نهـا $\frac{س}{س}$ = 1

$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

∴ نهـا $\frac{|س|}{س}$ غير موجودة.

$س \to 0$

نهـا $\frac{جا^2 س}{|س|}$ = نهـا $\frac{جا^2 س}{س^2}$ = نهـا $\frac{جا^2 س}{س^2}$ = 1

$س \to 0$ $س \to 0$ $س \to 0$

نهـا $\frac{جا^2 س}{س}$ = نهـا $\frac{جا^2 س}{-س}$ = -5

$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

نهـا $\frac{جا^2 س}{س}$ = نهـا $\frac{جا^2 س}{س}$ = 5

$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

∴ نهـا $ق(س)$ ≠ نهـا $ق(س)$ ⇒ ∴ نهـا $ق(س)$ غير موجودة

$س \to 0^+$ $س \to 0^-$ $س \to 0$

نهـا $ق(س)$ = 1 ، نهـا $ق(س)$ = -1

$س \to 0^+$ $س \to 0^-$

∴ النهاية غير موجودة.

نهـا $\frac{|س^2-9س^3|}{س}$ ⇐ في هذه الحالة المرافقة غير مفيد.

$س \to 0$

نهـا $\frac{|س^2(1-9س)|}{س}$ = نهـا $\frac{س^2|1-9س|}{س}$

$س \to 0$ $س \to 0$

نهـا $\frac{|س|\,|1-9س|}{س}$

$س \to 0$

نهـا $\frac{|س|}{س}$ = نهـا $\frac{|س|}{|س|}$

$س \to 0$ $س \to 0$

نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س^2}$ = نهـا $\frac{|1-9س^2|}{|س|}$

$س \to 0$ $س \to 0$

نهـا $\frac{|1-9س^2|}{|س|}$

$س \to 0$

نهـا $\frac{|س|}{س}$ = نهـا $\frac{س}{س}$ = 1

$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

نهـا $\frac{|س|}{س}$ = نهـا $\frac{-س}{س}$ = -1

$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

∴ نهـا $\frac{|س|}{س}$ غير موجودة.

$س \to 0$

نهـا $\frac{|1-9س^2|}{|س|}$ = نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س^2}$ = نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س^2}$

$س \to 0$ $س \to 0$ $س \to 0$

نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س}$ = نهـا $\frac{|1-9س^2|}{-س}$ = -1

$س \to 0^-$ $س \to 0^-$

نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س}$ = نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س}$ = 1

$س \to 0^+$ $س \to 0^+$

∴ نهـا $\frac{|1-9س^2|}{س}$ غير موجودة.

$س \to 0$

* من خصائص الإقتران المطلق

* $\sqrt{س^2}$ = $|س|$.

* $\sqrt{(س-1)^2}$ = $|س-1|$.

* $\sqrt{س^2-2س+1}$ = $\sqrt{(س-1)(س-1)}$ = $|س-1|$

* $\sqrt{س^2-6س+9}$ = $\sqrt{(س-3)(س-3)}$ = $|س-3|$

• تنبيه •

$\frac{|س|}{|ص|}$ = $\left|\frac{س}{ص}\right|$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: ٠٧٨٩٨٤٨٠٦ سيد الدين البستيري ٠٧٩٥٤٢٠٥٤ Date:

* $\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt{س+1}-9}{س} = \frac{1}{6}$

* $\lim_{س\to 0^+} \frac{س}{\sqrt{س+1}-9} = -6$

$\lim_{س\to 0^-} \frac{س}{\sqrt{س+1}-9} = -6$

$\lim_{س\to 0} هـ(س) \neq \lim_{س\to 0^+} هـ(س)$

$\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

● $\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[3]{4+\frac{8}{س^3}}}{س}$ تساوي ...

الحل:

$= \lim_{س\to 0} \sqrt[3]{\frac{4س^3+8}{س^3}} = \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[3]{4س^3+8}}{\sqrt[3]{س^3}}$

$= \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[3]{4س^3-8}}{س} = \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[3]{4س^3-8}}{\sqrt[3]{س^3}} = -2$

● $\lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[5]{4+\frac{3}{س^5}}}{س}$ تساوي

الحل:

$= \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[5]{4+3س^5}}{\sqrt[5]{س^5}} = \lim_{س\to 0} \frac{\sqrt[5]{4س^5+3}}{س}$

$= \lim_{س\to 0} \sqrt[5]{\frac{4س^5+3}{س^5}} = \sqrt[5]{4س^5+3} = \sqrt[5]{3}$

ملاحظات هامة:

* $|س|<5 \Leftarrow -5<س<5$

$|س|>5 \Leftarrow س>5 ، س<-5$

* $|س|<ق \Leftarrow -ق<س<ق$

$|س|>ق \Leftarrow س>ق ، س<-ق$

● إذا كانت $هـ(س) = \begin{cases} 2س^2 & ، |س|\geq 2 \\ س^3 & ، |س|<2 \end{cases}$

جد $\lim_{س\to 2} هـ(س)$ ، $\lim_{س\to -2} هـ(س)$

الحل:

$هـ(س) = \begin{cases} 2س^2 & ، -2\geq س\geq 2 \\ س^3 & ، س>2 ، س<-2 \end{cases}$

$س^3$ $2س^2$ $-2س^3$ $س^3$

(1) $\lim_{س\to 2^+} س^3 = 8$ ، $\lim_{س\to 2^-} 2س^2 = 8$ $\therefore \lim_{س\to 2} هـ(س) = 8$

(2) $\lim_{س\to -2^+} 2س^2 = 8$ ، $\lim_{س\to -2^-} س^3 = -8$ $\therefore \lim_{س\to -2} هـ(س)$ غير موجودة

● $هـ(س) = \begin{cases} 1 & ، |س|\geq 1 \\ 0 & ، |س|<1 \end{cases}$ أوجد $\lim_{س\to 1} هـ(س)$

الحل: $هـ(س) = \begin{cases} 1 & ، -1\geq س\geq 1 \\ 0 & ، س>1 ، س<-1 \end{cases}$

$\lim_{س\to 1^+} هـ(س) =$ غير موجود ، $\lim_{س\to 1^-} هـ(س) = 1$

$\Leftarrow$ اليمين $\neq$ اليسار $\Leftarrow$ النهاية غير موجودة.

● $هـ(س) = \begin{cases} -1 & ، س<0 \\ 1 & ، س>0 \end{cases}$ ، أوجد $\lim_{س\to 0} |هـ(س)|$

الحل: $|هـ(س)| = \begin{cases} |-1| & ، س<0 \\ |1| & ، س>0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & ، س<0 \\ 1 & ، س>0 \end{cases}$

$\Leftarrow \lim_{س\to 0} هـ(س) = 1$

NOTEBOOK

● إذا كانت $\text{مد}(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{\sqrt{س} - ١٤} & ، س < ٤ \\ ٢ س^{٢} - ٩ & ، س > ٤ \end{cases}$

فكانت $\lim_{س \to ٤} \text{مد}(س)$ موجودة ، فما قيمة $ق$ ؟

- الحل : $\text{مد}(س) = -١$ ، $س < ٤$ (علوم)

$٢ س^{٢} - ٩$ ، $س > ٤$ (علامة)

$\Leftarrow \lim_{س \to ٤} \text{مد}(س) = \lim_{س \to ٤} \text{مد}(س) \Leftarrow -١ = \lim_{س \to ٤^{+}} ٢ س^{٢} - ٩$

$س \to ٤^{+}$ ، $س \to ٤^{-}$

$\Leftarrow -١ = ١٦ ق - ٩ \Leftarrow ق = \frac{١}{٢}$ (علوم)

● إذا كانت $\text{مد}(س) = \begin{cases} \frac{٣ - س}{\sqrt{س} - ١٢} & ، س < ٣ \\ ق س^{٢} + ١ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

فكانت $\lim_{س \to ٣} \text{مد}(س)$ موجودة أوجد قيمة $ق$ ؟

- الحل : $\lim_{س \to ٣^{+}} \text{مد}(س) = \lim_{س \to ٣^{-}} \text{مد}(س)$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣^{+}} ق س^{٢} + ١ = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{٣ - س}{\sqrt{س} - ١٢}$

$\Leftarrow ٩ ق + ١ = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{-(٣ - س)}{-(\sqrt{س} - ٣)}$

$\Leftarrow ٩ ق + ١ = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{-(٣ - س)}{-(\sqrt{س} - ٣)} \times \frac{\sqrt{س} + ٣}{\sqrt{س} + ٣}$

$\Leftarrow ٩ ق + ١ = \lim_{س \to ٣^{-}} \frac{-(٣ - س)(\sqrt{س} + ٣)}{-(٣ - س)}$

$\Leftarrow ٩ ق + ١ = ٦$

$\Leftarrow ٩ ق = ٥$

$\Leftarrow ق = \text{صفر}$ ، $ق = \text{صفر}$

● اذا كانت $\lim_{س \to ٣} \frac{ق س^{٢}}{ق س^{٢} + ا س + ٣ ق} = ٨$ ، فما قيمة $ق$.

- الحل :

$\Leftarrow \lim_{س \to ٣} \frac{٦ س}{ق س^{٢} + ا س + ٣ ق} = ٨$

$\Leftarrow ٦ = ٢٤ ق + ١٦ ق \Leftarrow ق = \frac{-٩}{٨}$

● اذا كانت $\lim_{س \to ٢} |ق س^{٢} + ١| = ١٧$ ، فما قيمة $ق$.

*نقل كل : $|ا| = ق \Leftarrow ا = ق$ أو $ا = -ق$

$\Leftarrow ٤ ق + ١ = ١٧$

أو $\Leftarrow ٤ ق + ١ = ١٧ \Leftarrow ق = ٤$

$\Leftarrow ٤ ق + ١ = -١٧ \Leftarrow ق = \frac{-١٩}{٤}$

● $\lim_{س \to -٣} \frac{|٢ س^{٢} + ١٣ س + ٢١| - ٣}{س + ٣}$ تساوي ؟؟؟

$= \lim_{س \to -٣} \frac{|-(س + ٣)(٢ س + ٧)| - ٣}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(٢ س + ٧) - ٣}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{٢ س^{٢} + ١٣ س + ١٨}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{(س + ٣)(٢ س + ٧)}{(س + ٣)} = -٢$

● $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٤} - ٢ س + ١}{س - ١}$ تساوي ؟؟؟

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س - ١)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)^{٢}}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} س - ١ = ٠$

● اقران اكبر عدد صحيح :

*مراجعة عامة :

$\Leftarrow [٠,١) = ٠ \Leftarrow [٠,١^{+}) = ٠ \Leftarrow [٠,١^{-}] = ٠$

$\Leftarrow [٠,٩) = ٠ \Leftarrow [٠,٩^{+}] = ٠ \Leftarrow [٠,٩^{-}] = ٠$

$\Leftarrow [٠^{+}] = ٠$ ، $[٠^{-}] = -١$

اذا كان $ق$ عدد صحيح فإن :

$[س + ق] = [س] + ق$ ، $[س - ق] = [س] - ق$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات Date:

← [س+٣] = [س] + ٣ ، [س-٣] = [س] - ٣

← [س + ١,٣] = [س + ١,٠] + ٣

← [س - ٢,٩] = [س - ٠,٩] - ٣

← [٥ - س] = [-س] + ٥

هـ م :

لامقترانه	معامل س	طول الدرجة	البداية	نهاية	التعويض
$[\frac{س}{٢}+١]$	$\frac{١}{٢}$	٢	صحيح zero	صفر	$س \geq$
$[١-\frac{س}{٥}]$	$-\frac{١}{٥}$	٥	صحيح zero	صفر	$> س \geq$
$[١,٠+\frac{س}{٢}]$	$\frac{١}{٢}$	٢	كسر صحيح بخطوة	٠,٣-	$> س \geq$
$[\frac{س}{٣}+١,٠]$	$\frac{١}{٣}$	٣	كسر صحيح بخطوة	٠,٣-	$> س \geq$
[س-٥]	١	١	صحيح zero	صفر	$> س \geq$
$[\frac{س}{١٠}-١٠]$	$\frac{١}{١٠}$	١٠	كسر صفر بخطوة	١-	$> س \geq$

● $هـ(س) = [\frac{س}{٣} - ٢]$ حيث $س \in [٠,٦]$

* معامل س = $-\frac{١}{٣}$ * طول الدرجة = ٣

* البداية : zero الاستكمال

٣- ، ٠ ، ٣ ، ٦ ، ٩

* التعويض :

$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & س = ٠ \\ ١ & ٠ < س \leq ٣ \\ ٠ & ٣ < س \leq ٦ \end{cases}$ ← $\begin{cases} س = ٠ \\ ٠ < س \leq ٣ \\ ٣ < س \leq ٦ \end{cases}$ ، $س = ٠$ ، $س = ٢$

● $هـ(س) = [\frac{س}{٢} - ١,٠]$ حيث $س \in [١,٤]$

* معامل س : $\frac{١}{٢}$ * طول الدرجة = ٢

* البداية : كسر صفر بخطوة ← $\frac{س}{٢} - ١,٠ = ٠$

← $\frac{س}{٢} = ١,٠$ ← $س = ٢,٠$

٠,٢ ، ٠,٤ ، ٠,٦ ، ٢

(١) (٤)

* التعويض :

$هـ(س) = \begin{cases} ١ & ٠,٢ \leq س < ٢,٢ \\ ٠ & ٢,٢ \leq س < ٤ \end{cases}$ ← $\begin{cases} ١ \geq س < ٢,٢ \\ ٤ > س \geq ٢,٢ \end{cases}$ ، $١ \geq س < ٠,٢$ ، $٤ > س \geq ٤$

$هـ(س) = \begin{cases} صفر & ١ \leq س < ٢,٢ \\ ١ & ٢,٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

● $هـ(س) = [\frac{س}{٤} - ١]$ حيث $س \in [٠,٦]$

* معامل س : $\frac{١}{٤}$ * طول الدرجة : ٤

* البداية : zero

٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

* التعويض :

$هـ(س) = \begin{cases} -١ & ٠ \leq س < ٢ \\ ٠ & ٢ \leq س < ٤ \\ ١ & ٤ \leq س < ٦ \\ ٢ & س = ٦ \end{cases}$ ← $\begin{cases} ٠ \leq س < ٢ \\ ٤ > س \geq ٢ \\ ٦ > س \geq ٤ \\ س = ٦ \end{cases}$

* إذا كان $[P] = ٥$ ، فإن ...

P عدد صحيح	P ∉ ص	لم يحدد
$[P] = ٥$	$[P] = -٥$ ←	$[P] = -٥$
$٦ > P \geq ٥$	$-٥ > P > -٤$	

NOTE BOOK

سعد الدين البستنجي

subject: Date:

+ إذا كانت [م] = -٥ فإن ...

م ∈ ص م ∉ ص لم يحدد

[م] = -٥ [م] = -٥ ⇐ [م] = -٥

م = -٥ -٥ < م < -٤ -٥ ≤ م < -٤

---

* م عدد صحيح م ∉ ص

[م] + [م] = ٦ [م] + [م] = ٦

[م]٢ = ٦ [م]٢ = ٦ ⇐ [م] = ٣

[م] = ٣ ⇐ م = ٣ ٣ < م < ٤

---

* م ∈ ص م ∉ ص

[م] + [م⁺] = ٧ [م⁻] + [م⁺] = ٦

م + م - ١ = ٧ [م] + [م] = ٦ ⇐

م٢ = ٨ [م] = ٣

٣ < م < ٤ م = ٤

---

* م ∈ ص م ∉ ص

[م] + [م⁺] = ٥ [م⁻] + [م⁺]٢ = ١٢

م + م - ١ = ٥ [م]٢ + [م]٢ = ١٢ ⇐

م٢ = ٣ ⇐ [م] = ٣ [م]٢ = ١٢ ⇐ [م]٢ = ٦

٧ > م٢ > ٦

$\frac{٧}{٢}$ > م > ٣

- إذا لم يحدد نعتبرها كسر ونصيف مساواة..

[م] + [م] = ١٠ ⇐ [م] + [م] = ١٠ ⇐

[م] = ١٠ ⇐ [م] = ٥ ⇐ ٥ ≤ م < ٦

● حل المعادلة [س + ٧] = ١٧

١٧ ≤ س + ٧ < ١٨ ⇐

١٠ ≤ س < ١١

● حل المعادلة [س + ٧,٠] = ١٠

١٠ ≤ س + ٧,٠ < ١١

٩,٣ ≤ س < ١٠,٣

● أعد تعريف س + [س] ، س ∈ [٠,١)

- الحل : نعيد تعريف [س] ثم نضيف س

لكل حالة ...

$$[س] = \begin{cases} ١ & ، ١ \le س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \le س < ٣ \\ ٣ & ، س = ٣ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} س + ١ & ، ١ \le س < ٢ \\ س + ٢ & ، ٢ \le س < ٣ \\ س + ٣ & ، س = ٣ \end{cases}$$

● إيجاد النهاية :

* نها [س] = م ، نها [س] = م - ١

س → م⁺ ، س → م⁻

منصة علم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● نهـا [س + ٣] = ٨
س → ٥+

● نهـا [س + ٣] = ٨ − ١ = ٧
س → ٥−

● نهـا [س/٢] = ٢ ، نهـا [س/٣] = ١
س → ٤+ ، س → ٤−

* ملاحظات هامة :

* إذا كان معامل (س) سالباً في اقترابه أكبر عدد صحيح فنقوم بقلب اليمين إلى يسار، واليسار إلى يمين .....

● نهـا [٥ − س] = [٣⁻] = ٢
س → ٢+

⇐ لاحظ أن معامل س سالب و (س) تؤول إلى الرقم (٢) من اليمين، وبسبب سلبية معامل س فنأخذ إيجاد النهاية وكأنها من اليسار ...

⇐ نهـا [٥ − س] = [٣⁺] = ٣
س → ٢−

● نهـا [س − ٥] = [−٣⁺] = −٣
س → ٢+

نهـا [س − ٥] = [−٣⁻] = −٤
س → ٢−

● نهـا [س + ٥] = [٣⁺] = ٣
س → −٢+

نهـا [س + ٥] = [٣⁻] = ٢
س → −٢−

● نهـا [٥ − س] = ٢ − ١ = ١
س → ٣+

● نهـا [س + ٥] = ٣ + ٥ = ٨
س → ٣+

● نهـا [س − ٧] = ٣ − ٧ = ٤
س → −٣−

● نهـا [س + ٥] = ١ − ٣ + ٥ = ٧
س → −٣−

● أوجد نهـا (س² − [س]) / (س − ١)
س → ١+

= نهـا (س⁴ − ١) / (س − ١) = نهـا (س − ١)(س + ١)(س² + ١) / (س + ١)
س → ١+ ، س → ١+

= ١ + ١ = ٢

● أوجد نهـا (س² − [٦ + س]) / (س − ٣)
س → ٣+

= نهـا (س² − ٩) / (س − ٣) = نهـا (س − ٣)(س + ٣) / (س − ٣)
س → ٣+ ، س → ٣+

= ٣ + ٣ = ٦

● نهـا (س⁴ − س[س]) / (س − ٥) تساوي ...
س → ٥+

= نهـا (س³ − ٥س) / (س − ٥) = نهـا س(س − ٥)(س + ٥) / (س − ٥)
س → ٥+ ، س → ٥+

= ٥

● أوجد نهـا (س² − [٦ − س]) / (س − ٢)
س → −٢+

= نهـا (س² − ٤) / (س − ٢) = نهـا (س − ٢)(س + ٢) / (س − ٢)
س → −٢+ ، س → −٢+

= ٤

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

القمة في الرياضيات

● أوجد $\lim_{س \to -٤} \frac{س^{٢} - [١٢,٧ + س]}{س + ٤}$

⇐ لاحظ أنه ناتج التعويض في المقدار الصحيح كسر وهو $[١٦,٧]$ لذلك تكون النهاية من اليمين واليسار متساوية ولتعويض فكانه الأكبر عدد صحيح مباشرة ...

$= \lim_{س \to -٤} \frac{س^{٢} - ١٦}{س + ٤} = \lim_{س \to -٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)} = ٨$

● $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - [س + ٥,١] س}{س - ٥}$ تساوي

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{س(س - ٥)}{(س - ٥)} = \lim_{س \to ٥} س = ٥$

● أوجد $\lim_{س \to ٤} \frac{[س + ٢]}{س + ٣}$

$\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{٦}{س + ٣} = \frac{٦}{٧}$ ، $\lim_{س \to ٤^{-}} \frac{٥}{س + ٣} = \frac{٥}{٧}$

⇐ $\lim_{س \to ٤^{+}} د(س) \neq \lim_{س \to ٤^{-}} د(س)$ ∴ النهاية غير موجودة

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س + ٥,١]}{س + ٣}$ تساوي ...

$= \lim_{س \to ٤} \frac{[٩,١]}{س + ٣} = \lim_{س \to ٤} \frac{٩}{س + ٣} = \frac{٩}{٧}$

● أوجد $\lim_{س \to ٥} \frac{[س + ٢,١] س}{س - ٥}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢} - ٥س}{س - ٥}$

● أوجد $\lim_{س \to ٥^{-}} \frac{س + [٠,٤ + س]}{س}$

$= \lim_{س \to ٥^{-}} \frac{٥}{س} = \frac{٥}{٥} = ١$

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س]}{س + ٢} = \lim_{س \to ٤} \frac{٢}{س + ٤} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س]}{س + ٤} = \frac{٢ - ١}{٤ + ٢} = \frac{١}{٦}$

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س + ٠,١]}{س + ٢} = \lim_{س \to ٤} \frac{[٢,١]}{س + ٢} = \frac{٢}{٦}$

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س + ٠,١]}{س + ٢} = \lim_{س \to ٤} \frac{[٢,١]}{س + ٢} = \frac{٢}{٦}$

● $\lim_{س \to ٤} \frac{[س + ٠,١]}{س + ٢}$ عمل يمين ويسار لأنه كسر.

● أوجد $\lim_{س \to ٠} (س^{٢} + ١)^{[س]}$

الحل:

$\lim_{س \to ٠^{+}} (س^{٢} + ١)^{[س]} = \lim_{س \to ٠^{+}} (س^{٢} + ١)^{٠} = ١$

$\lim_{س \to ٠^{-}} (س^{٢} + ١)^{[س]} = \lim_{س \to ٠^{-}} (س^{٢} + ١)^{-١} = ١$

∴ $\lim_{س \to ٠} (س^{٢} + ١)^{[س]} = ١$

● أوجد $\lim_{س \to ٤^{-}} [\,|س - ٢|\,]$

$\lim_{س \to ٤^{-}} [\,|س - ٢|\,] = \lim_{س \to ٤^{-}} [س - ٢] = ٢ - ١ = ١$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: النهاية في الرياضيات Date:

● أوجد نهـا $\frac{س^2 - 1}{[س] + 5س}$ ، $س \to 3$

- الحل: $[س] = \begin{cases} 2 & 2 \le س < 3 \\ 3 & 3 \le س < 4 \end{cases}$

* نهـا $\frac{س^2 - 1}{3 + 5س + [س]}$ $= \frac{1-9}{3+15} = \frac{8}{18}$ ، $س \to 3^+$

* نهـا $\frac{س^2 - 1}{2 + 5س + [س]}$ $= \frac{1-9}{2+15} = \frac{8}{17}$ ، $س \to 3^-$

⇐ اليمين ≠ اليسار ∴ النهاية غير موجودة

● نهـا $\frac{س - 6}{س + [\frac{س}{2}]}$ تساوي؟ ، $س \to 6$

- الحل:

$[\frac{س}{2}] = \begin{cases} 2 & 4 \le س < 6 \\ 3 & 6 \le س < 8 \end{cases}$

* نهـا $\frac{س - 6}{3 + 2س}$ $= \frac{صفر}{9} = صفر$ ، $س \to 6^+$

* نهـا $\frac{س - 6}{2 + 3س}$ $= \frac{صفر}{8} = صفر$ ، $س \to 6^-$

⇐ نهـا $ق(س)$ موجودة وتساوي ٦ ، $س \to 6$

● نهـا $\frac{[\frac{1}{2} س - 1]}{س - 1}$ تساوي؟ ، $س \to 3$

- الحل: ⇐ لاحظ أنه ناتج بمقدار كسر حيث لا نأخذ اليمين ولا نستخدم اليسار.

$= نهـا \frac{[0.5]}{2-1} = \frac{صفر}{2} = صفر$ ، $س \to 2$

● أوجد نهـا $([2س + 5] - [2س])$ ، $س \to 2$

- الحل:

$= نهـا ([2س] + 5 - [2س]) = نهـا 5 = 5$ ، $س \to 2$ ، $س \to 2$

● نهـا $\frac{[\frac{2}{3} س + 4] + س}{|س| - 2}$ تساوي؟ ، $س \to -2$

- الحل:

$= نهـا \frac{س + 2}{-س - 2} = -1$ ، $س \to -2$

● اذا كان $ق(س) = \begin{cases} 9 - |س - 1| & س \le 3 \\ [س - 1] & س > 3 \end{cases}$

فإن نهـا $ق(س) = ؟؟$ ، $س \to 3$

الحل: * نهـا $ق(س) = نهـا |س - 1| = 2$ ، $س \to 3^+$ ، $س \to 3^+$

* نهـا $ق(س) = نهـا [س - 1] = -1$ ، $س \to 3^-$ ، $س \to 3^-$

⇐ اليمين ≠ اليسار ∴ النهاية غير موجودة

● إذا كان $ق(س) = \begin{cases} 9 - [س + 1] & س < 2 \\ -1 - [س] & س \ge 2 \end{cases}$

$2 \in ص$ ، وكانت نهـا $ق(س)$ موجودة ، جد 2؟ ، $س \to 2$

- الحل:

نهـا $ق(س) = نهـا ق(س)$ ، $س \to 2^+$ ، $س \to 2^-$

⇐ نهـا $-1 - [س] = نهـا 9 - [س + 1]$ ، $س \to 2^+$ ، $س \to 2^-$

منصة العلم التعليمية ALGALAM EDUCATION

NOTE BOOK

"سعد الدين السبتجي"

subject: Date:

$\Leftarrow$ ١٠ $-[\bar{P}] = [\bar{P}] + ١$ •

$\Leftarrow$ ١٠ $-[\bar{P}] = [\bar{P}] + ١$

$\Leftarrow$ ١٠ $- P = P - ١٠ \Leftarrow ١/+ ١/- P = P \Leftarrow ٥ = P$

● اذا كان $ه(س) = \begin{cases} [س] ، س < P \\ ٦ - [س] ، س > P \end{cases}$

فهل نهاية $ه(س)$ موجودة ، $P \notin ص$، جد $\lim_{س \to P} ؟$

- الحل: $[\bar{P}] - = [\bar{P}] + ٦$

$\Leftarrow$ لكن $[\bar{P}] = [\bar{P}] = [P]$ لأن $P \notin ص$

$\Leftarrow [P] + [P] = ٦ \Leftarrow [P] = ٣$

$\Leftarrow ٣ \geq P < ٤$ لكن P غير صحيحة

إذن $\Leftarrow ٣ > P > ٤$.

● $ه(س) = \begin{cases} |س| + ٣ ، س \geq P \\ [س] + P٣ ، س < P \end{cases}$

أوجد قيمة الصحيح P، علماً بأن نهاية $ه(س)$ موجودة $\lim_{س \to P}$

- الحل:

$P٣ + [\bar{P}] = ٣ + |\bar{P}|$

$\Leftarrow P٤ = ٣ + |\bar{P}| \Leftarrow P٣ + P = ٣ + |\bar{P}|$

ولأن $|P| = \bar{+}P \Leftarrow P٤ = ٣ + P \bar{+}$

$\rightarrow P = ١ \Leftarrow P٣ = ٣ \Leftarrow P٤ = ٣ + P$

$\rightarrow P = \frac{٣}{٥} \Leftarrow P٥ = ٣ \Leftarrow P٤ = ٣ + P-$

لم يرفض لأنه $P \in ص$

● اذا كان $ه(س) = \begin{cases} [س+٣] ، س < P \\ ٩- [س] ، س > P \end{cases}$

هل نهاية $ه(س)$ موجودة ؟ أوجد قيمة P ؟؟

- الحل: نهاية $[س+٣] =$ نهاية $٩- [س]$ $\lim_{س \to P^+} \quad \lim_{ص \to P^-}$

$\Leftarrow [\bar{P}] + ٣ = ٩ - [\bar{P}]$

$\Leftarrow [\bar{P}] + [\bar{P}] = ٩ - ٣$

* لاحظ أنه لم يرد لذلك نحامله معاملة الكسر.

$\Leftarrow [P] + [P] = ٦ \Leftarrow ٢ [P] = ٦$

$\Leftarrow [P] = ٣ \Leftarrow ٣ \geq P < ٤$

● اذا كانت نهاية $ه(س) = ٧$ ...

فما قيمة نهاية $\left(ه(٣س - ١) + [\frac{س}{٢} + ٥] \right) \lim_{س \to ؟}$

- الحل: نفرض $ص = ٣س - ١$

عندما $س \to ١$ فإن $ص \to ٢$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

NOTE BOOK

$\Leftarrow$ = نهـا هـ(ص) + نهـا [٥ + $\frac{س}{٣}$]
ص ← ٢ س ← ٢

$\Leftarrow$ = ٧ + ٥ ÷ ١٢ = [٥ $\frac{١}{٣}$] +

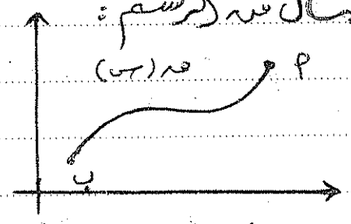
شروط الاتصال:

١ ◆◆ هـ(٢) موجودة ط أي صورة معرفة.

٢ ◆◆ نهـا هـ(س) موجودة.
س ← ٢

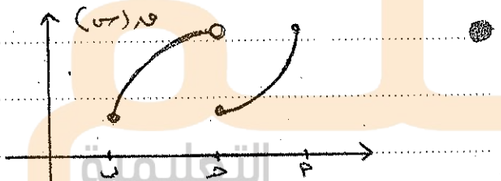
٣ نهـا هـ(س) = هـ(٢).
س ← ٢

* الاتصال على الرسم:



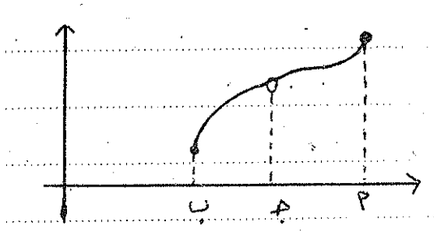
* هـ(س) متصل على الفترة [أ، ب]

* في هذا الشكل إذا وضعنا القلم عند أ فإننا نصل إلى النقطة ب دون رفع القلم، أي أن الاقتران متصل على الفترة [أ، ب]



* هـ(س) ليس متصل عند س = ج

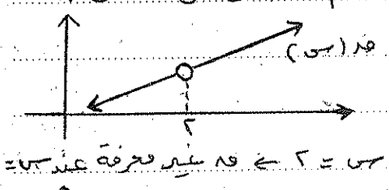
* في الشكل لا نستطيع أن نصل من أ إلى ب إلا إذا رفعنا القلم عند ج فيكون الاقتران غير متصل (منفصل) عند ج



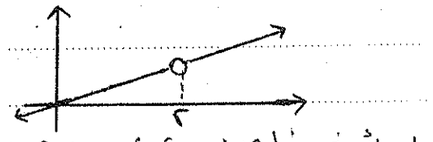
* هـ(س) غير متصل ومعرف عند س = ج

* في هذا الشكل نعتبر هـ غير متصلاً عند ج كذلك نعتبر ق ج غير معرفة للاقتران

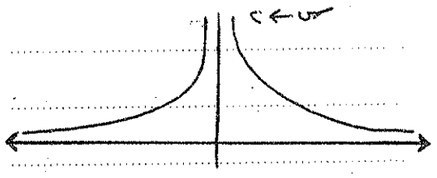
اذكر سبب عدم اتصال كل شكل:



* طالما عند س = ٢ ← هـ غير معرفة عند س = ٢



* غير متصل لأن نهـا هـ(س) ≠ هـ(٢)
س ← ٢



* غير متصل عند س = صفر غير معرف عند س = ٠

ملاحظات هامة:

١ كل كثير حدود متصل.

٢ الجذور الفردية متصلة إذا كان ما بداخله متصل

٣ الجذور الزوجية متصل على مجاله.

منصة القلم التعليمية AL QALAM EDUCATION

٤) القيمة المطلقة متصل إذا كان ما بداخله متصل.

٥) النسبي غير متصل عند أصفار المقام.

٦) الاقترانات الدائرية جا س، جتا س متصلة.

٧) الاقترانات كثا، ظتا، قا، قتا تتعامل معاملة الاقتران النسبي.

● قاعدة عامة:
جميع كثيرات الحدود متصل دائماً وتحقق شروط الاتصال ...

● كل نسبي غير متصل عند صفر المقام ...

● إذا كانت ق(س) = $\frac{٧}{\text{س}-٣}$، أوجد جميع قيم س التي تجعل ق متصلاً.

- الحل: * أولاً: نجد صفر المقام ...
⇐ س - ٣ = صفر ⇐ س = ٣
∴ الاقتران غير معرف وغير متصل عند س = ٣
* ق متصل على ح - {٣}.

● ق(س) = $\frac{٦\text{س}+١}{\text{س}^٢-٤}$، أوجد جميع قيم س التي تجعل ق غير متصل.

⇐ س^٢ - ٤ = ٠ ⇐ س^٢ = ٤ ⇐ س = ± ٢.
∴ ق غير متصل عند س = ± ٢

● إذا كانت ق(س) = $\frac{\text{س}+١}{\text{س}^٢-٤}$، أوجد قيم س التي تجعل الاقتران غير متصل.

- الحل: ⇐ يكون ق غير متصل عند صفر المقام ...
⇐ س^٢ - ٤ = صفر ⇐ س^٢ = ٤ ⇐ س = ± ٤
∴ ق غير متصل عند س = ± ٤.

● إذا كان ...
[س] = ٥ فإن ٥ ≤ س < ٦
[س] = -٥ فإن -٥ ≤ س < -٤
[س] = ن فإن ن ≤ س < ن + ١

● إذا كان ق(س) = $\frac{٧}{[\text{س}]-٤}$، أوجد جميع قيم س التي تجعل الاقتران غير متصل.

- الحل: [س] - ٤ = صفر ⇐ [س] = ٤
٤ ≤ س < ٥ ، س ∈ ص.
ق غير متصل عند س ∈ [٤، ٥)، ص

● أ س^٢ + ب س + جـ

(تحلل) ب^٢ - ٤ أ جـ ≥ ٠ غير متصل
(لا تحلل) ب^٢ - ٤ أ جـ < ٠ متصل

---

٩ - ٧ ⇐ + + + + + + | - - - - - -
تحلل: غير متصل ٧ | لا تحلل: متصل

٧ - ٩ ⇐ - - - - - - | + + + + + +
لا تحلل: متصل ٧ | تحلل: غير متصل

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$(٩-٥)(٩-٨) \Leftarrow$ +++ | --- | +++

٨ لا يحلل ، ٥ يحلل

يحلل غير متصل | لا يحلل متصل | يحلل غير متصل

● $*(٥-ب)(١٠-ب) <$ صفر

$\Leftarrow ب = ٥ ، ب = ١٠$

----- +++++ -----

٥ ، ١٠

متصل عندما $س > ١٠$ و $س < ٥$.

● إذا كان $هـ(س) = \frac{١٠س + ١}{س^{٢} - ٣س + ج}$

جد جميع قيم ج التي تجعل $هـ(س)$ متصل

- الحل: $ب^{٢} - ٤أ ج < ٠ \Leftarrow ٩ - ٤ \times ١ \times ج < ٠$

$٩ - ٤ج < ٠$ ----- +++++

$\frac{٩}{٤}$

$\Leftarrow هـ(س)$ متصل حيث $س > \frac{٩}{٤}$

● إذا كان $هـ(س) = \frac{٧}{س^{٢} + ب س + ١}$

جد قيم ب التي تجعل $هـ(س)$ متصل.

- الحل: $ب^{٢} - ٤أ ج <$ صفر $\Leftarrow ب^{٢} - ٤ <$ صفر

$\Leftarrow (ب - ٢)(ب + ٢) <$ صفر $\Leftarrow ب = ٢ ، ب = -٢$

+++++ ----- +++++

-٢ ، ٢

$-٢ < س < ٢$ متصل

"سعد الدين البستنجي" ٠٧٩٥٤٢٠٥٤٢ ، ٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦

الجذور

جذري
- فردي: متصل (خاوة).
- زوجي: تحته سالب (صفر ممنوع)، صفر ممنوع

● أمثلة على اتصال الجذور لفردية:

* $هـ(س) = \sqrt[٥]{س + ٥}$: متصل.
* $هـ(س) = \sqrt[٣]{س^{٢} + ١}$: متصل.
* $هـ(س) = \frac{١}{\sqrt{س - ٢}}$: متصل عدا $س = ٢$

----- ○ +++++ $\Leftarrow$

أكبر فترة فيها اتصال $(٢ ، ∞)$.

● أوجد أكبر فترة يكون فيها هـ متصل.

(أ) $هـ(س) = \sqrt{س - ٥}$

$س - ٥ =$ صفر $\Leftarrow س = ٥$ ←+++ | ---→

$\Leftarrow هـ$ متصل حيث $س \in [٥ ، ∞)$ أكبر فترة

(ب) $هـ(س) = \sqrt{٧ - س}$

$٧ - س =$ صفر $\Leftarrow س = ٧$

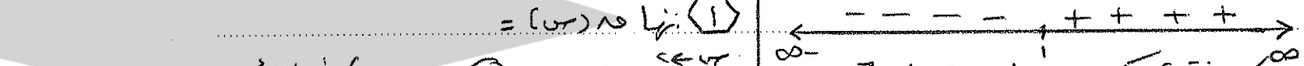
←+++ | ---→

$\Leftarrow$ أكبر فترة يكون فيها هـ متصل $(-∞ ، ٧]$

● إذا كان $هـ(س) = \sqrt{س - ١}$ أوجد أكبر فترة يكون فيها $هـ(س)$ متصل.

subject: القمة مع الأستاذ: سعيد الدين السبتي Date:

توضيح: f غير متصل عند $س = ا$ لكن متصل عندما $س = ا^+$



أكبر فترة يكون فيها f متصل $[ا ، \infty)$

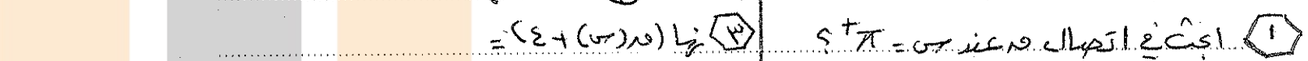
● إذا كان $f(س) = \sqrt{\pi - س}$.

(١) ابحث في اتصال f عند $س = \pi^+$ ؟

← غير متصل عندس $= \pi^+$ لأنه الجذر سالب

(٢) عندس $= \pi^-$: متصل .

(٣) أكبر فترة للاتصال $(-\infty ، \pi]$

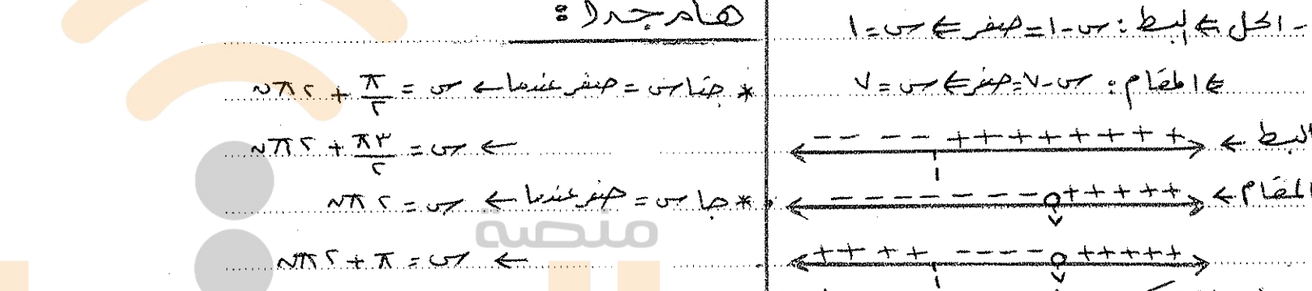


● إذا كان $f(س) = \left| \frac{س - ا}{س - ٧} \right|$

جد أكبر فترة اتصال ...

- الحل ← إبط : $س - ا =$ صفر ← $س = ا$

← المقام : $س - ٧ =$ صفر ← $س = ٧$



← أكبر فترة يكون فيها f متصل $(-\infty ، ا] \cup (٧ ، \infty)$

● إذا كان $f(س) = \left| \frac{س - \pi}{\pi + س} \right|$

ابحث في اتصال $f(س)$ عندس $= \pi^+$ ثم أوجد أكبر فترة يكون فيها f متصلاً ؟

● اتصال الاقتران الدائري:

* جتاس، جاس : متصل على ح .

* $f(س) =$ جا $\left(\frac{ا}{س}\right)$ غير متصل عندس = صفر

* $f(س) =$ جتا $\left(\frac{ا}{س}\right)$ غير متصل عندس = صفر

هام جداً:

* جاس = صفر عندما ← $س = ن\pi + \frac{\pi}{٢}$

← $س = ن\pi + \frac{٣\pi}{٢}$

* جاس = صفر عندما ← $س = ن\pi$

← $س = ن\pi + \pi$

حيث ن : عدد الفات ← ن ∈ ص .

● $f(س) = \frac{٧س + ا}{جاس}$ ، أوجد قيم س التي تجعله f غير متصل ؟

← جاس = صفر ← $س = \{ن\pi + \pi ، ن\pi + ٢\pi : ن \in ص\}$

منصة علم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● الاتصال عند أطراف الفترة المكانية:

* إذا كان $ه(س)$ معرف على الفترة $[P، ب]$

فرضاً لكي شروط خاصة للاتصال عند P أو $ب$:

① $ه(س)$ معرّف عند $س = P$ } متصل عند $س = P$.
② $ه(P) = \lim_{س \to P^+} ه(س)$

① $ه(س)$ متصل عند $ب$ } متصل عند $س = ب$
② $ه(ب) = \lim_{س \to ب^-} ه(س)$

● إذا كان $ه(س)$ معرف على $[٤، ١]$ و

كان $ه(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، ١ \le س \le ٢ \\ ٣س & ، ٢ < س < ٤ \\ ٥ & ، س = ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ١، س = ٤$.

- الحل: ⑤ ٣س ⑤ $س^٢ + ١$ ②
① ١

* الأطراف: * $س = ١$، $ه(١) = ٢$

$\Leftarrow \lim_{س \to ١^+} س^٢ + ١ = ه(١) \Leftarrow ٢ = ٢$

$\therefore ه(س)$ متصل عند $س = ١$.

* $س = ٤$ ، $ه(٤) = ٥$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٤^-} ه(س) = \lim_{س \to ٤^-} ٣س = ١٢$

$\Leftarrow ٥ \neq ١٢ \therefore ه$ غير متصل عند $س = ٤$.

● الاتصال عند نقط المحول:

① $ه(P)$ معرفة.

② النهاية موجودة عند $س = P$

$\Leftarrow \lim_{س \to P^+} ه(س) = \lim_{س \to P^-} ه(س)$

③ $\lim_{س \to P} ه(س) = ه(P)$

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، س \le ٢ \\ ٣س & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$.

- الحل: * $ه(٢) = ٣$ ⇐ معرف.

* $\lim_{س \to ٢^+} ه(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٢ + ١ = ٥$

$\lim_{س \to ٢^-} ه(س) = \lim_{س \to ٢^-} ٣س = ٦$

$\Leftarrow \lim_{س \to ٢^+} ه(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ه(س)$

∴ النهاية غير موجودة عندما $س \to ٢$

∴ $ه(س)$ غير متصل عند $س = ٢$.

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} ٥س & ، س < ٢ \\ س^٣ + ٢ & ، س \ge ٢ \end{cases}$

ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$؟

$\infty-$ ⑤ ٥س ① $س^٣ + ٢$ ∞
٢

$\Leftarrow ه(٢) = ١٠$

$\Leftarrow$ معرفة.

≈ الفصل الرابع ≈

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

subject: "المعدة في الرياضيات" Date:

$\lim_{س \to ٢^+} مد(س) = \lim_{س \to ٢^+} ٥س = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^+} مد(س) = \lim_{س \to ٢^+} س^٣ + ٢ = ١٠$

$\lim_{س \to ٢^-} مد(س) = \lim_{س \to ٢^-} مد(س) = ١٠$

∴ $\lim_{س \to ٢} مد(س)$ متصل عندما س = ٢.

- إذا كان $مد(س) = \begin{cases} \frac{ظا ٧س}{٥س} & ، س \neq ٠ \\ ٩ & ، س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيم (ﻫ) التي تجعل مد متصل عند س = ٠

- الحل: بما أن مد(س) متصل عند س = ٠ فإن

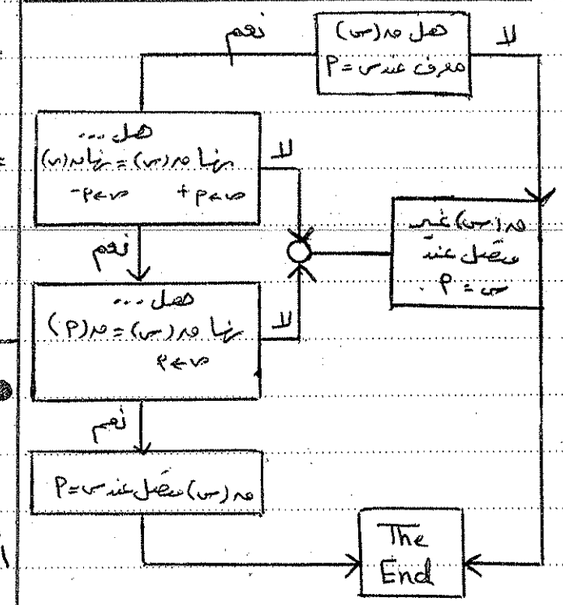
$مد(٠) = \lim_{س \to ٠} مد(س)$

$ﻫ = \lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٧س}{٥س}$ ، ص = ٧س

$س = \frac{ص}{٧}$

$ﻫ = \lim_{ص \to ٠} \frac{ظا ص}{\frac{٥}{٧} ص} = \frac{١}{\frac{٥}{٧}} = \frac{٧}{٥}$

∴ $ﻫ = \frac{٧}{٥}$



- إذا كان $مد(س) = \begin{cases} س^٢ + ﻫ & ، س < ٢ \\ ب س & ، س > ٢ \\ ٧ & ، س = ٢ \end{cases}$

أوجد قيم ﻫ، ب علماً بأن مد متصل عند س = ٢

- الحل: $\lim_{س \to ٢^+} مد(س) = \lim_{س \to ٢^-} مد(س) = مد(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} (س^٢ + ﻫ) = \lim_{س \to ٢^+} (ب س) = ٧$

∴ $\lim_{س \to ٢^-} س^٢ + ﻫ = ٧ \Leftarrow ٤ + ﻫ = ٧ \Leftarrow ﻫ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} ب س = ٧ \Leftarrow ٢ب = ٧ \Leftarrow ب = \frac{٧}{٢}$

- إذا علمت أن $مد(س) = \begin{cases} ﻫ س & ، س \neq ٠ \\ ٢٥ & ، س = ٠ \end{cases}$

وإذا علمت أن مد متصل عند س = ٠ فما قيمة ﻫ؟؟

أ) ٢٥ ب) ٢٥ ج) $\frac{١}{٢٥}$ د) $-\frac{١}{٢٥}$

- إذا كان $مد(س) = \begin{cases} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

ابحث في الاتصال لـ مد(س) عند س = ٣ ؟؟

- الحل: * مد(٣) = ٦ ، معرف عند س = ٣

* $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$\lim_{س \to ٣} س + ٣ = ٣ + ٣ = ٦$

∴ $\lim_{س \to ٣} مد(س) = مد(٣) = ٦$

∴ مد(س) متصل عند س = ٣

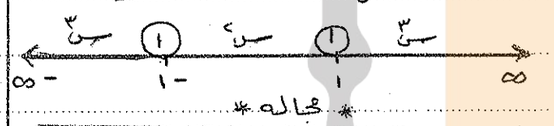
٦٠

NOTE BOOK

ابحث في اتصال $هـ(س)$ على مجاله ...

- الحل: * يجب أن نهدم المطلقة *

$$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} س^2 - 1 & ، س \geq 1 \\ س^3 & ، س < 1 \\ 1 & ، س = \pm 1 \end{cases}$$



* مجاله *

الأطراف لا يوجد	التمثيل	جانبية
	$س = -1$	$س^3$، متصل، $س < -1$
	$س = 1$	$س^2$، متصل، $-1 < س < 1$
		$س^3$، متصل، $س > 1$

* هندنقاط التمثيل:

* هند $س = 1$ .....

$\Leftarrow هـ(1) = 1$ معرف

$\Leftarrow$ نهـ $هـ(س)$ = نهـ $هـ(س) = 1$
$س \to 1^+$ $س \to 1^-$

$\Leftarrow هـ(1) =$ نهـ $هـ(1)$
$س \to 1$

$\therefore هـ$ متصل عند $س = 1$

* هند $س = -1$ .....

$\Leftarrow هـ(-1) = 1$

$\Leftarrow$ نهـ $هـ(س) = 1$ ← اليمين = اليسار
نهـ $هـ(س) = -1$ ← النهاية غير موجودة
$س \to -1^+$ $س \to -1^-$

$\Leftarrow هـ$ غير متصل عند $س = -1$

$$\bullet هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(س-1)^2}}{س-1} & ، س \neq 1 \\ 2 & ، س = 1 \end{cases}$$

ابحث في اتصال $هـ$ عند $س = 1$ ؟

- الحل: $هـ(س) = \begin{cases} \dfrac{س^2 - |س-1|}{س-1} & ، س \neq 1 \\ 2 & ، س = 1 \end{cases}$

$$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س > 1 \\ 2 & ، س = 1 \\ س^2 - 1 & ، س < 1 \end{cases}$$

$\Leftarrow هـ(1) = 2$

$\Leftarrow$ نهـ $هـ(س) =$ نهـ $(س^2 - 1) =$ صفر
$س \to 1^+$ $س \to 1^+$

نهـ $هـ(س) =$ نهـ $(س^2 + 1) = 2$
$س \to 1^-$ $س \to 1^-$

$\Leftarrow$ نهـ $هـ(س)$ غير موجودة

$\Leftarrow هـ$ غير متصل عند $س = 1$

$$\bullet هـ(س) = \begin{cases} |س-1| + 2 & ، |س-1| > 2 \\ 2س & ، |س-1| \leq 2 \end{cases}$$

ابحث في اتصال $هـ$ عند $س = 2$ ، $س = -2$.

- الحل: $هـ(س) = \begin{cases} |س-1| + 2 & ، س > 3 \text{ أو } س < -2 \\ 2س & ، -2 \leq س \leq 3 \end{cases}$

$$\Leftarrow هـ(س) = \begin{cases} س + 2 & ، س > 3 \\ -س + 2 & ، س < -2 \\ 2س & ، -2 \leq س \leq 3 \end{cases}$$

* هند $س = 2$

$\Leftarrow هـ(2) = 4$

$\Leftarrow$ نهـ $هـ(س) =$ نهـ $(س + 2) = 4$
$س \to 2$ $س \to 2$

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

$\lim_{س \to ٢^-}$ مـ(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ (٣س - ١) = ٤

مـ(٢) = $\lim_{س \to ٢^+}$ مـ(س) = ٤

∴ مـ (س) متصل عند س = ٢

---

* عند س = -٢ :

مـ(-٢) = -٤

$\lim_{س \to -٢^+}$ مـ(س) = $\lim_{س \to -٢^+}$ (٣س - ١) = -٤

$\lim_{س \to -٢^-}$ مـ(س) = $\lim_{س \to -٢^-}$ (-س٢ + ٩) = ٤

∵ النهاية عند س = -٢ غير موجودة.

∴ مـ(س) غير متصل عند س = -٢.

● إذا كان مـ(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{٥س} & ، س \neq ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \end{cases}$

متصلاً عند س = صفر، أوجد قيمة ٢.

- الحل : مـ(٠) = $\lim_{س \to ٠}$ مـ(س)

٢ = $\lim_{س \to ٠}$ $\frac{جاس}{٥س}$ ⟸ ٢ = $\frac{١}{٥}$

● إذا كان مـ(س) = $\begin{cases} \frac{اس - ١٣}{س - ٣} & ، س \neq ١ \\ ٢٢ & ، س \leq ١ \end{cases}$

متصلاً عند س = ١، أوجد قيمة ٢ ؟

- الحل: $\lim_{س \to ١^+}$ مـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ مـ(س)

$\lim_{س \to ١^+}$ ٢٢ = $\lim_{س \to ١^-}$ $\frac{اس - ١٣}{س - ٣}$

⟸ $\lim_{س \to ١^+}$ ٢٢ = $\lim_{س \to ١^-}$ $\frac{اس - ١٣}{س - ٣}$

⟸ ٢٢ = ١ - ٢ ⟸ ٢ = $\frac{-١}{٢}$

● إذا كان مـ(س) = $\begin{cases} \frac{٤ - س}{اس - ١٤} & ، س < ٤ \\ ٢س - ٩ & ، س > ٤ \\ ب & ، س = ٤ \end{cases}$

أوجد قيمة ٢، ب علماً أن مـ متصل عند س = ٤.

- الحل : مـ(٤) = $\lim_{س \to ٤^+}$ مـ(س) = $\lim_{س \to ٤^-}$ مـ(س)

⟸ ب = $\lim_{س \to ٤^+}$ $\frac{٤ - س}{اس - ١٤}$ = $\lim_{س \to ٤^-}$ (٢س - ٩)

⟸ ب = -١ = ١٦ ٢ - ٩ ⟸ ب = -١.

⟸ ١٦ ٢ - ٩ = -١ ⟸ ١٦ ٢ = ٨ ⟸ ٢ = $\frac{١}{٢}$

● إذا كان مـ(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{س} & ، س \neq ٠ \\ ١ & ، س = ٠ \end{cases}$

أبحث في اتصال مـ(س) عند س = صفر.

- الحل : |س| = $\begin{cases} س & ، س > صفر \\ -س & ، س < صفر \end{cases}$

⟸ مـ(س) = $\begin{cases} \frac{جاس}{س} & ، س > صفر \\ \frac{جاس}{-س} & ، س < صفر \\ ١ & ، س = صفر \end{cases}$

* مـ(٠) = ١

* $\lim_{س \to ٠^+}$ $\frac{جاس}{س}$ = ١ ، $\lim_{س \to ٠^-}$ $\frac{جاس}{-س}$ = -١

∴ $\lim_{س \to ٠}$ مـ(س) غير موجودة.

∴ مـ(س) غير متصل عند س = صفر

محمد لديه لبستيج
٠٧٨٨٩٨٢٨٦
٠٧٩٥٢٤٠٤٢

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 + هـ(س)، س < 2 \\ 5س ، س \geq 2 \end{cases}$

وكانت $نهـا_{س \to 2^+} هـ(س)$ موجودة، أوجد $نهـا_{س \to 2^+} هـ^2(س)$

أ) ٧ ب) ٦ ج) ٣٦ د) -٥

- الحل: $نهـا_{س \to 2^+} (س^2 + هـ(س)) = نهـا_{س \to 2^+} 5س$

$\Leftarrow 4 + نهـا_{س \to 2^+} هـ(س) = 10$

$\Leftarrow نهـا_{س \to 2^+} هـ(س) = 10 - 4$

$\Leftarrow هـ(2) = 6$

$\Leftarrow نهـا_{س \to 2^+} هـ^2(س) = 36$

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = 2$

$\Leftarrow$ مجموعة $هـ(س)$ غير متصل عند $س = \{2، 13\}$

● إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} \frac{1}{س - 1} ، س \leq 3 \\ 5س ، س > 3 \end{cases}$

جد نقاط عدم الاتصال؟

- الحل: $نهـا_{س \to 3^-} هـ(س) = \frac{1}{2}$ ، $نهـا_{س \to 3^+} هـ(س) = 15$

$\Leftarrow نهـا_{س \to 3} هـ(س)$ غير موجودة.

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = 3$.

✱ نقاط عدم الاتصال:

- في الاقتران المتشعب ... إذا كان المطلوب إيجاد نقاط عدم الاتصال ... نهتم بتقسيم س المكررة فقط ولا نهتم بغيرها.

● إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^2 ، س < 2 \\ 5س ، 2 \leq س < 13 \\ 4 ، س = 13 \end{cases}$

نجد نقاط عدم الاتصال:

- الحل: $\Leftarrow$ نهتم بتقسيم س المكررة وهي:

$\Leftarrow$ عند $س = 2$

$نهـا_{س \to 2^-} هـ(س) = 10$ ، $نهـا_{س \to 2^+} هـ(س) = 4$

$\therefore هـ(س)$ غير متصل عند $س = 2$.

$\Leftarrow$ عند $س = 13$

$نهـا_{س \to 13^-} هـ(س) \neq هـ(13)$

نقاط عدم الاتصال في التطبيق:

- إذا كان $هـ(س) = [\![هـ(س)]\!]$ فإن $هـ(س)$ غير متصل حيث $هـ \not\equiv ص$.

$[\![هـ(س)]\!] = \begin{cases} \text{متصل} ، هـ \equiv ص \\ \text{غير متصل} ، هـ \not\equiv ص \end{cases}$

● إذا كان $هـ(س) = [\![2س]\!]$ جد جميع قيم س التي يكون عندها $هـ$ غير متصل.

- الحل: $2س \not\equiv ص \Leftrightarrow هـ$ غير متصل.

$س \equiv \frac{ص}{2} \Leftrightarrow هـ$ غير متصل

● $هـ(س) = [\![س]\!]$، أوجد قيم س التي تجعل $هـ$ غير متصل.

- الحل: $هـ(س)$ غير متصل عندما $س \not\equiv ص$

subject: النهاية في الرياضيات Date:

● $هـ(س) = [س+٣]$ أوجد قيم س التي تجعل هـ غير متصل.

- الحل: $هـ(س) = [س+٣] = [س] + ٣$ غير متصل عندما $س \notin ص$.

● $هـ(س) = [٢س+١]$ جد جميع قيم س التي يكون عندها هـ غير متصل.

- الحل: $\Leftarrow$ نحلل ونوجد لرقم (١)

هـ غير متصل حيث $٢س \notin ص \Leftarrow س \notin \frac{ص}{٢}$

● $هـ(س) = [\frac{س}{٥}]$ جد قيم س التي تجعل الاقتران هـ(س) غير متصل.

- الحل: $\frac{س}{٥} \notin ص$ غير متصل

$\Leftarrow$ ∴ هـ غير متصل عند $س \notin ص$.

هام جداً:

في الاقتران البسيط .. نقاط عدم الاتصال هي أصفار المقام .. أو القيم التي تجعل المقام يساوي صفر

* جد نقاط عدم الاتصال لكل من الاقترانات التالية:

● $هـ(س) = \frac{٧}{س-١}$ ، هـ غير متصل عند $س = ١$

● $هـ(س) = \frac{س٤}{|س|-٥}$ ، هـ غير متصل حيث

$|س| - ٥ =$ صفر $\Leftarrow |س| = ٥ \Leftarrow س = \pm ٥$

● $هـ(س) = \frac{٧}{[س]-٥}$ ، هـ غير متصل حيث

$[س] = ٥ \Leftarrow ٥ \leq س < ٦$

$\Leftarrow س \in ص$ ∴ هـ غير متصل

● اذا كان $هـ(س) = \frac{١٠}{[س]-٦}$ ، جد قيم (س) التي تجعل هـ غير متصل.

الحل: هـ غير متصل حيث $س \in ص$.

$\Leftarrow [س] - ٦ =$ صفر $\Leftarrow [س] = ٦$

∴ هـ(س) غير متصل حيث $٦ \leq س < ٧$

● اذا كان $هـ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٤ \\ س٤ & ، [س] = ٣ \end{cases}$

أوجد نقاط عدم الاتصال إن وجدت

- الحل: $هـ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٤ \\ س٤ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

(مهم فقط بالكلاس)

$\Leftarrow$ عند $س = ٤$ ، $هـ(س)^+ = ٨$ ، $هـ(س)^- = ١٦$

$\Leftarrow$ هـ(س) غير متصل عند $س = ٤$.

● إذا كان $هـ(س) = [س+١,٣] - [س+٣,٥]$

فأثبت أنه متصل على ع.

- الحل: $\Leftarrow هـ(س) = [س+٣,٥] + ١ - [س+٣,٦]$

$\Leftarrow هـ(س) = ١ \Leftarrow$ ثابت متصل.

NOTE BOOK

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● اذا كان $f(x) = \begin{cases} x^3 , & x < 1 \\ 2x^2 , & x \geq 1 \end{cases}$ ، $x \neq 0$

أوجد نقاط عدم الاتصال:

- اكل: ← نهتم فقط بالنقاط المكررة (المنوال)

$2x^2$ ① x^3 ⓪ $3x^2$

← عند $x = 0$

← $f(0) = 0$

← $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$

∴ f متصل عند $x = 0$

← عند $x = 1$

← $f(1) = 2$

← $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

∴ f غير متصل عند $x = 1$

● $f(x) = \begin{cases} [x+2] , & x = \frac{1}{2} \\ 4x , & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 6x - 2 , & x = 1 \end{cases}$

ابحث في اتصال f على الفترة $[\frac{1}{2} , 1]$.

- اكل: $f(x) = \begin{cases} 2 , & x = \frac{1}{2} \\ 4x , & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 4 , & x = 1 \end{cases}$

* عند $x = \frac{1}{2}$

← $f(\frac{1}{2}) = 2$

← $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim 4x = 2$

$x \to \frac{1}{2}^+$

∴ f متصل عند $x = \frac{1}{2}$

* عند $x = 1$

← $f(1) = 4$

← $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim 4x = 4$

$x \to 1^-$

∴ f متصل عند $x = 4$

* $4x$ كثير حدود ومتصل على $(\frac{1}{2} , 1)$

∴ $f(x)$ متصل على $[\frac{1}{2} , 1]$.

● $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 , & 0 \leq x < 1 \\ [x+1] , & 1 \leq x < 3 \end{cases}$

ابحث في اتصال $f(x)$ على $[0 , 3)$.

- اكل: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 , & 0 \leq x < 1 \\ 2 , & 1 \leq x < 2 \\ 3 , & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

* عند $x = 1$:

← $f(1) = 2$

← $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

∴ f متصل عند $x = 1$

* عند $x = 2$:

← $f(2) = 3$

← $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$ ، $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$

← f غير متصل عند $x = 2$ لأن نهاية غير موجودة.

* عند $x =$ صفر:

← $f(0) = 3$

∴ $f(x)$ متصل عند $x = \frac{1}{2}$

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

← نهاية (س) = ٣

∴ ق (س) متصل عند س = جـ

← ق (س) متصل على [٠، ٣] عدا س = ٢ ،

● ق (س) = { س² + ٢ ، س < ٠ ؛ [س + ٢] ، ٠ ≤ س < ٢ ؛ √(س + ٧) + ٤/س ، س ≥ ٢ }

٢٠٠٤ صيفي — ٦ علامات

أجب في اتصال الاقتران ق ، لكل س ∈ ح .

- الحل : ق (س) = { س² + ٢ ، س < ٠ ؛ ٢ ، ٠ ≤ س < ١ ؛ ٣ ، ١ ≤ س < ٢ ؛ √(س + ٧) + ٤/س ، س ≥ ٢ }

علامة

← ق متصل في (-∞، ٠) ، (٠، ١) ، (١، ٢) كثيرة حدود

كذلك ق متصل في (٢، ∞) لأنه مجال √(س + ٧) هو [-٧، ∞) ولأن ٤/س متصل (٢، ∞)

لأنه جـ ∉ (٢، ∞) . علامة

* عند س = جـ :

← ق (٠) = ٢ ، ٢ علامة

← نهاية ق (س) = ٢ ، نهاية ق (س) = ٢

∴ ق (س) متصل عند س = جـ

* عند س = ١ :

← ق (١) = ٣

← نهاية ق (س) = ٣ ، نهاية ق (س) = ٢

∴ ق (س) غير متصل عند س = ١ علامة

* عند س = ٢ :

← ق (٢) = ٥

← نهاية ق (س) = ٥ ، نهاية ق (س) = ٣

∴ ق (س) غير متصل عند س = ٢ علامة

← ق متصل لجميع قيم س الحقيقية عدا س = ١ ، ٢ .

● إذا كان ق (س) = أس - [س] + [س] ،

أثبت أن ق متصل دائماً .

- الحل : ق (س) = س - [س] + [س] = س

وذلك لأن [س] دائماً ∈ ص .

نظرية :

- إذا كانا ق (س) ، هـ (س) متصلين عند س = ج فإن :

١) ق (س) + هـ (س) متصل عند س = ج .

٢) ق (س) - هـ (س) متصل عند س = ج .

٣) جـ ق (س) متصل عند س = ج حيث جـ ∈ ح .

٤) ق (س) × هـ (س) متصل عند س = ج .

٥) ق (س) / هـ (س) متصل عند س = ج ، هـ (ج) ≠ ٠ .

أسئلة الاتصال

- مباشر: ق متصل
- مش متصل
  - أحدهما غير متصل
  - كلاهما غير متصل

● إذا كان ق (س) = { س² + ٢ ، س < ٢ ؛ ٣س ، س ≥ ٢ }

نسخة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

وكان هـ(س) = { س² ، س ≠ ٢ ؛ ٤ ، س = ٢ }

ابحث في الاتصال (ق + هـ)(س) عند س = ٢؟

الحل: * أولاً: نبحث في اتصال ق عند س = ٢

← ق(٢) = ٦ معرف

← نهـا ق(س) = نهـا ق(س) = ٦

← نهـا ق(س) = ق(٢) = ٦

∴ ق(س) متصل عند س = ٢

* ثانياً: نبحث في اتصال هـ عند س = ٢

← هـ(٢) = ٤ معرف

← نهـا هـ(س) = نهـا هـ(س) = ٤

← نهـا هـ(س) = هـ(٢) = ٤

∴ هـ(س) متصل عند س = ٢

* بما أن ق(س) متصل عند س = ٢ & هـ(س) متصل عند س = ٢ ، لذلك فإن (ق + هـ)(س) متصلة عند س = ٢

∴ ق + هـ متصل عند س = ٣

* نبحث ثانياً في اتصال هـ عند س = ٣

← هـ(س) متصل لأنه كثير حدود.

∴ (ق × هـ)(س) متصل عند س = ٣

● إذا كان ق(س) = { س² - ٩ / س - ٣ ، س ≠ ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

وكان هـ(س) = س + ١ ، ابحث في اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٣

* نبحث أولاً في اتصال ق عند س = ٣

← ق(٣) = ٦ معرف

← نهـا ق(س) = نهـا (س - ٣)(س + ٣) / (س - ٣) = ٦

س ← ٣ ، س ≠ ٣

← نهـا ق(س) = ق(٣) = ٦

س ← ٣

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

* هـ(س) = س + ١ متصل عند س = ٣ (ليست تحول)

* ق(س) = س² - ٩ / س - ٣ كثير حدود متصل عند س = ٣ وبالتالي فإنه .....

← (ق × هـ)(س) متصل عند س = ٣ .

● إذا كان ق(س) = { س² + ٣ / ٢س + ٤ ، س ≠ ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

وكان هـ(س) = س² + ٥ ، ابحث عند اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٣؟؟

- الحل: * لاحظ أنه ق(س) غير متصل عند س = ١ ، ولكنه متصل عند س = ٣ لأنه ...

* ق(س) = س² + ٣ عند س = ٣ (ليست تحول)

* هـ(س) = س² + ٥ كثير حدود متصل عند س = ٣ وبالتالي فإنه .....

← (ق × هـ)(س) متصل عند س = ٣ .

● إذا كان ق(س) = { س² + ٣ / ٢س + ٤ ، س ≠ ٣ ؛ ٦ ، س = ٣ }

ابحث عند اتصال ق عند س = ٣.

- الحل: ← س² + ٣ كثير حدود متصل عند س = ٣

← ٢س + ٤ كثير حدود متصل عند س = ٣

حيث ٢ × ٣ + ٤ = ١٠ ≠ ٦ صفر .

∴ ق(س) متصل عند س = ٣

★ نظرية هامة: إذا كان أحد الاقترانين ق ، هـ ، أو كلاهما غير متصل فإنه ...

$\frac{ه}{ه}$ ، $ه \times ه$ ، $ه - ه$ ، $ه + ه$

يمكن أن يكون متصل أو أن يكون غير متصل.

● إذا كان $ه(س) = س$ ، $ه(س) = \begin{cases} ٥س + ١ & ، س < ٠ \\ ٣س - ١ & ، س > ٠ \end{cases}$

ابحث في اتصال $(ه \times ه)(س)$ عند $س = صفر$

- الحل: $ل = ه \times ه = \begin{cases} ٥س^٢ + س & ، س < ٠ \\ ٣س^٢ - س & ، س > ٠ \end{cases}$

$\leftarrow ل(٠) = صفر$

$\leftarrow$ نهـا $ل(س)$ = نهـا $ل(س) = صفر$

$\therefore ل(س)$ متصل عند $س = ٠$ $\leftarrow$ $\therefore (ه \times ه)(س)$ متصل عند $س = ٠$

● $ه(س) = \frac{س - ٣}{[س]}$ ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٣$.

- الحل: $[س] = \begin{cases} ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\leftarrow ه(س) = \begin{cases} \frac{س - ٣}{٢} & ، ٢ \leq س < ٣ \\ \frac{س - ٣}{٣} & ، ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

$\leftarrow ه(٣) = ٠$

$\leftarrow$ نهـا $ه(س) = ٠$ ، نهـا $ه(س) = ٠$

$\therefore ه(س)$ متصل عند $س = ٣$ $\leftarrow$ نهـا $ه(س)$ = نهـا $ه(س)$

● $ه(س) = \frac{|س - ٢|}{[س]}$ ، ابحث في اتصالها عند $س = ٠.٥$

- الحل: $[س] = \begin{cases} ٤ & ، ٤ \leq س < ٥ \\ ٥ & ، ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$

$\leftarrow ه(س) = \begin{cases} \frac{س - ٢}{٤} & ، ٤ \leq س < ٥ \\ \frac{س - ٢}{٥} & ، ٥ \leq س < ٦ \end{cases}$

$\leftarrow ه(٥) = \frac{٣}{٥}$ $\leftarrow$ نهـا $ه(س) = \frac{٣}{٥}$ $\leftarrow$ نهـا $ه(س) = \frac{٣}{٤}$ $\leftarrow$ النهايتان غير متساويتان

$\therefore ه(س)$ غير متصل عند $س = ٥$

● $ه(س) = \frac{|س - ١٣|}{[س]}$ ، ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$.

- الحل: $ه(س) = \frac{-س + ٣}{[س]} = \begin{cases} -س + ٣ & ، ١ \leq س < ٢ \\ \frac{-س + ٣}{٢} & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\leftarrow ه(٢) = \frac{١}{٢}$

$\leftarrow$ نهـا $ه(س) = \frac{١}{٢}$ ، نهـا $ه(س) = ١$

$\leftarrow$ النهاية غير موجودة ، $ه$ غير متصل عند $س = ٢$

● إذا كان $ه(س) = \frac{|س - ١٢|}{[س]}$ ، ابحث في اتصال $ه(س)$ عند $س = ٢$.

- الحل: $|س - ١٢| = \begin{cases} -س + ٢ & ، س \leq ٢ \\ س - ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$

$[س] = \begin{cases} ١ & ، ١ \leq س < ٢ \\ ٢ & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\leftarrow ه(س) = \begin{cases} \frac{-س + ٢}{١} & ، ١ \leq س < ٢ \\ \frac{س - ٢}{٢} & ، ٢ \leq س < ٣ \end{cases}$

$\leftarrow ه(٢) =$ صفر

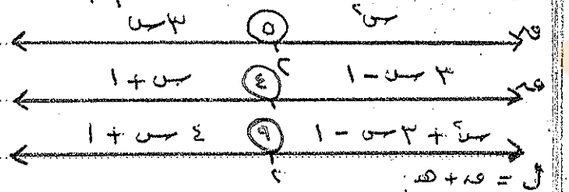
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: الفترة في الرياضيات Date:

← نهاية (س) = صفر ، نهاية (س) = صفر
س ← ٢+ ، س ← ٢-
∴ هـ (س) متصل عند س = ٢ .

● إذا كان هـ (س) = { س² ، س < ٢ ; ٣س ، س > ٢ ; ٥ ، س = ٢ }
و كان و (س) = { ٣س - ١ ، س < ٢ ; س + ١ ، س > ٢ ; ٤ ، س = ٢ }
أبحث عند اتصال (هـ + و) (س) عند س = ٢ ؟؟

- الحل : لاحظ أن هـ ، و غير متصلان عند س = ٢ ، لذلك لا نستخدم النظرية ١



← ل (٢) = ٩
← نهاية ل (س) = نهاية (س² + ٣س - ١) = ٩
س ← ٢+ ، س ← ٢+
نهاية ل (س) = نهاية (٤س + ١) = ٩
س ← ٢- ، س ← ٢-
∴ ل (٢) = نهاية ل (س) = ٩
س ← ٢
⇐ ل (س) = (هـ + و) (س) متصل عند س = ٢

★ لاحظ في المثال السابق أن هـ و و غير متصلان عند س = ٢ لكن وجدنا أن (هـ + و) (س) متصل عند س = ٢ ★

● إذا كان هـ ، و متصلين عند س = ٢ ،
أثبت أن هـ + و متصل عند س = ٢ .

- الحل : * هـ متصل عند س = ٢
⇐ هـ (٢) = نهاية هـ (س) .
س ← ٢
* و متصل عند س = ٢
⇐ و (٢) = نهاية و (س) .
س ← ٢
⇐ (هـ + و) (٢) = هـ (٢) + و (٢) .
⇐ نهاية (هـ + و) (س) = نهاية هـ (س) + نهاية و (س)
س ← ٢ ، س ← ٢ ، س ← ٢
= هـ (٢) + و (٢) .
∴ نهاية (هـ + و) (س) = (هـ + و) (٢)
س ← ٢
∴ (هـ + و) (س) متصل عند س = ٢

منصة التعليمية AL QALAM EDUCATION

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} 5 - 3س^2 ، & س < -1 \\ 2س + 1 ، & س \geq -1 \end{cases}$

$هـ(س) = \begin{cases} 4س + 3 ، & س < -1 \\ س^2 + 1 ، & س \geq -1 \end{cases}$

(س) كان ل (س) = ه (س) + هـ (س) فابحث في اتصال ل (س) عند س = -1

- الحل: ه: $2س + 1$ ← (-1) ← $5 - 3س^2$

هـ: $س^2 + 1$ ← (-1) ← $4س + 3$

ل = ه + هـ: $س^2 + 2س + 2$ ← (-1) ← $-3س^2 + 4س + 8$

← نلاحظ أن ه غير متصل عند س = -1 لذلك نلجأ إلى إيجاد ه + هـ ثم نبحث في اتصال ل (س) = ه (س) + هـ (س).

← $ل(س) = \begin{cases} س^2 + 2س + 2 ، & س \geq -1 \\ -3س^2 + 4س + 8 ، & س < -1 \\ 1 ، & س = -1 \end{cases}$ (علاقة)

← ل (-1) = 1 معرّف (علاقة)

← نهـا ل (س) = نهـا $س^2 + 2س + 2$ = 1 (علاقة)

← نهـا ل (س) = نهـا $-3س^2 + 4س + 8$ = 1 (علاقة)

← نهـا ل (س) = 1 (علاقة)

← نهـا ل (س) = ل (-1) ← ل متصل عند س = -1

← ل (س) = (ه + هـ) (س) متصل عند س = -1

● ه (س) = $\begin{cases} س^2 - 2 ، & س < 1 \\ 2 - 2س ، & س \geq 1 \end{cases}$ (2.1 مشتوي)

وكان هـ (س) = 15 - 3 ه (س)، ابحث في اتصال هـ (س) عند س = 1.

- الحل: ← نبحث في اتصال ه عند س = 1

← ه (1) = $2 - 3(1) = -1$

← نهـا ه (س) = نهـا $(س^2 - 2) = -1$

← نهـا ه (س) = نهـا $(2 - 3س)$ = -1 (+1 ← س)

← ه (1) = نهـا ه (س) = -1 (-1 ← س)

∴ ه (س) متصل عند س = 1

← 3 ه متصل عند س = 1، (15) متصل عند س = 1، هـ (س) متصل عند س = 1، ناتج ضرب متصلين متصل.

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 ، & س < 2 \\ 3س - 2 ، & س \geq 2 \end{cases}$ (2.2 مشتوي، 4 علامات)

$هـ(س) = س^3 - 1$، بيّن أن ه × هـ متصل عند س = 2.

← هـ (س) كثير حدود متصل عند س = 2

← ه (2) = $6 - 2 = 4$

نهـا ه (س) = نهـا $3س - 2 = 4$

نهـا ه (س) = نهـا $س^2 = 4$

← نهـا ه (س) = ه (2) = 4

∴ ه (س) متصل عند س = 2

← ه (س) × هـ (س) متصل عند س = 2 لأنه يتكون من حاصل ضرب اقترانيه متصليه.

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

سعد الدين البشتبي
٠٧٩٥٤٤٠٥٤٤
٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦

subject: Date:

● $ه(س) = \begin{cases} -١ & ، س < ١ \\ \text{صفر} & ، س = ١ \\ ١ & ، س > ١ \end{cases}$ (٤ بنود، مستوى، ٦ علامات)

إذا كان $هـ(س) = س^{٢} ه(س)$، فأثبت أن $هـ$ متصل لجميع قيم $س$ الحقيقية:

- الحل: $هـ(س) = \begin{cases} -س^{٢} & ، س < ١ \\ \text{صفر} & ، س = ١ \\ س^{٢} & ، س > ١ \end{cases}$

← $هـ(س)$ متصل لكل $س > ١$، كثيرحدود (علاقة)

← $هـ(س)$ متصل لكل $س < ١$، كثيرحدود (علاقة)

← $\lim_{س \to ١} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{+}} س^{٢} = ١$ (علاقة)

$\lim_{س \to ١} هـ(س) = \lim_{س \to ١^{+}} -س^{٢} = -١$ (علاقة)

← $\lim_{س \to ١^{-}} هـ(س)$ غير موجودة (علاقة)

∴ $ه(س)$ غير متصل عند $س = ١$ (علاقة)

∴ $ه(س)$ متصل على $ح - \{١\}$.

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} \frac{٥ جا ٣س}{٣س} & ، س \neq \text{صفر} \\ \frac{٣}{٥} & ، س = \text{صفر} \end{cases}$

فأثبت أن $هـ(س) = ٥س + \frac{١}{ه(س)}$، غير متصل عند $س = \text{صفر}$.

- الحل: $هـ(س) = ٥س + \frac{١}{ه(س)}$

← $هـ(٠) = ٥(٠) + \frac{١}{ه(٠)} = \text{صفر} + \frac{١}{\frac{٣}{٥}}$

$\therefore هـ(٠) = \frac{٥}{٣}$

← $\lim_{س \to ٠} هـ(س) = \lim_{س \to ٠} \left(٥س + \frac{١}{ه(س)}\right)$

$= ٥(٠) + \frac{١}{\frac{٥}{٣}}$

$= \frac{٣}{٥}$

← $هـ(٠) \neq \lim_{س \to ٠} هـ(س)$

حيث أن النهاية $= \frac{٣}{٥}$ والصورة $= \frac{٥}{٣}$

∴ $هـ(س)$ غير متصل عند $س = \text{صفر}$.

← $ه(س)$ غير متصل عند $س = ؟$

← $هـ(س)$ غير متصل عند $س = ؟$

← لكن حاصل جمع $ه + هـ$ متصل.

● خاتمة حول العبارة التالية ...

إذا كان $ه + هـ$ متصل عند $س = ٢$

فإنه كلاً من $ه$ ، $هـ$ متصل عند $س = ٢$

- الحل: عبارة خاطئة ...

- لاحظ أنه $ه(س) = [س] + ٦$

$هـ(س) = -[س]$

فإن $(ه + هـ)(س) = ٦$ متصل عند $س = ٢$ لكن ...

منصة القلم الإلكترونية AL QALAM EDUCATION

* التغير ومتوسط التغير

* التغير في السينات : $\Delta س = س_2 - س_1 = هـ$

* التغير في الاقتران (التغير في ص) : $\Delta ص$

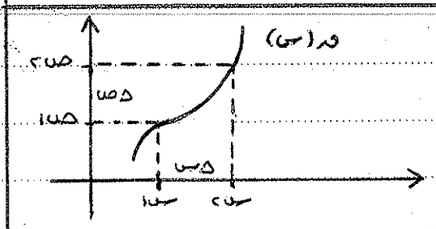
$\Delta ص = ص_2 - ص_1 = ه(س_2) - ه(س_1)$

قاعدة

$\Delta س = س_2 - س_1$ $\quad$ $\Delta ص = ص_2 - ص_1$

التغير في السينات $\quad$ $\Delta ص = ه(س_2) - ه(س_1)$

* $ص_2 = ه(س_2)$
* $ص_1 = ه(س_1)$



متوسط التغير

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(س_2) - ه(س_1)}{س_2 - س_1}$ $\quad$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(س + هـ) - ه(س)}{هـ}$

* تستخدم إذا علمت قيم س التي تغيرت
* تستخدم إذا لم تعلم هـ قيم س التي تغيرت

* $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(ع) - ه(س)}{ع - س}$

● إذا كان $ه(س) = س^3 + 1$ ، أوجد متوسط التغير إذا تغيرت س من ١ إلى ٣ ؟

- الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(س_2) - ه(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{ه(3) - ه(1)}{3 - 1} = \frac{55 - 3}{2} = \frac{52}{2} = 26$

● إذا كان $ه(س) = \frac{1}{س}$ ، $س \neq$ صفر، وتغيرت س من $\frac{1}{2}$ إلى $\frac{1}{3}$ ، أوجد متوسط التغير ؟

● إذا كان $ه(س) = \sqrt{س}$ وتغيرت س في الفترة $[4, 9]$ ، أوجد متوسط التغير ؟

● إذا كان $ه(س) = جتا س$ وتغيرت س من $\pi 2 \leftarrow \pi$ أوجد التغير في الاقتران ؟

- الحل : $\Delta ص = ه(س_2) - ه(س_1)$

$\Delta ص = ه(\pi 2) - ه(\pi)$

$= جتا(\pi 2) - جتا(\pi)$

$\Delta ص = 1 - -1 = 2$

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \geq 3 \\ 2س & ، 3 > س \geq 5 \end{cases}$

أوجد متوسط التغير في الفترة $[2, 4]$.

الحل : $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ه(س_2) - ه(س_1)}{س_2 - س_1}$

$= \frac{ه(4) - ه(2)}{4 - 2}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{8 - 4}{2} = 2$

* مساحة المربع = (الضلع)^2 $\Leftarrow ه(س) = س^2$
* حجم المكعب = (الضلع)^3 $\Leftarrow ه(س) = س^3$
* مساحة الدائرة = π نق^2 $\Leftarrow ه(س) = \pi س^2$

القمة في الرياضيات سعد الدين السبعي الثانوية

subject: Date:

* مساحة المثلث ← هـ(س) = $\frac{1}{4}$ س^2 جا ٦٠
هـ(س) = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ س^2 (مثلث متساوي الأضلاع)

● أوجد متوسط التغير في حجم مكعب إذا تغير طول ضلعه ص من ١ إلى ٣ ؟

- الحل: هـ(س) = س^3

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{هـ(س_2) - هـ(س_1)}{س_2 - س_1}$ = $\frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1}$

= $\frac{27 - 1}{2}$ = $\frac{26}{2}$ = ١٣

● أوجد متوسط التغير في مساحة دائرة إذا تغير طول نصف قطرها من ١ سم إلى ٣ سم ؟ (* هـ(س) = π س^2)

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1}$ = $\frac{9\pi - 1\pi}{2}$

= $\frac{8\pi}{2}$ = ٤π سم^2

● أوجد متوسط التغير في مساحة مربع إذا تغير طول ضلعه من ١ إلى ٥ ؟

● هـ(س) = { ٢س - ١٥ ، س < ١٠
[س + ٣] ، س ≥ ١٠ }

أوجد متوسط التغير في الفترة [٧ ، ١٣] ؟

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{هـ(13) - هـ(7)}{13 - 7}$

= $\frac{|15 - 13| - [7 + 3]}{6}$ = $\frac{8 - 10}{6}$ = $\frac{-2}{6}$ = $\frac{-1}{3}$

● إذا كانت هـ(س) = س^2 وتغيرت س من ١ إلى ١ + هـ ، أوجد متوسط التغير ؟

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{هـ(1+هـ) - هـ(1)}{هـ}$

= $\frac{(1+هـ)^2 - 1}{هـ}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = $\frac{1 + 2هـ + هـ^2 - 1}{هـ}$ = $\frac{هـ(2+هـ)}{هـ}$ = ٢ + هـ

★ متوسط تغير (هـ + هـ) = متوسط تغير هـ + متوسط تغير هـ

* إذا كان متوسط تغير هـ(س) = أ

وكان متوسط تغير هـ(س) = ب فإن

* متوسط تغير (هـ + هـ) = أ + ب

* متوسط تغير (هـ - هـ) = أ - ب

* متوسط تغير (٢هـ + ٣هـ) = ٢أ + ٣ب

* متوسط تغير هـ × هـ ≠ أ × ب

* متوسط تغير $\frac{هـ}{هـ}$ ، $\frac{أ}{ب}$

● إذا كان متوسط تغير هـ(س) في الفترة [١ ، ٣] = ٢٠ ، وعلمت أن :
ل(س) = هـ(س) + س^2 ، أوجد متوسط تغير ل(س) في نفس الفترة .

- الحل: متوسط ل = متوسط هـ + متوسط س^2

= ٢٠ + متوسط س^2

متوسط س^2 = $\frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1}$ = $\frac{9 - 1}{2}$ = ٤

NOTE BOOK
منصة العلم التعليمية AL-ALLAM EDUCATION

∴ متوسط ل = ٢٠ + ٤ = ٢٤.

★ متوسط التغير للاقتران الثابت = صفر ★

● إذا كان مـ(س) = ٧، أوجد متوسط التغير؟

● إذا كان متوسط التغير للاقتران مـ(س) في الفترة [٢، ٤] = ١٠، أوجد متوسط التغير للاقتران هـ(س) = مـ(س) + س٢ + ٥؟

- الحل: متوسط التغير = متوسط مـ + متوسط س٢

متوسط س٢ = $\frac{١٦-٤}{٤-٢}$ = ٦

∴ متوسط هـ = ١٠ + ٦ = ١٦.

● إذا كان متوسط التغير للاقتران مـ(س) في الفترة [١، ٤] = ٧ وكان الاقتران هـ(س) = ٢مـ(س) + ٨ فما متوسط تغير هـ(س) في الفترة [١، ٤]؟

- الحل: متوسط تغير هـ = ٢ × متوسط تغير مـ + متوسط تغير ٨

= ٢ × ٧ + متوسط تغير الثابت

= ١٤ + ٠ = ١٤.

● إذا كان مـ(س) = س٢، وكان متوسط التغير في الفترة [١، ٢] = ٥، أوجد ﺏ؟

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{مـ(ﺏ) - مـ(١)}{ﺏ - ١}$ ← $\frac{ﺏ^٢ - ١}{ﺏ - ١} = ٥$

$\frac{(ﺏ+١)(ﺏ-١)}{(ﺏ-١)} = ٥$ ← ﺏ + ١ = ٥ ← ﺏ = ٥ - ١ = ٤

● مـ(س) = { س٢ + ٣ ، ١ ≤ س < ٢ ; ٣س + ١ ، ٢ ≤ س ≤ ٤ }

وكان متوسط التغير في الفترة [١، ٤] يساوي ٧، أوجد قيمة الثابت ﺏ؟

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{مـ(س٢) - مـ(س١)}{س٢ - س١}$

$٧ = \frac{مـ(٤) - مـ(١)}{٤ - ١}$ ← $٧ = \frac{(٣ﺏ+١) - ٤}{٣}$

٢١ = ٣ﺏ + ١ - ٤ ← ٢١ = ٣ﺏ - ٣

٢٤ = ٣ﺏ ← ﺏ = ٦

● إذا كان مـ(س) = س٢، أوجد متوسط التغير؟

- الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{مـ(س + هـ) - مـ(س)}{هـ}$

$= \frac{(س + هـ)^٢ - س^٢}{هـ} = \frac{س^٢ + ٢هـس + هـ^٢ - س^٢}{هـ}$

$= \frac{٢هـس + هـ^٢}{هـ} = \frac{هـ(٢س + هـ)}{هـ}$

∴ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = ٢س + هـ.

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

سعد الدين المستيري ← ٠٧٨١٨٩٨٥٨٦ ، ٠٧٩/٥٤٢٠٥٤٢

subject: Date:

● إذا كان $هـ(س) = |س|$ ، أوجد متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = هـ(س) + ٥س$

- الحل: متوسط تغير هـ = متوسط تغير هـ + متوسط تغير ٥س.

★ متوسط التغير للاقتران الخطي = معامل س

متوسط تغير هـ = متوسط تغير هـ + ٥

$$\text{متوسط تغير } |س| = \frac{هـ(س+هـ) - هـ(س)}{هـ}$$

$$= \frac{|س+هـ| - |س|}{هـ} \times \frac{|س+هـ| + |س|}{|س+هـ| + |س|}$$

$$= \frac{س+هـ - س}{هـ(|س+هـ| + |س|)} = \frac{١}{|س+هـ| + |س|}$$

∴ متوسط تغير هـ $= \frac{١}{|س+هـ| + |س|} + ٥$

● جد متوسط التغير في مساحة المربع إذا تغير طول ضلعه بمقدار ٥س؟

- الحل: $هـ(س) = س^٢$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{هـ(س+٥س) - هـ(س)}{٥س}$$

$$= \frac{(س+٥س)^٢ - س^٢}{٥س}$$

$$= \frac{س^٢ + ٢س(٥س) + (٥س)^٢ - س^٢}{٥س} = ٢س + ٥س$$

* هناك أسماء أخرى لمتوسط التغير:

① السرعة المتوسطة للجسم.

ب) ميل القاطع الواصل بين النقطتين (م، هـ(م))، و (ب، هـ(ب)).

● يتحرك جسيم حسب العلاقة: $ف = ن^٢ + ٥ن + ١$، حيث ف بالأمتار، و ن بالثواني، أوجد متوسط السرعة في $[١، ٣]$.

- الحل: $\frac{\text{متوسط تغير ص}}{\text{متوسط تغير س}} = \frac{\text{متوسط تغير ف}}{\text{متوسط تغير ن}} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١}$

$$= \frac{٢٥ - ٧}{٢}$$

$\frac{\text{متوسط تغير ف}}{\text{متوسط تغير ن}} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ م/ث.

● إذا كانت مسافة الأمواج الصادرة عن انفجار قنبلة تخضع للقاعدة: $ف(ن) = ن^٢ + ٢ن$، حيث ف بالأميال و ن بالثواني، و $ن \in [٠، ٣٠]$، أوجد:

① المسافة التي تقطعها الأمواج.

② متوسط التغير في سرعة الأمواج خلال العشر ثواني الأولى.

③ متوسط التغير في سرعة الأمواج خلال الفترة الزمنية.

④ الزمن اللازم للأمواج لقطع مسافة ٨ ميل.

- الحل: ① $ف(٣٠) = (٣٠)^٢ + ٦٠ = ٩٦٠$ ميل.

② $\frac{\text{متوسط تغير ف}}{\text{متوسط تغير ن}} = \frac{ف(١٠) - ف(٠)}{١٠} = \frac{١٢٠}{١٠} = ١٢$ ميل/ث.

③ $\frac{\text{متوسط تغير ف}}{\text{متوسط تغير ن}} = \frac{ف(٢٠) - ف(٠)}{٣٠ - ٠} = \frac{٣٢٠}{٣٠}$ ميل/ث.

NOTE BOOK
منصة السلام التعليمية AL-SALAM EDUCATION

④ $ن^2 + 2ن = 8 \leftarrow ن^2 + 2ن - 8 = 0$

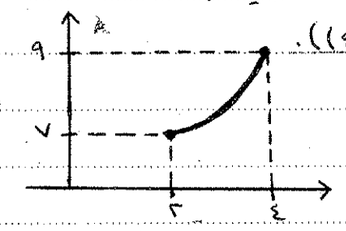
$ن = 2$ ✓ ، $ن = -4$ يهمل

● إذا كان $هـ(س) = س^2 + س + 5$، أوجد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(1، هـ(1))$ و $(3، هـ(3))$ ؟

- الحل: $\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{هـ(3) - هـ(1)}{3 - 1}$

$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{17 - 7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

● الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران في الفترة $[2، 4]$، أوجد ميل القاطع الواصل بين النقطتين $(2، هـ(2))$ و $(4، هـ(4))$.

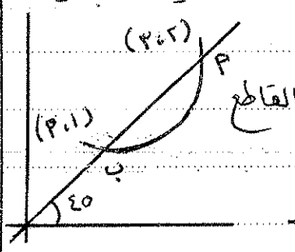


- الحل:

متوسط التغير = ميل القاطع

$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{هـ(4) - هـ(2)}{4 - 2} = \frac{9 - 7}{2} = 1$

● اعتماداً على الشكل التالي، أوجد قيمة الثابت P ؟



* متوسط التغير = ميل القاطع

$= ظا 45 = 1$

$1 = \frac{هـ(2) - هـ(1)}{2 - 1}$

$1 = \frac{3 - P}{1} \leftarrow 3 - P = 1 \leftarrow P = 2$

● إذا كان قانون الطلب لسلعة ما يعطى وفق العلاقة $ص = \frac{P - س^2}{ب}$، حيث $ص$ الكمية المطلوبة و $س$ سعر السلعة، أوجد مقدار التغير في الكمية بالنسبة للسعر عندما يكون سعر السلعة 5 دنانير ؟

- الحل: $\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{هـ(س + هـ) - هـ(س)}{هـ}$

$= \frac{\frac{P - (س + هـ)^2}{ب} - \frac{P - س^2}{ب}}{هـ} = \frac{P - (س + هـ)^2 - P + س^2}{ب هـ}$

$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{P - س^2 - 2هـس - هـ^2 - P + س^2}{ب هـ}$

$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{-2س - هـ}{ب} \leftarrow \left| \frac{ص\Delta}{س\Delta} \right|_{س=5} = \frac{-10 - هـ}{ب}$

● إذا كان مقدار متوسط التغير للاقتران $هـ(س) = 2س^2 + س - 1$، يساوي 4 عندما $س = س_1$، $\Delta س = 1$، فجد قيمة $س_1$ ؟

$\frac{ص\Delta}{س\Delta} = \frac{هـ(س_1 + هـ) - هـ(س_1)}{هـ}$

$= هـ(س_1 + 1) - هـ(س_1)$

$2(س_1 + 1)^2 + (س_1 + 1) - 1 - (2س_1^2 + س_1 - 1) = 4$

$2س_1^2 + 4س_1 + 2 + س_1 - 2س_1^2 - س_1 + 1 = 4$

$4س_1 + 3 = 4 \leftarrow 4س_1 = 1 \leftarrow س_1 = \frac{1}{4}$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: التفاضل والتكامل Date:

★ اختبار قصير ★

● إذا كان هـ(س) = [س+٣] حيث س = ٢ والتغير في الفئات ٥ فإن متوسط التغير لـ هـ(س):

(أ) صفر ب) ٣ جـ) ٥ د) ٥

● إذا كان متوسط التغير للاقتران:

هـ(س) = { ٤س+٦ ، إذا س < ٣ ; ٣س ، ٣ ≤ س ≤ ٧ }

الفترة [٤،٢] تساوي ٥ فإن قيمة أ =

أ) -٥ (ب) ٥ جـ) ٣ د) -٣

● إذا كان متوسط تغيره يساوي ١٠ وكان متوسط تغيره يساوي ٧ فإن متوسط تغير ٢هـ + ١٠ هـ يساوي:

أ) ٥٠ ب) ١٧ جـ) ٣٠ (د) ٩٠

● إذا كان متوسط تغير هـ(س) = ٩ فإن [٢،١] يساوي ١٠ أوجد قيمة أ ؟

(أ) ٩ ب) -٩ جـ) ٨ د) ٢

● إذا كان هـ(س) = ظاس وتغيرت س عن س إلى س+هـ ، أثبت أن متوسط التغير هو قاس ظاهـ

هـ (١ - ظاس ظاهـ)

● إذا كان هـ(س) اقتران خطي معرف على الفترة [ل، م] وكان متوسط التغير لـ هـ(س) = ٣ ، و هـ(١) = ٥ ، أوجد هـ(٢)

(أ) ٨ (ب) ١١ جـ) ٢ د) ٣

● يتحرك جسيم في خط مستقيم حيث يقطع في زمن ن ثانية مسافة قدرها: ف(ن) = ن² مقدرة بالأمتار احسب: التغير في الإزاحة ف عندما ن = ٤ .

- الحل: ∆ف = ف(١٨ + ∆ن) - ف(١٨)

∆ف = ف(٤ + ∆ن) - ف(٤)

$\Delta ف = \frac{(٤ + \Delta ن)^٢}{١ + ٢\Delta ن + ٤} - \frac{١٦}{٥}$

$\Delta ف = \frac{٥(١٦ + ٥\Delta ن + (\Delta ن)^٢) - ٨٠ - ٥\Delta ن}{٥(٥ + \Delta ن)}$

$\Delta ف = \frac{٢٤\Delta ن + (\Delta ن)^٢ ٥}{٢٥ + ٥\Delta ن}$

★ المشتقة الأولى ★

● رموز المشتقة الأولى للاقتران:

ص = هـ(س) هي:

هـ'(س)، ص'، $\frac{د ص}{د س}$، $\frac{د هـ(س)}{د س}$، $\frac{د}{د س}$ هـ(س)، $\lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$

● يمكن تفسير المشتقة الأولى بمعدل تغير هـ بالنسبة لـ س عند س = س١ .

● إذا كانت النهاية غير موجودة عند س١ فإن الاقتران غير قابل للاشتقاق عند س١

★ تعريف المشتقة الأولى ★

● هـ'(س) = نهاية متوسط التغير ، هـ ← ٠

منصة الدلام التعليمية AL-DALLAM EDUCATION

subject: سؤال الدرس المستثنى Date:

● $ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

● $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

● إذا طلبت المشتقة الأولى عند نقطة فجد أولاً $ق'(س)$ ثم نعوض النقطة أو تستخدم أحد القانونين التاليين:

$ق'(س) = \lim_{هـ \to 0} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$

$ق'(س_1) = \lim_{س \to س_1} \frac{ق(س) - ق(س_1)}{س - س_1}$

● $\lim_{ع \to س} \frac{ع^2 + 5ع س + س^2}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س^2 + 5س^2 + س^2}{ع - س} = 7س^2$

● $\lim_{ع \to س} \frac{س^2 + 2ع + 5ع^3}{ع - س} = س^2 + 2س + 5س^3$

● $\lim_{هـ \to 0} \frac{س^2 + 2هـ س + 5هـ^2 + 7}{هـ} = س^2 + 7$

● $\lim_{ع \to 1} \frac{ع^2 + 3ع + 7}{ع - 1} = 1 + 3 + 7 = 11$

● إذا كان $ق(س) = 5س^2 + 1$، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{5(ع^2 - س^2)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{5(ع - س)(ع + س)}{(ع - س)}$

$ق'(س) = 5 \times 2س = 10س$

● إذا كان $ق(س) = س^3$، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2)}{(ع - س)}$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} (ع^2 + ع س + س^2) = س^2 + س^2 + س^2$

$ق'(س) = 3س^2$

● إذا كان $ق(س) = 2س^2 + 3س + 1$، أوجد $ق'(2)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $ق'(2) = \lim_{ع \to 2} \frac{ق(ع) - ق(2)}{ع - 2}$

$ق'(2) = \lim_{ع \to 2} \frac{2ع^2 + 3ع + 1 - (2 \times 4 + 6 + 1)}{ع - 2}$

$ق'(2) = \lim_{ع \to 2} \frac{2ع^2 + 3ع - 15}{ع - 2}$

$ق'(2) = \lim_{ع \to 2} \frac{2ع^2 + 3ع - 14}{ع - 2}$

● إذا كان $ق(س) = 5س^2 + 1$، أوجد $ق'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{5ع^2 + 1 - 5س^2 - 1}{ع - س}$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$$\text{هـ}'(٢) = \lim_{ع \to س} \frac{(ع-٢)(٤ع+٧)}{(ع-٢)} = ٤+٧ = ١١$$

● إذا كان $\text{هـ}(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq$ صفر ، أوجد $\text{هـ}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع} - \frac{١}{س}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{س - ع}{ع س}}{ع - س}$$

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{-١}{ع س} = \frac{-١}{س^{٢}}$$

● إذا كان $\text{هـ}(س) = \frac{س^{٢}}{س+٢}$ ، $س \neq -٢$ ، أوجد $\text{هـ}'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $\text{هـ}'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(٢)}{ع - ٢}$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{\frac{ع^{٢}}{ع+٢} - \frac{٤}{٤}}{ع - ٢} = \lim_{ع \to ٢} \frac{ع - ٢}{٤(ع+٢)(ع-٢)}$$

$$= \lim_{ع \to ٢} \frac{ع^{٢} - ع - ٢}{٤(ع-٢)(ع+٢)}$$

$$\text{هـ}'(٢) = \lim_{ع \to ٢} \frac{(ع-٢)(ع+١)}{٤(ع-٢)(ع+٢)} = \frac{٣}{١٦}$$

● $\text{هـ}(س) = \frac{١}{س-١}$ ، $س \neq ١$ ، أوجد $\text{هـ}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع-١} - \frac{١}{س-١}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{س - ع}{(ع-١)(س-١)}}{ع - س}$$

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{-١}{(ع-١)(س-١)} = \frac{-١}{(س-١)^{٢}}$$

● إذا كان $\text{هـ}(س) = \sqrt{س+١}$ ، أوجد $\text{هـ}'(س)$ باستخدام تعريف المشتقة ثم أوجد $\text{هـ}'(٣)$ ؟

- الحل: $\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س}$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{ع+١} - \sqrt{س+١}}{ع - س} \times \frac{\sqrt{ع+١} + \sqrt{س+١}}{\sqrt{ع+١} + \sqrt{س+١}}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt{ع+١} + \sqrt{س+١})}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{١}{\sqrt{ع+١} + \sqrt{س+١}}$$

$$\text{هـ}'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س+١}}$$

$$\text{هـ}'(٣) = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$$

● إذا كان $\text{هـ}(س) = \sqrt[٣]{س}$ ، أوجد $\text{هـ}'(٨)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

$$\text{هـ}'(٨) = \lim_{ع \to ٨} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(٨)}{ع - ٨} = \lim_{ع \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{ع} - ٢}{ع - ٨}$$

$$= \lim_{ع \to ٨} \frac{(\sqrt[٣]{ع} - ٢)((\sqrt[٣]{ع})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{ع} + ٤)}{(ع - ٨)((\sqrt[٣]{ع})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{ع} + ٤)}$$

$\text{مـ}(٨) = \frac{١}{(\sqrt[٣]{٨})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{٨} + ٤} = \frac{١}{١٢}$

● إذا كان $\text{مـ}(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ ، $س \neq$ صفر، أوجد مـ(٨) باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل : $\text{مـ}(٨) = \text{نهـا}_{ع \to ٨} \frac{\sqrt[٣]{ع} - \sqrt[٣]{٨}}{ع - ٨}$

$= \text{نهـا}_{ع \to ٨} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ع}} - \frac{١}{\sqrt[٣]{٨}}\right) \div (ع - ٨)$ ($س^{\frac{١}{٣}} = \frac{١}{س^{\frac{١}{٣}}}$)

$= \text{نهـا}_{ع \to ٨} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{ع}} - \frac{١}{٢}\right) \times \frac{١}{ع - ٨}$

$= \text{نهـا}_{ع \to ٨} \frac{(٢ - \sqrt[٣]{ع})(٢ + \sqrt[٣]{ع} + (\sqrt[٣]{ع})^{٢})}{(ع - ٨)(٢ + \sqrt[٣]{ع} + (\sqrt[٣]{ع})^{٢})}$

$= \text{نهـا}_{ع \to ٨} \frac{(٨ - ع)}{(ع - ٨)(٢ + \sqrt[٣]{ع} + (\sqrt[٣]{ع})^{٢})}$

$\text{مـ}(٨) = \frac{-١}{٤(٤+٤+٤)} = \frac{-١}{٤٨}$

● $\text{نهـا}_{س \to ٠} \frac{\text{جا}س}{س} = ١$.

● $\text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\text{جا}(ع - س)}{(ع - س)} = ١$

* $\text{جا}ع - \text{جا}س = ٢\,\text{جتا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)$

* $\text{جتا}ع - \text{جتا}س = -٢\,\text{جا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)$

* $\text{جا}(س \pm ع) = \text{جا}س\,\text{جتا}ع \pm \text{جتا}س\,\text{جا}ع$

* $\text{جتا}(س \pm ع) = \text{جتا}س\,\text{جتا}ع \mp \text{جا}س\,\text{جا}ع$

● إذا كان $\text{مـ}(س) = \text{جا}س$ ، أوجد مـ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

- الحل : $\text{مـ}(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\text{جا}ع - \text{جا}س}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{٢\,\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)\text{جتا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right)}{ع - س}$ ($\times \frac{٢}{٢}$)

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \text{جتا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)}{\frac{ع - س}{٢}}$

$= ١ \times \text{جتا}س = \text{جتا}س$

مـ(س) = جتا(س) = جتا س.

● إذا كان $\text{مـ}(س) = \text{جتا}س$ ، أوجد مـ(س) باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل : $\text{مـ}(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\text{جتا}ع - \text{جتا}س}{ع - س}$

$= \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{-٢\,\text{جا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right)\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)}{ع - س}$ ($\times \frac{٢}{٢}$)

$= \text{نهـا}_{ع \to س} -\text{جا}\left(\frac{ع + س}{٢}\right) \times \frac{\text{جا}\left(\frac{ع - س}{٢}\right)}{\frac{ع - س}{٢}}$

$= -١\,\text{جا}\left(\frac{٢س}{٢}\right)$

مـ(س) = - جا س.

● مـ(س) = ظا س باستخدام تعريف المشتقة أوجد مـ(س) ؟

- الحل : $\text{مـ}(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\text{ظا}ع - \text{ظا}س}{ع - س}$

$\text{مـ}(س) = \text{نهـا}_{ع \to س} \frac{\frac{\text{جا}ع}{\text{جتا}ع} - \frac{\text{جا}س}{\text{جتا}س}}{ع - س}$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القدرة الرياضيات ف Date:

= نهـا (جاع جتا س - جتاع جا س) / (ع - س)(جتاع - جتا س)
ع ← س

= نهـا جا (ع - س) / (ع - س)(جتاع جتا س)
ع ← س

= نهـا 1 / (جتاع جتا س) = 1 / جتا²س = قا²س
ع ← س

● ه(س) = قتا س ، أثبت أن:
ه'(س) = - قتا س ظتا س ؟

- الحل: ه'(س) = نهـا (قتاع - قتا س) / (ع - س)
ع ← س

ه'(س) = نهـا (1/جاع - 1/جا س) / (ع - س)
ع ← س

ه'(س) = نهـا (جا س - جاع) / (ع - س)(جاع)(جا س)
ع ← س

ه'(س) = نهـا -2 جتا ((س+ع)/2) جا ((ع-س)/2) / 2(ع - س)(جاع)(جا س)
ع ← س

ه'(س) = نهـا -2 جتا ((س+ع)/2) / -2(جاع)(جا س)
ع ← س

= - جتا س / جا س × 1/جا س

∴ ه'(س) = - قتا س ظتا س .

● أوجد مشتقة كل مما يأتي باستخدام تعريف المشتقة ؟
(أ) ه(س) = قا س .
(ب) ه(س) = ظتا س .

● صفيحة معدنية على شكل دائرة عندت بالحرارة وبقيت على شكل دائرة حدفيه معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة لتغير تحيط قطرها عندما يكون نق = ٧ سم ؟

- الحل: ه(س) = π س² .
ه'(٧) = نهـا (ه(٧+هـ) - ه(٧)) / هـ
هـ ← ٠

ه'(٧) = نهـا (π(٧+هـ)² - ٤٩π) / هـ
هـ ← ٠

ه'(٧) = نهـا (٤٩π + ١٤π هـ + π هـ² - ٤٩π) / هـ
هـ ← ٠

ه'(٧) = نهـا (هـ(١٤π + π هـ)) / هـ = ١٤π سم²
هـ ← ٠

● متوازي مستطيلات ارتفاعه مثلا طوله وعرضه ثلث ارتفاعه، جد قيمة معدل تغير حجمه بالنسبة إلى ارتفاعه عندما يكون الارتفاع ٤ سم ؟

- الحل: نفرض الارتفاع = س ،
الطول = س/2 ، العرض = س/3
ه(س) = س/2 × س/3 × س = س³/6
+ ه'(س) = نهـا (ع³ - س³) / 6(ع - س)
ع ← س

ه'(س) = نهـا (ع - س)(ع² + سع + س²) / 6(ع - س)
ع ← س

منصة التعليمية AL-QALAM EDUCATION

هَ(ص) = $\frac{٣س^{٢}}{٦} = \frac{س^{٢}}{٢}$

هَ(٤) = $\frac{١٦}{٢} = ٨$ سم^{٢}.

★ المشتقة من اليمين ★

- هَ$_{+}$(م) = نهـا $\frac{هـ(م+هـ) - هـ(م)}{هـ}$ ، هـ → ٠$^{+}$
- هَ$_{+}$(م) = نهـا $\frac{هـ(ع) - هـ(م)}{ع - م}$ ، ع → م$^{+}$

★ المشتقة من اليسار ★

- هَ$_{-}$(م) = نهـا $\frac{هـ(م+هـ) - هـ(م)}{هـ}$ ، هـ → ٠$^{-}$
- هَ$_{-}$(م) = نهـا $\frac{هـ(ع) - هـ(م)}{ع - م}$ ، ع → م$^{-}$

- إذا كانت هَ$_{+}$(م) = هَ$_{-}$(م) فإن المشتقة موجودة.
- إذا كانت هَ$_{+}$(م) ≠ هَ$_{-}$(م) فإن المشتقة غير موجودة.

- إذا كان هـ غير متصل عند س = م فإن هـ غير قابل للاشتقاق عند س = م.

- إذا كان هـ متصل عند س = م، لا يمكن الحكم على قابلية الاشتقاق و نجد نهـا $\frac{هـ(م+هـ) - هـ(م)}{هـ}$ ، هـ → ٠

- إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س < ١ \\ ٣س - ١ & ، س > ١ \\ ١ & ، س = ١ \end{cases}$

أوجد هَ(س) باستخدام تعريف المشتقة؟

- الحل: في هذا النوع من الأسئلة نجد أولاً: هَ$_{+}$(١)، هَ$_{-}$(١)، ثم نجد هَ(١).

هَ(س) عندما س > ١

هَ(س) عندما س < ١

س	١	،	س - ١
ع	١	،	ع^{٢} - ١

*هَ$_{+}$(١) = نهـا $\frac{ع^{٢} - ١}{ع - ١}$ = نهـا $\frac{(ع - ١)(ع + ١)}{(ع - ١)}$ ، ع → ١$^{+}$

هَ$_{+}$(١) = ٢

*هَ$_{-}$(١) = نهـا $\frac{٣ع - ١ - ١}{ع - ١}$ = نهـا $\frac{٣ع - ٣}{ع - ١}$ ، ع → ١$^{-}$

هَ$_{-}$(١) = نهـا $\frac{٣(ع - ١)}{ع - ١}$ = ٣ ، ع → ١$^{-}$

هَ$_{-}$(١) = ٣

* اليمين ≠ اليسار ∴ هَ(١) = ∄

*هـ(س) = س^{٢} ، عندما س > ١

هَ(س) = نهـا $\frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$ ، ع → س$^{+}$

= نهـا $\frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$ = نهـا $\frac{(ع - س)(ع + س)}{(ع - س)}$ ، ع → س$^{+}$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

٠٧٩٥٤٤٠٥٤٤
٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦ عماد الدين البستنجي

subject: Date:

هَ (س) = ٢س ، عندما س < ١

* هـ(س) = ٢س - ١ ، عندما س > ١

هَ (س) = $\lim_{س \to ٤} \frac{٢ع^{٢} - ١ع - ٢س + ٨}{(ع - س)}$

= $\lim_{س \to ٤} \frac{٢(ع - س)(ع + س)}{(ع - س)}$ = ٢

هَ (س) = ٢ ، عندما س > ١

هَ (س) = $\begin{cases} ٢س & ، س < ١ \\ ٢ & ، س > ١ \\ ٢ & ، س = ١ \end{cases}$

● إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٥س & ، س < ١ \\ ٣س & ، س > ١ \end{cases}$

أوجد هَ (١)، هَ (٢) باستخدام تعريف المشتقة ؟

● إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} ٤س & ، س > ١ \\ ٥ & ، س = ١ \end{cases}$

أوجد هَ$_{+}$(١) ، هَ$_{-}$(١) ؟

- الحل:

$\frac{٥س}{٥ع}$ $\frac{٤س}{٥ع}$

* هَ$_{+}$(١) = $\lim_{ع \to ١^{+}} \frac{هـ(ع) - هـ(١)}{ع - ١}$

= $\lim_{ع \to ١^{+}} \frac{٥ع - ٥}{ع - ١}$ = $\lim_{ع \to ١^{+}} \frac{٥(ع - ١)}{(ع - ١)}$ = ٥

* هَ (١) = $\lim_{ع \to ١^{-}} \frac{هـ(ع) - هـ(١)}{ع - ١}$ = $\lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٤ع - ٥}{ع - ١}$

= $\lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٤ع - ٤}{ع - ١}$ = $\lim_{ع \to ١^{-}} \frac{٤(ع - ١)}{(ع - ١)}$ = ٤

* هَ$_{+}$(١) ≠ هَ$_{-}$(١) ⇐ هَ (١) غير موجودة.

● إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \neq ٣ \\ ٩ & ، س = ٣ \end{cases}$

أوجد هَ (٣) باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: هَ (٣) = $\lim_{ع \to ٣} \frac{هـ(ع) - هـ(٣)}{ع - ٣}$

= $\lim_{ع \to ٣} \frac{ع^{٢} - ٩}{ع - ٣}$ = $\lim_{ع \to ٣} \frac{(ع/٣)(ع + ٣)}{(ع/٣)}$ = ٦

● إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \neq ٥ \\ ١٠ & ، س = ٥ \end{cases}$

أوجد قيمة هَ (٥) باستخدام تعريف المشتقة ؟

● إذا كان هـ(س) = |س - ١٣| ، أوجد هَ (٣) باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: |س - ١٣| = $\begin{cases} -س + ٣ & ، س < ٣ \\ س - ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

* هَ$_{+}$(٣) = $\lim_{ع \to ٣^{+}} \frac{هـ(ع) - هـ(٣)}{ع - ٣}$

منصة التعليمية AL-QALAM EDUCATION

NOTE BOOK

subject: المشتقة في الرياضيات Date:

= $\frac{\text{نها}_{ع \to -٣} \; ٥ - ٥}{ع + ٣}$ = ١ ، $\text{مـ}'_+(-٣) = ١$

* $\text{مـ}'(-٣) = \frac{\text{نها}_{ع \to -٣} \; \text{مـ}(ع) - \text{مـ}(-٣)}{ع + ٣} = \frac{\text{نها}_{ع \to -٣} \; ع + ٣}{ع + ٣} = ٠$

* $\text{مـ}'(-٣) = -١$ ، المين ≠ اليسار

∴ $\text{مـ}'(-٣)$ غير موجودة .

● $\text{مـ}(س) = |س - ١٠|$ ، أوجد $\text{مـ}'(٥)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

● إذا كان $\text{مـ}(س) = س^٢ - ٤|$ ، أوجد $\text{مـ}'(٢)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

● إذا كان $\text{مـ}(س) = |س^٢ - س|$ ، أوجد $\text{مـ}'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

● إذا كان $\text{مـ}(ص) = ٢س + |س - ٣|$ ، أوجد $\text{مـ}'(٣)$ ؟

- الحل: $\text{مـ}(س) = \begin{cases} ٢س - (س - ٣) & ، س < ٣ \\ ٢س + (س - ٣) & ، س \geq ٣ \end{cases}$

$\text{مـ}(س) = \begin{cases} ٣س - ٣ & ، س < ٣ \\ س + ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

* $\text{مـ}'(٣) = \frac{\text{نها}_{ع \to ٣} \; \text{مـ}(ع) - \text{مـ}(٣)}{ع - ٣} = \frac{\text{نها}_{ع \to ٣} \; ٣ع - ٩}{ع - ٣}$

$= \text{نها}_{ع \to ٣} \; \frac{٣(ع - ٣)}{(ع - ٣)} = ٣$.

* $\text{مـ}'(٣) = \frac{\text{نها}_{ع \to ٣} \; \text{مـ}(ع) - \text{مـ}(٣)}{ع - ٣} = \frac{\text{نها}_{ع \to ٣} \; ع + ٣ - ٦}{ع - ٣}$

$= \text{نها}_{ع \to ٣} \; ع - ٣ \neq \text{مـ}'(٣) = ١$

$\therefore \text{مـ}'_+(٣) \neq \text{مـ}'_-(٣)$

∴ $\text{مـ}'(٣)$ غير موجودة .

● إذا كان $\text{مـ}(س) = س|س - ١|$ ، أوجد $\text{مـ}'(١)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

- الحل: $\text{مـ}(س) = \begin{cases} س(س - ١) & ، س < ١ \\ س(-س + ١) & ، س \geq ١ \end{cases}$

$\text{مـ}(س) = \begin{cases} س^٢ - س & ، س < ١ \\ -س^٢ + س & ، س \geq ١ \end{cases}$

* $\text{مـ}'(١) = \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; \text{مـ}(ع) - \text{مـ}(١)}{ع - ١} = \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; ع - ع^٢ - ٠}{ع - ١}$

$\text{مـ}'_+(١) = \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; ع(١ - ع)}{(١ - ع)} = ١$

* $\text{مـ}'(١) = \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; \text{مـ}(ع) - \text{مـ}(١)}{ع - ١} = \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; ع^٢ + ع - ٢}{ع - ١}$

$= \frac{\text{نها}_{ع \to ١} \; -(ع - ١)}{ع - ١} = -١$

* لاحظ أن $\text{مـ}'_+(١) \neq \text{مـ}'_-(١)$

∴ $\text{مـ}'(١)$ غير موجودة .

● إذا كان $\text{مـ}(س) = [س + ٣]$ ، أوجد $\text{مـ}'(٣)$ باستخدام تعريف المشتقة ؟

NOTE BOOK
التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

- الحل: هـ(٣) = [٣+٣] = ٦ عدد صحيح

* طول الدرجة = ١

٢ ٣ ٤ ٥ ٦

[س+٣] = { ٥ ، ٢ ≤ س < ٣ ، ٦ ، ٣ ≤ س < ٤

* هـ'(٣)+ = نهـا (هـ(٤) - هـ(٣)) / (٤ - ٣) = نهـا (٦ - ٦) / (٤ - ٣) = ٠

* هـ'(٣)- = نهـا (هـ(٤) - هـ(٣)) / (٤ - ٣) = نهـا (٥ - ٦) / (٤ - ٣) = -١ غير موجودة

* الجبين ≠ اليسار.

∴ هـ'(٣) غير موجودة.

● هـ(س) = [س/٢] أوجد هـ'(٦) باستخدام تعريف المشتقة؟

- الحل: هـ'(٦) = نهـا (هـ(٤) - هـ(٦)) / (٤ - ٦)

هـ'(٦) = نهـا [٤/٢] - ٣ * نأخذ تعويض الصيغ+ / (٤ - ٦)

* هـ'(٦)+ = نهـا [٤/٢] - ٣ = نهـا ٣ - ٣ = ٠ / (٤ - ٦)

∴ هـ'(٦) = صفر

* هـ'(٦)- = نهـا [٤/٢] - ٣ = نهـا ٢ - ٣ / (٤ - ٦)

هـ'(٦) = نهـا -١ / (٤ - ٦) = -١ / صفر = غير موجودة.

∴ هـ'(٦) غير موجودة.

● هـ(س) = [س/٢] ، أوجد هـ'(٣) باستخدام تعريف المشتقة؟

● هـ(س) = س² [س] ، أوجد هـ'(٠) باستخدام تعريف المشتقة؟

● هـ(س) = ٢س + [س/٢] أوجد هـ'(٨) باستخدام تعريف المشتقة؟

* أمثلة *

● إذا كان هـ(س) = (س - ٢) ل(س) حيث ل(س) متصل عند س = ٢، بين باستخدام تعريف المشتقة أن هـ'(٢) =

- الحل: هـ'(٢) = نهـا (هـ(٤) - هـ(٢)) / (٤ - ٢)

= نهـا ((٤ - ٢) ل(٤) - (٢ - ٢) ل(٢)) / (٤ - ٢)

هـ'(٢) = نهـا (٤ - ٢) / (٤ - ٢) * نهـا ل(٤) = نهـا ل(٤)

لكن ل متصل ∴ نهـا ل(٤) = ل(٢)

∴ هـ'(٢) = ل(٢).

منصة العلم التعليمية AL-ALAM EDUCATION

● أثبت أن $\lim_{ع \to س} \frac{هـ(س) - س هـ(ع)}{ع - س} = ؟$

حيث هـ(س) = س هـ(س) ؟

- الحل: * نضيف ونطرح س هـ(س) *

$= \lim_{ع \to س} \frac{هـ(س) - س هـ(س) + س هـ(س) - س هـ(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{هـ(س) - س هـ(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{س هـ(س) - س هـ(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{هـ(س) - س هـ(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} س \frac{هـ(س) - هـ(ع)}{ع - س}$

$= هـ(س) - س هـ(س)$.

● إذا كان هـ(س) = (٥س - ٢٥) ل(س) حيث ل(س) متصل عند س = ٢، أثبت باستخدام تعريف المشتقة أن هـ(٢) = ٥ ل(٢) ؟

- الحل: هـ(٢) = $\lim_{ع \to ٢} \frac{هـ(ع) - هـ(٢)}{ع - ٢}$

$= \lim_{ع \to ٢} \frac{(٥ع - ٢٥) ل(ع) - (٥٢ - ٢٥) ل(٢)}{(ع - ٢)}$

$= \lim_{ع \to ٢} ٥ ل(ع) \frac{(ع - ٢)}{(ع - ٢)} = \lim_{ع \to ٢} ٥ ل(ع)$

∴ هـ(٢) = ٥ ل(٢).

● أثبت أن $\lim_{ع \to س} \frac{٢ع هـ(س) - ٢س هـ(ع)}{ع - س}$

= ٢هـ(س) - ٢س هـ(س) ؟

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع هـ(س) - ٢س هـ(ع) + ٢ع هـ(ع) - ٢ع هـ(ع)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{٢ع(هـ(ع) - هـ(س)) + \lim_{ع \to س} ٢ هـ(ع)(ع - س)}{ع - س \quad (ع - س)}$

$= \lim_{ع \to س} -٢ع \times هـ(س) + ٢ \lim_{ع \to س} هـ(ع)$

$= -٢س هـ(س) + ٢هـ(س)$

● إذا كان التغير هـ(س) يعطى بالعلاقة

$٥٣ س + ٥ س ٥ س + ٧(٥ س)^٢$

أوجد هـ(س) ؟

- الحل: ٥ س = ٥ هـ ٣ + ٥ هـ ٥ س + ٧ هـ^٢.

∴ متوسط التغير = $\frac{هـ(٣ + ٥ س + ٧ هـ)}{هـ}$

∴ متوسط التغير = ٣ + ٥ س + ٧ هـ

* هـ(س) = نهاية متوسط التغير

* هـ(س) = $\lim_{هـ \to ٠}$ (٣ + ٥ س + ٧ هـ) = ٥ س + ٣

● إذا كان التغير في هـ(س) يعطى بالعلاقة

٥ هـ + ٣ هـ س + ٤ هـ^٢ س، أوجد:

① متوسط التغير ② هـ(س) ③ هـ(٣)

- الحل: * متوسط التغير = $\frac{\text{التغير في هـ(س)}}{\text{التغير في س}}$

* متوسط التغير = $\frac{هـ(٥ + ٣ س + ٤ هـ س)}{هـ}$

∴ متوسط التغير = ٣ س + ٥ + ٤ هـ س.

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

* $\overline{هـ}(س)$ = نهـا متوسط التغير.

$\overline{هـ}(س) = $ نهـا$_{هـ \to ٠}$ $\frac{(٣س + ٥ + ٤هـ س) - (٣س + ٥)}{هـ}$

$= ٣س + ٥$

* $هـ'(س) = ٣س + ٥$

* $هـ'(٣) = (٣ \times ٣) + ٥ = ١٤$

● إذا كان مقدار التغير في الاقتران $هـ(س)$ يساوي $س^٣ + ٥س + ٢(٥س)^٢$

فإن: $هـ'(س)$ تساوي؟

م) $٣س^٢$ ب) $س^٣$ ج) $٢س$ د) صفر

● إذا كان $هـ(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ٥ + هـ س$

حيث هـ التغير في الاقتران فإن $هـ'(س)$ = ؟

م) $٣س^٣$ ب) $٥س$ ج) $٩س^٢$ د) صفر

● إذا كان مقدار التغير في الاقتران تساوي $س^٢ - ع^٢ س$، أوجد $هـ'(س)$؟

● إذا كان مقدار متوسط التغير في الاقتران $هـ(س) = س^٢ - ٤$ يساوي ٤ عندما $س = س_١$، $\Delta س = ١$، فإن قيمة $س_١$ تساوي؟

م) ٤ ب) $\frac{-٣}{٢}$ ج) -٤ د) ١ هات ذاك

● صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة فحافظت على شكلها إذا ازداد طول ضلعها ٥ سم إلى ٥,٢ سم فإن مقدار التغير في مساحتها بالسم يساوي؟

م) ١,١ ب) ١٠,١ ج) ٢٦,١ د) ٢٦٠,١ هات ذاك

● باستخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى للاقتران $هـ(س) = س^٢ + ٣س$ ؟

- الحل: $هـ'(س) = $ نهـا$_{ع \to س}$ $\frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س}$

$هـ'(س) = $ نهـا$_{ع \to س}$ $\frac{ع^٢ + ٣ع - س^٢ - ٣س}{ع - س}$

$= $ نهـا$_{ع \to س}$ $\frac{(ع^٢ - س^٢) + (٣ع - ٣س)}{(ع - س)}$

$= $ نهـا$_{ع \to س}$ $\frac{(ع - س)(ع + س) + ٣(ع - س)}{(ع - س)}$

$= $ نهـا$_{ع \to س}$ $(ع + س) + ٣$

$هـ'(س) = ٢س + ٣$.

● باستخدام تعريف المشتقة جد المشتقة الأولى للاقتران: $هـ(س) = \frac{س}{س - ٣}$ عندما $س = ٢$

- الحل: $هـ'(٢) = $ نهـا$_{ع \to ٢}$ $\frac{هـ(ع) - هـ(٢)}{ع - ٢}$

$هـ'(٢) = $ نهـا$_{ع \to ٢}$ $\frac{\frac{ع}{ع - ٣} - \frac{٢}{-١}}{ع - ٢}$ $= $ نهـا$_{ع \to ٢}$ $\frac{ع + ٢ع - ٦}{(ع - ٢)(ع - ٣)}$

$= \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{٣ع - ٦}{(ع-٣)(ع-٢)} = \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{٣(ع-٢)}{(ع-٣)(ع-٢)} = \text{نها}_{ع \to ٣} \frac{٣}{ع-٣}$

$\therefore$ مـ' (٢) $= \frac{٣}{٢-٣} = \frac{٣}{-١} = -٣$.

● إذا كان ل (س) = (س-ب) مـ (س) حيث مـ (س) اقترانٌ متصلٌ عند س = ب، استخدم تعريف المشتقة في إثبات أن مـ (ب) = ل' (ب) حيث ب ثابت ؟

- الحل: ل' (ب) $= \text{نها}_{ع \to ب} \frac{ل(ع) - ل(ب)}{(ع-ب)}$

$= \text{نها}_{ع \to ب} \frac{(ع-ب)(\text{مـ}(ع) - ٠)}{(ع-ب)} = \text{مـ}(ب)$

★ لأن مـ (س) متصل عند س = ب) لذلك نعوض في النهاية

● باستخدام تعريف المشتقة، ابحث قابلية الاشتقاق عند س = ٢ ؟

الإشتقاقية

- الحل: مـ (س) $= \begin{cases} ٢ + ٢س - س^{٢} & ، س \leq ٢ \\ ٤ - س & ، س > ٢ \end{cases}$

مـ (س) $= \begin{cases} -٢ + ٢س & ، س < ٢ \\ س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

* مـ' (٢$^{+}$) $= \text{نها}_{ع \to ٢^{+}} \frac{\text{مـ}(ع) - \text{مـ}(٢)}{ع - ٢}$

$= \text{نها}_{ع \to ٢} \frac{ع - ٢}{ع - ٢} = ١$.

* مـ' (٢$^{-}$) $= \text{نها}_{ع \to ٢^{-}} \frac{\text{مـ}(ع) - \text{مـ}(٢)}{ع - ٢}$

$= \text{نها}_{ع \to ٢} \frac{-٢ + ٢ع - ع}{ع - ٢}$

$= \text{نها}_{ع \to ٢} \frac{-(ع-٢)}{(ع-٢)} = -١$

* مـ' (٢$^{+}$) $\neq$ مـ' (٢$^{-}$) $\therefore$ مـ (٢) غير موجودة

● باستخدام تعريف المشتقة أوجد مـ' (س) للاقتران مـ (س) $= \frac{س}{س-٢}$، س $\neq$ ٢ ؟

- الحل: مـ' (س) $= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{مـ}(ع) - \text{مـ}(س)}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\frac{ع}{ع-٢} - \frac{س}{س-٢}}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - ٢ع - ع^{٢} + ٢س}{(ع-س)(ع-٢)(س-٢)}$

مـ' (س) $= \text{نها}_{ع \to س} \frac{-٢(ع-س)}{(ع-س)(ع-٢)(س-٢)}$

مـ' (س) $= \text{نها}_{ع \to س} \frac{-٢}{(ع-٢)(س-٢)} = \frac{-٢}{(س-٢)^{٢}}$

● إذا كان متوسط تغير الاقتران مـ (س) على الفترة [-١، ٣] يساوي ٤، فجد متوسط تغير الاقتران هـ (س) $= ٢$مـ (س) $+ ٣$س، على الفترة نفسها ؟

- الحل: متوسط تغير هـ $= \frac{\text{هـ}(٣) - \text{هـ}(-١)}{٣ - (-١)}$

$= \frac{٢\text{مـ}(٣) + ٩ - (٢\text{مـ}(-١) + ٣)}{٤}$

التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$= \frac{2(ن(3)-ن(-1))}{4} + \frac{12}{4} = 2\times4+3$

$= 8+3 = 11$

● إذا كان $ن(س) = س^ن$ ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإن $ن'(س) = ن س^{ن-1}$

(أ-1) برهن صحة النظرية السابقة؟

البرهان: $ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع)-ن(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^ن - س^ن}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع-س)(ع^{ن-1}+ع^{ن-2}س+\dots+س^{ن-1})}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} (ع^{ن-1}+ع^{ن-2}س+\dots+س^{ن-1})$

$= \underbrace{س^{ن-1}+س^{ن-1}+\dots+س^{ن-1}}_{ن \text{ مرة}} = ن س^{ن-1}$

● إذا كان متوسط تغير الاقتران ن(ص) في الفترة $[-1,4]$ يساوي 3، وكان $ن(1) = 2$ ، فما قيمة $ن(-4)$ ؟

(أ-2) م) 11 ⓑ -12 ج) -11 د) 12

● استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد $ن'(س)$ للاقتران $ن(س) = \sqrt{2س+1}$ ، حيث $س > -\frac{1}{2}$

- الحل: $ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع)-ن(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\sqrt{2ع+1}-\sqrt{2س+1}}{ع-س} \times \frac{\sqrt{2ع+1}+\sqrt{2س+1}}{\sqrt{2ع+1}+\sqrt{2س+1}}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{2ع+1-2س-1}{(ع-س)(\sqrt{2ع+1}+\sqrt{2س+1})}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{2(ع-س)}{(ع-س)(\sqrt{2ع+1}+\sqrt{2س+1})}$

$ن'(س) = \frac{2}{\sqrt{2س+1}+\sqrt{2س+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2س+1}} = \frac{1}{\sqrt{2س+1}}$

● إذا كان $ن(س) = 2س^2+1$ ، فإن ميل القاطع لمنحنى ن(س) المار بالنقطتين $(2, ن(2))$ ، $(-1, ن(-1))$ يساوي؟

(أ-3) م) -2 ب) 6 ⓒ 2 د) 3

● استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد $ن'(س)$ للاقتران $ن(س) = ظا^2 س$ ؟

(أ-4) - الحل: $ن'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ن(ع)-ن(س)}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ظا^2 ع - ظا^2 س}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{جتا^2 س}{جتا^2 ع} - \frac{جتا^2 ع}{جتا^2 س}}{ع-س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{جتا^2 س - جتا^2 ع}{(ع-س)(جتا^2 ع)(جتا^2 س)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{جا(س+ع)جا(س-ع)}{(ع-س)(جتا^2 ع)(جتا^2 س)}$

$= 2 \times \frac{جا^2 س}{جتا^2 س} \times 1 = 2 ظا^2 س قا^2 س$

● إذا كان متوسط التغير للاقتران :

مثال (٤) $\text{مـ}(س) = ٤س^{٢} - ٣$ في الفترة $[ب، ٢]$

يساوي -٤ فما قيمة $ب$ ؟

أ) -٢ ب) -٣ ج) -٤ د) ٢

● إذا كان $\text{مـ}(س) = س^{٢} + \text{هـ}(س)$،

مثال (٥) حيث $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س^{٣} + ١ & ، ١ \le س < ٥ \\ ١٠ & ، ٥ \le س \le ٧ \end{cases}$

فإن مقدار متوسط التغير في الاقتران $\text{مـ}(س)$ في الفترة $[١، ٥]$ يساوي :

أ) ٣٧ ب) ٢٨ ج) ٨ د) ٢

● استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد

مثال (١) $\text{مـ}'(س)$ للاقتران $\text{مـ}(س) = س جا ٢س$.

الحل: $\text{مـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{مـ}(ع) - \text{مـ}(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع جا ٢ع - س جا ٢س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع جا ٢ع - ٢ جا ٢س + ٢ جا ٢س - س جا ٢س}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{(جا ٢ع - جا ٢س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{جا ٢س (ع - س)}{(ع - س)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{ع \times ٢ جتا (ع + س) جا (ع - س)}{(ع - س)} + جا ٢س$

$= ٢س جتا ٢س + جا ٢س$.

● استخدم تعريف المشتقة الأولى لإيجاد

مثال (٢) $\text{مـ}'(س)$ للاقتران $\text{مـ}(س) = \frac{١}{س^{٢}}$ ، $س \neq ٠$

الحل: $\text{مـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{مـ}(ع) - \text{مـ}(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{١}{ع^{٢}} - \frac{١}{س^{٢}}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢} - ع^{٢}}{(س^{٢} ع^{٢})(ع - س)}$

$= \lim_{ع \to س} \frac{-(س + ع)}{(س^{٢} ع^{٢})} = \frac{-١(س + س)}{(س^{٢} س^{٢})}$

$\text{مـ}'(س) = \frac{-٢س}{س^{٤}} = \frac{-٢}{س^{٣}}$.

★ قواعد الاشتقاق ★

● مشتقة الثابت = صفر.

* إذا كان $\text{مـ}(س) = ٢ \leftarrow \text{مـ}'(س) =$ صفر.

* $\text{مـ}(س) = ٥ \leftarrow \text{مـ}'(س) =$ صفر.

* $\text{مـ}(س) = \frac{١}{٢} \leftarrow \text{مـ}'(س) =$ صفر.

* $\text{مـ}(س) = -\sqrt{٣٧} \leftarrow \text{مـ}'(س) =$ صفر.

* $\text{مـ}(س) = \pi \leftarrow \text{مـ}'(س) =$ صفر.

● مشتقة $س = ١$

* إذا كان $\text{مـ}(س) = س \leftarrow \text{مـ}'(س) = ١$

* $\text{مـ}(ص) = ص \leftarrow \text{مـ}'(ص) = ١$

* $\text{مـ}(ع) = ع \leftarrow \text{مـ}'(ع) = ١$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● مشتقة P س $= P$.

* إذا كان $\text{مـ}(س) = P$ س $\leftarrow \text{مـ}'(س) = P$

* $\text{مـ}(س) = ٥$ س $\leftarrow \text{مـ}'(س) = ٥$

* $\text{مـ}(س) = \frac{١}{٢}$ س $\leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{١}{٢}$

* $\text{مـ}(س) = \sqrt{٣}$ س $\leftarrow \text{مـ}'(س) = \sqrt{٣}$

* $\text{مـ}(س) = \pi$ س $\leftarrow \text{مـ}'(س) = \pi$.

● مشتقة $س^{ن}$ $= ن$ $س^{ن-١}$

* إذا كان $\text{مـ}(س) = س^{ن} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ن س^{ن-١}$

* $\text{مـ}(س) = س^{٧} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ٧ س^{٧-١} = ٧ س^{٦}$

* $\text{مـ}(س) = س^{٨} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ٨ س^{٧}$.

* $\text{مـ}(س) = س^{٢} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ٢ س$.

● مشتقة $٩ س^{٧} = ٩ \times ٨ س^{٧-١}$

* إذا كان $\text{مـ}(س) = ٩ س^{ن} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ن \times ٩ س^{ن-١}$

* $\text{مـ}(س) = ٧ س^{٦} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ٤٢ س^{٥}$.

* $\text{مـ}(س) = \frac{١}{٢} س^{٣} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{١}{٢} \times ٣ س^{٢}$.

* $\text{مـ}(س) = ٤ س^{٥} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ٢٠ س^{٤}$.

* $\text{مـ}(س) = \sqrt{٣٢} س^{١٠} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ١٠ \sqrt{٣٢} س^{٩}$

* $\text{مـ}(س) = -٢ س^{٥} \leftarrow \text{مـ}'(س) = -١٠ س^{٤}$.

● مشتقة $\frac{٩}{س^{٥}} = ٩ س^{-٥}$

* $\text{مـ}(س) = س^{\frac{٦}{٥}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{٦}{٥} س^{\frac{١}{٥}}$

$\text{مـ}'(س) = \frac{٦}{٥} س^{\frac{٥-٦}{٥}} = \frac{٦}{٥} س^{\frac{-١}{٥}}$

* $\text{مـ}(س) = س^{\frac{٧}{٤}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{٧}{٤} س^{\frac{٣}{٤}}$.

* $\text{مـ}(س) = س^{\frac{١}{٣}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{١}{٢} س^{\frac{-٢}{٣}}$

$\text{مـ}'(س) = \frac{١}{٢} س^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{١}{٣ س^{\frac{٢}{٣}}}$.

● $\text{مـ}(س) = ج س^{\frac{٥}{٦}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = ج \times \frac{٥}{٦} س^{\frac{-١}{٦}}$

* $\text{مـ}(س) = ٥ س^{\frac{٧}{٢}}$.

$\text{مـ}'(س) = ٥ \times \frac{٧}{٢} س^{\frac{٧}{٢}-١} = \frac{٣٥}{٢} س^{\frac{٥}{٢}}$.

* $\text{مـ}(س) = \frac{٤}{٩} س^{\frac{١}{٣}}$.

$\text{مـ}'(س) = \frac{٤}{٩} \times \frac{١}{٣} س^{\frac{١}{٣}-١}$

$\text{مـ}'(س) = \frac{٤}{٢٧} س^{\frac{-٢}{٣}} = \frac{٤}{٢٧ س^{\frac{٢}{٣}}}$

* $\text{مـ}(س) = ٥ س^{\frac{٧}{٤}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{٣٥}{٤} س^{\frac{٣}{٤}}$

* $\text{مـ}(س) = \sqrt{٤٢} س^{\frac{١}{٥}} \leftarrow \text{مـ}'(س) = \frac{\sqrt{٤٢}}{٥} س^{\frac{-٤}{٥}}$

● مشتقة السالب .

* $\text{مـ}(س) = س^{-٤} \leftarrow \text{مـ}'(س) = -٤ س^{-٥}$

$\text{مـ}'(س) = -٤ س^{-٥}$

* $\text{مـ}(س) = \frac{١}{س^{٩}} \leftarrow \text{مـ}(س) = س^{-٩}$

$\leftarrow \text{مـ}'(س) = -٩ س^{-١٠} = \frac{-٩}{س^{١٠}}$

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

القسمة في الرياضيات

subject: Date:

* $هـ(س) = س^{-6} \leftarrow هـ'(س) = -6 س^{-7}$

$هـ(س) = \frac{-6}{س^7}$

* $هـ(س) = س^{\frac{-3}{5}} \leftarrow هـ'(س) = \frac{-3}{5} س^{\frac{-8}{5}}$

$هـ(س) = \frac{-3}{5} س^{\frac{-8}{5}} = \frac{-3}{5 س^{\frac{8}{5}}}$

* $هـ(س) = س^{\frac{-1}{3}} \leftarrow هـ'(س) = \frac{-1}{3} س^{\frac{-4}{3}}$

$هـ(س) = \frac{-1}{3} س^{\frac{-4}{3}} = \frac{-1}{3 س^{\frac{4}{3}}}$

* $هـ(س) = \frac{2}{س^6} \leftarrow هـ(س) = 2 س^{-6}$

$هـ'(س) = 2 \times -6 س^{-7} = \frac{-12}{س^7}$

• مشتقة جمع الاقترانات

$هـ(س) = هـ(س) + ل(س) + م(س)$.

$هـ'(س) = هـ'(س) + ل'(س) + م'(س)$.

* $هـ(س) = 7 س + \frac{1}{2} س^5 + 3 س^6 + 5$

$هـ'(س) = 7 + \frac{5}{2} س^4 + 18 س^5$

* $هـ(س) = 7 س^3 + س^{\frac{1}{2}} + س^{\frac{1}{4}} + 2 س - 6$

$هـ'(س) = 21 س^2 + \frac{1}{2} س^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4} س^{\frac{-3}{4}} + 2$.

$هـ'(س) = 21 س^2 + \frac{1}{2} س^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4} س^{\frac{-3}{4}} + 2$

• مشتقة الطرح :

$هـ(س) = هـ(س) - ل(س) - م(س)$.

$هـ'(س) = هـ'(س) - ل'(س) - م'(س)$.

* إذا كان $هـ(س) = س^7 - 4 س^6 - 3 س - 6$

فإن $هـ'(س) = 7 س^6 - 24 س^5 - 3 - 0$

* $هـ(س) = -5 س - 7 س^2 - 3 س^3 - 6$

$هـ'(س) = -5 - 14 س - 9 س^2$

* $هـ(س) = 3 س^3 - 6 س - \frac{7}{4}$

$هـ'(س) = 9 س^2 - 6$

• مشتقة جمع وطرح اقترانات

* $هـ(س) = 7 س^3 - 4 س^2 + 3 س - 6$

$هـ'(س) = 21 س^2 - 8 س + 3$

* $هـ(س) = س^{\frac{1}{3}} + س^{\frac{1}{4}} - س^{\frac{1}{5}} + 7$

$هـ'(س) = \frac{1}{3} س^{\frac{-2}{3}} + \frac{1}{4} س^{\frac{-3}{4}} - \frac{1}{5} س^{\frac{-4}{5}} + 0$

$هـ'(س) = \frac{1}{3 س^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{4 س^{\frac{3}{4}}} - \frac{1}{5 س^{\frac{4}{5}}}$

* $هـ(س) = 7 س^{\frac{-3}{7}} + 5 س^{\frac{-1}{7}} - 3 س + 9$

$هـ'(س) = \frac{7}{3} س^{\frac{-10}{7}} + \frac{5}{7} س^{\frac{-6}{7}} - 3$

$هـ'(س) = \frac{7}{3 س^{\frac{10}{7}}} + \frac{5}{7 س^{\frac{6}{7}}} - 3$

* $هـ(س) = س^5 - س^2 + 2 س$.

$هـ'(س) = 5 س^4 - 2 س + 2$.

0788992806
sa'ad Bustanji
0795420542

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات Date:

مشتقة ضرب اقترانين

ل(س) = ف(س) × هـ(س)

ل'(س) = ف(س) × هـ'(س) + هـ × ف'(س)

= الأول في مشتقة الثاني + الثاني في مشتقة الأول

* ف(س) = (س² + ١)(٥س + ٢)

ف'(س) = (س² + ١) × ٥ + (٥س + ٢)(٢س)

* ف(س) = (س³ + ٣س + ١)(٥س² + ٢)

ف'(س) = (س³ + ٣س + ١)(١٠س) + (٥س² + ٢)(٣س² + ٣)

مشتقة ضرب (٣) اقترانات

ل(س) = ف(س) × هـ(س) × م(س)

ل'(س) = ف × هـ × م' + ف × هـ' × م + ف' × هـ × م

* ف(س) = (س³ + ١)(س² + ٣)(١ - ٥س)

ف'(س) = (٣س²)(س² + ٣)(١ - ٥س) + (س³ + ١)(٢س)(١ - ٥س) + (س³ + ١)(س² + ٣)(-٥)

* ف(س) = (١ + س²)(٥س + س⁶)(٢س)

ف'(س) = (٢س)(٥س + س⁶)(٢س) + (١ + س²)(٥ + ٦س⁵)(٢س) + (١ + س²)(٥س + س⁶)(٢)

مشتقة القسمة:

ف(س) = ل(س) / هـ(س) = بسط / مقام

* ف'(س) = (المقام × مشتقة البسط - البسط × مشتقة المقام) / (المقام)²

ف'(س) = (هـ × ل' - ل × هـ') / هـ²

* ف(س) = (٧س² + ١) / (٢س - ٥)

ف'(س) = ((٢س - ٥)(١٤س) - (٧س² + ١)(٢)) / (٢س - ٥)²

* ف(س) = (٥س³ + ١) / (س² + ١)

ف'(س) = ((س² + ١)(١٥س²) - (٥س³ + ١)(٢س)) / (س² + ١)²

* ف(س) = (١ + ٣س) / (س² + ٢)

ف'(س) = ((س² + ٢)(٣) - (١ + ٣س)(٧س⁶)) / (س⁷ + ٢)²

قسمة اقتران / ثابت ، ف(س) = هـ(س) / ثابت

ف'(س) = هـ'(س) / ثابت

* ف(س) = (س⁴ + ٢) / ٦ ← ف'(س) = ٤س³ / ٦

* ف(س) = س³ + ٢س² - ٢س - ٤

ف'(س) = (٣س² + ٦س - ٢) / ٩

٢١٠٥٦

NOTE BOOK

subject: سعد الدين البستنجي Date:

* $ه(س) = \frac{٦س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥س}{٦}$

$ه'(س) = \frac{٣ \times ٦س^{٢} - ٤ \times ٢س + ٥}{٦}$

* $ه(س) = جا(س^{٣} + ٢س + ١)$

$ه'(س) = جتا(س^{٣} + ٢س + ١)(٣س^{٢} + ٢)$.

* $ه(س) = \frac{١٠ - ٤س}{٧} \leftarrow ه'(س) = \frac{-٤}{٧}$

* $ه(س) = جا(١ - ٤س)$

$ه'(س) = جتا(١ - ٤س) \times (-٤)$.

● $\frac{\text{مشتقة ثابت}}{\text{اقتران}} = \frac{ص}{ه(س)}$

$ه'(س)^{٢} = \frac{-\text{الثابت لاشتقاق الاقتران} \times ه'(س)}{(\text{الاقتران})^{٢}} = \frac{-ص \times ه'(س)}{(ه(س))^{٢}}$

* $ه(س) = جا(س)$ جا $(جا(س))$

$ه'(س) = جتا(جا(س)) \times جتاس$.

* $ه(س) = \frac{٧}{س^{٣} + ٥}$

$ه'(س) = \frac{-٧ \times ٣س^{٢}}{(س^{٣} + ٥)^{٢}} = \frac{-٢١س^{٢}}{(س^{٣} + ٥)^{٢}}$

* $ه(س) = جتاس \leftarrow ه'(س) = -جاس$.

* $ه(س) = جتا٢س \leftarrow ه'(س) = -جا٢س \times ٢$.

* $ه(س) = جتاهـ(س) \leftarrow ه'(س) = -جاهـ(س) \times هـ'(س)$.

* $ه(س) = \frac{-٣}{س^{٢} + ٦}$

$ه'(س) = \frac{-٣ \times ٢س}{(س^{٢} + ٦)^{٢}} = \frac{-٦س}{(س^{٢} + ٦)^{٢}}$

* $ه(س) = ظاس \leftarrow ه'(س) = قا^{٢}س$

* $ه(س) = ظا٢س \leftarrow ه'(س) = قا^{٢}٢س \times ٢$.

* $ه(س) = ظاهـ(س) \leftarrow ه'(س) = قا^{٢}هـ(س) \times هـ'(س)$

* $ه(س) = جتا(س^{٢} + ٢س - ٥)$

$ه'(س) = -جا(س^{٢} + ٢س - ٥) \times (٢س + ٢)$

* $ه(س) = جتا(س + جاس)$

$ه'(س) = -جا(س + جاس)(١ + جتاس)$

* $ه(س) = جتا\left(\frac{س^{٢} + ٥}{٢س + ١}\right)$

$ه'(س) = -جا\left(\frac{س^{٢} + ٥}{٢س + ١}\right)\left(\frac{(٢س + ١)(٢س) - (س^{٢} + ٥)(٢)}{(٢س + ١)^{٢}}\right)$

* $ه(س) = جا(س^{٣} + ٥)$ (٣س^{٢})

$ه'(س) = جتا(س^{٣} + ٥)$

NOTE BOOK

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: الرياضيات البحتة ٢ سنة ثانية ٠٧٨٨٩٨٢٨٠٦ ٠٧٩٥٤٢٠٥٤٤ date:

* $هـ(س) = ظا(س^2 + 2س + 1)$

$هـ'(س) = قا^2(س^2 + 2س + 1)(2س + 2)$

* $هـ(س) = ظتا(1 - 5س)$

$هـ'(س) = -قتا^2(1 - 5س) \times -5$

* $هـ(س) = ظا(جاس + س^2)$

$هـ'(س) = قا^2(جاس + س^2)(جتاس + 2س)$

* $هـ(س) = ظتا((س^3 + 5س)(1 + 2س))$

$هـ'(س) = -قتا^2((س^3 + 5س)(1 + 2س)) \times$
$[(3س^2 + 5)(1 + 2س) + (س^3 + 5س)(2)]$

* $هـ(س) = ظا(جاس^2)$

$هـ'(س) = قا^2(جاس^2) \times جتاس$

* $هـ(س) = ظتا\left(\frac{جاس + س^2}{س^3 + جتاس}\right)$

$هـ'(س) = -قتا^2\left(\frac{جاس + س^2}{س^3 + جتاس}\right) \times$
$\left[\frac{(س^3 + جتاس)(جتاس + 2س) - (جاس + س^2)(3س^2 - جاس)}{(س^3 + جتاس)^2}\right]$

* $هـ(س) = ظا\left(\frac{س^2 + 1}{1 - 5س}\right)$

$هـ'(س) = قا^2\left(\frac{س^2 + 1}{1 - 5س}\right) \times$
$\left(\frac{(1 - 5س)(2س) - (س^2 + 1)(-5)}{(1 - 5س)^2}\right)$

* $هـ(س) = ظا\left(\frac{جاس}{س^2 + 1}\right)$

$هـ'(س) = قا^2\left(\frac{جاس}{س^2 + 1}\right) \times$
$\left(\frac{(س^2 + 1)جتاس - جاس \times 2س}{(س^2 + 1)^2}\right)$

* $هـ(س) = ظتا 5س \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2 5س \times 5$

* $هـ(س) = ظتا 3س \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2 3س \times 3$

* $هـ(س) = ظتا(جاس) \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2(جاس) \times جتاس$

* $هـ(س) = ظتا(5س^2 + 2)$

$هـ'(س) = -قتا^2(5س^2 + 2)(10س)$

* $هـ(س) = ظتا 5س \leftarrow هـ'(س) = -قتا 5س ظتا 5س \times 5$

* $هـ(س) = قاس \leftarrow هـ'(س) = قاس ظاس$

* $هـ(س) = قا 3س \leftarrow هـ'(س) = قا 3س ظا 3س \times 3$

* $هـ(س) = قاه(س) \leftarrow هـ'(س) = قاه(س) ظاه(س) \times هـ'(س)$

* $هـ(س) = قا(س^2 + 2)$

$هـ'(س) = قا(س^2 + 2) ظا(س^2 + 2)(2س)$

* $هـ(س) = ظتا 5س \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2 5س$

* $هـ(س) = ظتا 3س \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2 3س \times 3$

* $هـ(س) = ظتا(جاس) \leftarrow هـ'(س) = -قتا^2(جاس) \times جتاس$

* $هـ(س) = قا(جاس)$

$هـ'(س) = قا(جاس) ظا(جاس)(جتاس)$

* $هـ(س) = ظتا(5س^2 + 2)$

$هـ'(س) = -قتا^2(5س^2 + 2)(10س)$

* $هـ(س) = ظتا 5س \leftarrow هـ'(س) = -قتا 5س ظتا 5س$

* $هـ(س) = قتا 3س \leftarrow$

$هـ'(س) = -قتا 3س \times ظتا 3س \times 3$ (١٧)

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$هـ(س) = ق تا^{هـ}(س)$ ←

$هـ'(س) = -ق تا^{هـ}(س) \times ظتا(س) \times هـ'(س)$

* $هـ(س) = ق تا(س^٢ + ٢)$

$هـ'(س) = -ق تا(س^٢+٢) \times ظتا(س^٢+٢) \times ٢س$

* $هـ(س) = ق تا(٤س + ٢)$

$هـ'(س) = -ق تا(٤س+٢) \times ظتا(٤س+٢) \times ٤$

* $هـ(س) = ق تا(جاس)$.

$هـ'(س) = -ق تا(جاس) \times ظتا(جاس) \times جتاس$.

* إذا كان $هـ(س) = جا(س^٢) + جتا(س^٣)$

أوجد $هـ'(س)$ ؟

- الحل: $هـ'(س) = جتا(س^٢) \times ٢س + -جا(س^٣) \times ٣س^٢$

$هـ'(س) = ٢س\ جتا(س^٢) - ٣س^٢\ جا(س^٣)$.

* أوجد $هـ'(س)$ للاقترانات:

$هـ(س) = \frac{جاس + جتاس}{س^٢ + ظاس}$

- الحل:

$هـ'(س) = \frac{(س^٢+ظاس)(جتاس - جاس) - (جاس+جتاس)(٢س+قا^٢س)}{(س^٢+ظاس)^٢}$

* أوجد $هـ'(س)$ للاقترانات التالية:

ب) $هـ(س) = س^٢ + جا(٥س)$

ج) $هـ(س) = \frac{جا(س^٢+١)}{جتا(١-٥س^٢)}$

● $هـ(س) = (هـ(س))^ن$

$هـ'(س) = ن(هـ(س))^{ن-١} \times هـ'(س)$

* $هـ(س) = (س^٣+٢)^٩$

$هـ'(س) = ٩(س^٣+٢)^٨ \times ٣س^٢$

* $هـ(س) = (١-٤س)^{١٠٠}$

$هـ'(س) = ١٠٠(١-٤س)^{٩٩} \times (-٤)$.

* $هـ(س) = (١+س^٣+٣س)^{١٣}$

$هـ'(س) = ١٣(١+س^٣+٣س)^{١٢} \times (٣س^٢+٣)$

* $هـ(س) = (جاس + جتاس)^٥$

$هـ'(س) = ٥(جاس+جتاس)^٤(جتاس - جاس)$

● $هـ(س) = (هـ(س))^{\frac{ب}{ج}}$

$هـ'(س) = \frac{ب}{ج}(هـ(س))^{\frac{ب}{ج}-١} \times هـ'(س)$.

* $هـ(س) = (جاس + جتاس)^{\frac{٩}{٢}}$

$هـ'(س) = \frac{٩}{٢}(جاس+جتاس)^{\frac{٧}{٢}} \times (جتاس - جاس)$

* $هـ(س) = (ظاس + جاس)^{\frac{١}{٣}}$

$هـ'(س) = \frac{١}{٣}(ظاس+جاس)^{-\frac{٤}{٣}} \times (قا^٢س + جتاس)$.

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

القذف في الرياضيات

subject: Date:

الإقتران	التجهيز
٥) $س^٢ + ١$	$\frac{١}{٥}(س^٢ + ١)$
٧) $س^٣ + ٥س + ١$	$\frac{١}{٧}(س^٣ + ٥س + ١)$
٣) $س^٢ + ٥$	$\frac{١}{٣}(س^٤ + ٥)$
٤) $٣(٢س + ١)$	$\frac{٣}{٤}(٢س + ١)$

● مشتقة الجذور

$هـ(س) = \sqrt[ن]{ق(س)}$ أولاً نحوله على شكل $س^{\frac{١}{ن}}$

$هـ(س) = (ق(س))^{\frac{١}{ن}}$

$هـ'(س) = \frac{١}{ن}(ق(س))^{\frac{١}{ن}-١} \times ق'(س)$

* $ق(س) = \sqrt[٧]{س^٢ + ٣}$

$ق(س) = (س^٢ + ٣)^{\frac{١}{٧}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٧}(س^٢ + ٣)^{-\frac{٦}{٧}} \times ٢س$

* $ق(س) = \sqrt[٥]{جاس + جتاس}$

$ق(س) = (جاس + جتاس)^{\frac{١}{٥}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٥}(جاس + جتاس)^{-\frac{٤}{٥}} \times$
$(جتاس - جاس)$

* $ق(س) = \sqrt[٣]{جا^٣س + جتا^٢س}$

$ق(س) = (جا^٣س + جتا^٢س)^{\frac{١}{٧}}$

$ق'(س) = \frac{١}{٧}(جا^٣س + جتا^٢س)^{-\frac{٦}{٧}}$
$\times (جتا^٣س \times ٣جاس - جا^٢س \times ٢جتاس)$

● مشتقة الجذر التربيعي :

$ق(س) = \sqrt{هـ(س)}$

$ق'(س) = \frac{هـ'(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$

$ق'(س) = \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{٢ \times \text{نفس الجذر}}$

* $ق(س) = \sqrt{س^٢ + ٣س + ١}$

$ق'(س) = \frac{٢س + ٣}{٢\sqrt{س^٢ + ٣س + ١}}$

* $ق(س) = \sqrt{جاس + جتاس}$

$ق'(س) = \frac{جتاس - جاس}{٢\sqrt{جاس + جتاس}}$

* $ق(س) = \sqrt{س^٢ + س^٣ + جا^٢س}$

$ق'(س) = \frac{٢س + ٣س^٢ + ٢جاس جتاس}{٢\sqrt{س^٢ + س^٣ + جا^٢س}}$

* $ق(س) = \sqrt{جاس + ظاس}$

$ق'(س) = \frac{جتاس + قا^٢س}{٢\sqrt{جاس + ظاس}}$

★ أسئلة متنوعة على قوانين الاشتقاق ★

● $ق(س) = س^٣ \times هـ(س) \times ٣^{(س)}$

أوجد $ق'(٢)$ إذا علمت أن :

$هـ(٢) = ١$ ، $م(٢) = ٣$

$هـ'(٢) = ٥$ ، $م'(٢) = ١٠$

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

● إذا علمت أن نهـا $\frac{هـ(ع)-هـ(٢)}{ع-٢} = ١٠$
$ع \to ٢$
فإن نهـا $\frac{ل(س)-ل(٢)}{س-٢}$ يساوي:
(أ) ١٤ ب) ١٦ جـ) -١٤ د) ٦

● إذا كان هـ(س) = ٥ هـ(س) × $س^{٣}$ ،
أوجد هـَ(١) إذا علمت أن:
هـَ(١) = ٥ ، هـ(١) = ١٠
(أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $-\frac{٤}{٣}$ جـ) $\frac{٥}{٣}$ د) $-\frac{٧}{٣}$

● إذا كان هـ(س) = $\frac{(س^{٢}+١)(س+٢)^{١٠}}{(س^{٢}+١)}$
أوجد هـَ(س) ؟

● إذا كان هـ(س) = $س^{٢}$ × هـ(س) وعلمت أن هـَ(٣) = ٥ ، هـ(٣) = ٤ ، أوجد هـَ(٣) ؟
هـَ(س) = $س^{٢}$ × هـَ(س) + هـ(س) × ٢س
هـَ(٣) = ٩ × هـَ(٣) + هـ(٣) × ٦
هـَ(٣) = (٩ × ٥) + (٦ × ٤) = ٤٥ + ٢٤ = ٦٩

● إذا كان هـ(س) = ٥س × هـ(س) وعلمت أن هـ(٣) = ٣ ، هـَ(٣) = ٤ ، أوجد هـَ(٣)
هـَ(س) = ٥س × هـَ(س) + هـ(س) × ٥
هـَ(٣) = ٥ هـَ(٣) + ٥ هـ(٣)
هـَ(٣) = (١٥ × ٤) + (٣ × ٥) = ٦٠ + ١٥ = ٧٥

● إذا كان هـ(س) = $س^{٢}$ × هـ(س) وعلمت أن هـَ(٣) = ٥ ، هـ(٣) = ٤ ، أوجد هـَ(٣) ؟
هـَ(س) = ٢س × هـ(س) + $س^{٢}$ × هـَ(س)
هـَ(٣) = ٦ × هـ(٣) + ٩ × هـَ(٣)
هـَ(٣) = (٦ × ٤) + (٩ × ٥) = ٢٤ + ٤٥ = ٦٩

● إذا كان هـ(س) = $\frac{٥س}{هـ(س)}$ وعلمت أن هـ(٣) = ٣ ، هـَ(٣) = ٤ ، أوجد هـَ(٣)
هـَ(س) = $\frac{٥ \times هـ(س) - ٥س \times هـَ(س)}{(هـ(س))^{٢}}$
هـَ(٣) = $\frac{٥ هـ(٣) - ١٥ هـَ(٣)}{(هـ(٣))^{٢}}$
هـَ(٣) = $\frac{(٥ \times ٣) - (١٥ \times ٤)}{٣^{٢}}$ = $\frac{١٥ - ٦٠}{٩}$ = $-\frac{٤٥}{٩}$ = -٥

● إذا كان هـ(س) = $\frac{٥}{س^{٢}}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ يساوي:
(أ) $-\frac{٥}{س^{٣}}$ ب) $\frac{٥}{س^{٣}}$ جـ) $-\frac{١٠}{س^{٣}}$ د) $\frac{١٠}{س^{٣}}$

● إذا كان هـ(س) = $\frac{س^{٢}+٥}{س}$ فإن هـَ(١) =
(أ) ٥ ب) -٥ جـ) ٣ د) ٢

● إذا كان هـ(س) = $س^{٣}$ + ٥س + ٨
فإن هـَ(٠) =
(أ) ٥ ب) -٥ جـ) ٣ د) ٢

● هـ(س) = $\frac{١}{س^{٢}}$ + $س^{٢}$ فإن هـَ(٢) يساوي:
(أ) $-\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{٢}{٤}$ جـ) $-\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{١}{٤}$

● إذا كان هـ(س) = $\sqrt{س^{٢}+٥}$ فإن هـَ(١) =
(أ) $\frac{٤}{٣}$ ب) $-\frac{٤}{٣}$ جـ) $\frac{٥}{٣}$ د) $-\frac{٧}{٣}$

● هـ(س) = $\frac{س^{٤}}{٢}$ + $س^{٣}$ فإن هـَ(س) ؟
(أ) $-\frac{س^{٣}}{٢} - ٣س^{٢}$ ب) $\frac{س^{٣}}{٢} + ٣س^{٢}$
جـ) $-٢س^{٣} - ٣س^{٢}$ (د) $٢س^{٣} + ٣س^{٢}$.

● هـ(س) = س($س^{٢}$ + ٥) فإن هـَ(س) =
(أ) $٣س^{٢}$ + ٥ ب) $-٣س^{٢}$ + ٢
جـ) ٢س + ٥ د) ٢س

● ص = $\sqrt{س^{٥}}$ فإن $\frac{د ص}{د س}$ تساوي:
(أ) $س^{\frac{٣}{٥}}$ ب) $\frac{٢}{٥} س^{\frac{٣}{٥}}$
جـ) $-\frac{٢}{٥} س^{-\frac{٣}{٥}}$ (د) $\frac{٢}{٥} س^{-\frac{٣}{٥}}$

● إذا كان هـ(س) = س + ٥ فإن هـَ(٥) =
(أ) ٣ ب) ٢ جـ) صفر (د) ١

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● $مـ(س) = |س|$ فإن $مـ'(٢٥)$:

(أ) $\frac{١}{١٠}$ ب) $-\frac{١}{١٠}$ ج) $-\frac{٢}{١٠}$ د) $\frac{١}{٢٥}$

● إذا كان $مـ(س) = هـ(س) + ٥س$ و

كان $هـ'(٥) = ٢٥$ فإن $مـ'(٥)$:

أ) ٢٥ (ب) ٣٠ ج) ٣ د) -٢

● إذا كان $مـ(س) = س^{٢} هـ(س)$ و

علمت أن $هـ'(١) = ٥$ ، $هـ(١) = ٧$

فإن $مـ'(١)$:

(أ) ١٩ ب) -١٩ ج) ١٣ د) صفر

● إذا كان $مـ(س) = \frac{هـ(س)}{س^{٢}}$ ، $س \neq -١$

وعلمت أن $هـ'(٢) = ٣$ ، $هـ(٢) = ٧$

فإن $مـ'(٢)$:

(أ) ٢ ب) -٢ ج) ٣ د) صفر

● إذا كان $مـ(س) = هـ(س)$ وكان :

$هـ'(٣) = ٥$ ، $هـ(٣) = ٤$ فإن $مـ'(٣)$:

(أ) ٦٩ ب) -٩٦ ج) صفر د) ٥

● إذا كان $(\frac{مـ}{هـ})'(١)$ تساوي :

(أ) صفر ب) ٣ ج) ٤ د) $٢^{٢}$

● إذا كان $مـ(١) = ٣$ ، $مـ(١) = ٢$ ، فإن

$(\frac{٧}{مـ})'(١)$ تساوي ؟

أ) $\frac{٢١}{٤}$ (ب) $-\frac{٢١}{٤}$ ج) $\frac{٢٣}{٤}$ د) صفر

● إذا كان $مـ(س) = س^{٣} + ٥$ فإن

$مـ'(٥)$ تساوي :

أ) -٧٥ (ب) ٧٥ ج) صفر د) لا يمكن

● إذا كان $مـ(س) = \frac{س + ١}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq ٠$

وعلمت أن $هـ'(٢) = ٥$ ، $هـ(٢) = ١$ ،

فإن $مـ'(١)$ تساوي ؟

(أ) $\frac{٢}{٢٥}$ ب) $-\frac{٢}{٢٥}$ ج) صفر د) لا يمكن

● إذا كان $مـ(س) = س^{٢} + ٧$ فإن قيم $س$

التي تجعل $مـ'(س) = ١٠$ هي :

أ) -٥ (ب) ٥ ج) ١٠ د) صفر

● إذا كان $مـ(س) = س^{٢} - ٢٠س$ فإن

قيمة $س$ التي تجعل $مـ'(س) =$ صفر هي

(أ) ١٠ ب) -١٠ ج) ٢ د) ٥

● إذا كان $مـ(س) = ١ - س^{٣}$ وتغيرت

$س$ من ٢ ، $\Delta س$ فإن التغير في $مـ$ يقترب

من -٨ عندما $\Delta س \to$

أ) ٤ ب) صفر (ج) ٣ د) -٨

● إذا كان $مـ(١) = ٣$ ، $مـ(١) = ٢$ ، فإن

$مـ(س) = س^{٢} + ١$ ، فإن متوسط

منصة القلم التعليمية AL QALAM EDUCATION

التغير عندما تتغير س من ١ إلى ٣ هو:
أ) صفر ب) ٧ ج) ٤ د) ٥

* إذا كان هـ(٣) = ٥ ، هـ(١) = ١٧ ، وتغيرت س من ١ إلى ٣ فإن متوسط التغير:
أ) -٦ ب) ٦ ج) صفر د) ٥

* إذا كان هـ(س) = $س^3$ فإن:
إحدى هـ(س+هـ) - هـ(س) تساوي:
أ) $3س^2$ ب) $6س^2$ ج) ٧ د) صفر

* إذا كان هـ(س) = $س^3 + ٥$ فإن قيم س التي تجعل هـ'(س) = ٦٠ هي:
أ) ١٠ ب) ٦ ج) -١٠ د) صفر

* إذا كان هـ(س) = $س^3 + ٧س$ فإن
هـ'(١) تساوي:
أ) ٩٠ ب) -٩ ج) صفر د) ٤

* إذا كان هـ(س) = $س^2 + ٥س + ٣$ فإن
هـ'(٥) تساوي:
أ) ٢٠ ب) -٢٠ ج) ٤٠ د) صفر

* هـ(س) = $س^3 - ٣س^2$ ، س ∈ [-٢ ، ٣]
جد جميع س التي تجعل هـ'(س) = صفر

٤) ؟ ج) ٢ ب) ٥ أ) ١

* إذا كان هـ(س) = $٢\sqrt{س}$ ، وكان
هـ'(١) = ٢ ، جد قيم ٢.

* هـ(س) = $س\sqrt{س^2 + ٥}$ ، جد هـ'(٢) ؟

* إذا كان هـ(س) = $\frac{٢}{٥س + ١}$ ، أوجد
قيمة ٢ ، إذا كانت هـ'(١) = ٥ ؟
- الحل: هـ'(س) = $\frac{-٢٥}{(٥س+١)^2}$ ← هـ'(١) = $\frac{-٢٥}{٣٦}$

$٥ = \frac{-٢٥}{٣٦}$ ← ٢ = -٣٦

* إذا كان ل(٢) = ١ ، ل'(٢) = ٥ ، وكان
هـ(س) = $(س^3 ل(س))^3$ ، أوجد هـ'(٢) ؟
- الحل: هـ'(س) = $3(س^3 ل(س))^2 \times$
$(٢س ل(س) + س^3 ل'(س))$
هـ'(٢) = $3(٤ل(٢))^2 \times (٤ل(٢) + ٤ل'(٢))$
هـ'(٢) = $3(٤ \times ١)^2 \times (٤ \times ١) + (٤ \times ٥)$
هـ'(٢) = $3(١٦) \times (٤ + ٢٠) = ٤٨ \times ٢٤$
∴ هـ'(٢) = ١١٥٢ .

* إذا كان ٣(٣) = ٧ ، م'(٣) = ٤ ، وكان
هـ(س) = $(٢س^3 + م(س))^3$ ، أوجد هـ'(٣) ؟
- الحل: هـ'(س) = $3(٢س^3 + م(س))^2 (٤س + م'(س))$

التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

هَ(٣) = ٣(١٨+٣(٣))²(١٢+٣²(٣))

هَ(٣) = ٣(١٨+٧)²(١٢+٤)

هَ(٣) = ٣(٢٥)²(١٦) ← ∴ هَ(٣) = ٣٠٠٠٠

● إذا كان هـ(س) = ا س × م(س) وكان هـ(١) = ٤، هَ(١) = ٣، أوجد مَ(١)؟

- الحل: م(س) = هـ(س) / ا س

مَ(س) = (ا س هَ(س) − هـ(س) × ١/(٢ ا س)) / ا س

مَ(١) = (هَ(١) − هـ(١) × ١/٢) / ١

مَ(١) = ٣ − ٢ = ١

● د/د س (س د/د س (س³ − ٣س))

- الحل: د/د س (س (٣س² − ٣))

د/د س (٣س⁴ − ٣س)

= ٤س − ٣

● أوجد د²/د س² (س⁵ + ٤س)(س³ + ١)

- الحل: د²/د س² ((س⁵ + ٤س)(٣س²))

د²/د س² (٣س⁶ + ٨س³)

= (١٢س⁵ + ٢٤س²)

= ١٢ × ٥س⁴ + ٢٤ × ٢س = ٦٠س⁴ + ٤٨س

● إذا كان هـ(س) = س³ − ٦س²، جد أصفار المشتقة الأولى حيث

س ∈ [−٣، ١].

- الحل: هَ(س) = ٣س² − ١٢س = ٠

* أصفار المشتقة الأولى هي هَ(س) = ٠

ويجب الانتباه أن صفر المشتقة ليس طرف فترة ويكون الصفر ضمن الفترة.

٣س² − ١٢س = ٠ ← ٣س(س − ٤) = ٠ ←

س = صفر ، س = ٤ لا تقبل.

∴ أصفار المشتقة هي س = صفر فقط.

● هـ(ص) = ص³ − ٣ص²، ص ∈ [٠، ٤]، أوجد أصفار المشتقة الأولى؟

- الحل: هَ(ص) = ٣ص² − ٦ص = ٠ ←

ص(٣ص − ٦) = ٠

* ص = صفر لا تقبل لأن المشتقة عند الطرف عندها جوة.

ص = ٢ لا تقبل.

∴ لا يوجد أصفار للمشتقة لهذا الفترة المعطاة.

● هـ(س) = ٢س³ + ٦س² وعلمت أن العدد ٢ جذر للمشتقة، أوجد قيمة ا؟

- الحل: هَ(س) = ٣ا س² + ١٢س ←

هَ(−٢) = ٠

١٢ا − ٢٤ = ٠ ← ١٢ا = ٢٤ ← ا = ٢

● إذا كانت هَ(س) = س³ − ٦س²،

وإذا علمت أن: هـ(١) = ٢، هَ(١) = ٥،

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: سعد الدين التفتازاني Date:

هـ(١)=٣، هَ(١)=٤، هَّ(١)=١،
هَ(٣)=*، هَّ(٣)=$\frac{1}{٣}$، هَ(٢)=٤،
هَ(٤)=٧، هَ($\frac{1}{٢}$)=٦، هَّ(٥)=٤
أوجد ما يلي :

١) $\frac{د}{د س}$ (هـ(س) - ٣ هـ(س))$|_{س=١}$ =
هَ(١) - ٣ هَ(١) = ٥ - ١٢ = -٧

---

٢) $\frac{د}{د س}$ (هـ(س) × هـ(س))$|$
= هـ(س) × هَ(س) + هـ(س) × هَ(س)
= هـ(١) × هَ(١) + هـ(١) × هَ(١)
= ٨ + ١٥ = ٢٣

---

٣) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{هـ(س)}{هـ(س)}$)$|_{س=١}$ =
$\frac{هـ(١) \times هَ(١) - هـ(١) \times هَ(١)}{هـ^{٢}(١)}$
= $\frac{١٥ - ٨}{٩}$ = $\frac{٧}{٩}$.

---

٤) $\frac{د}{د س}$ ($\frac{٧}{هـ(س)}$)$'$(١) = $\frac{-٧ هَ(١)}{هـ^{٢}(١)}$
= $\frac{-٨}{٩}$.

---

٥) (هـ(س) + ٢ هـ(س))$'$(١)
= $\frac{هَ(١) + ٢ هَ(١)}{٢ هـ(١) + ٢ هـ(١)}$ = $\frac{١٣}{١٨}$.

٦) (هَ(١))$'$ = (٥)$'$ = صفر

★ المشتقات العليا ★

* هَ(س) = $\frac{د ص}{د س}$ ويقصد بها المشتقة الأولى.
* هَّ(س) = $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ ويقصد بها المشتقة الثانية لـ هـ(س).
* هَّّ(س) = $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}}$ ويقصد بها المشتقة الثالثة.
* هـ^(ن)(س) = المشتقة النونية.

● إذا كان هـ(س) = س^٥، أوجد هـ^(٣)(س)؟
- الحل : هَ(س) = ٥ س^٤
هَّ(س) = ٥×٤ س^٣ = ٢٠ س^٢.
* هَّّ(س) = ٢×٢٠ س = ٦٠ س.

● إذا كان هـ(س) = س^٢ + ٥ س، أوجد هَّ(س) ؟
هَ(س) = ٢ س + ٥
هَّ(س) = ٢

● إذا كان هـ(س) = ٢ س^٣ - س^٢، أوجد أيضاً هَّ(٢) ؟
- الحل : هَ(س) = ٦ س^٢ - ٢ س
هَّ(س) = ١٢ س - ٢ = ٠ ← ١٢ س = ٢
← س = $\frac{١}{٦}$.

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: Sa'ad el-dein Bustanji
0795420542
0788982806
Date:

∴ المشتقة الثانية تساوي صفر عندما

$س = \frac{1}{6}$.

● إذا كان $مـ(س) = س^5 + 4س^3 + و$

علمت أن $مـ''(1) = 5$ ، أوجد قيمة ؟

- الحل : $مـ'(س) = 5س^4 + 12س^2$

$مـ''(س) = 20س^3 + 24س$

$مـ''(1) = 20 + 24 = 5 \leftarrow 24 = 5 - 20$

$24 = -15 \leftarrow P = -\frac{15}{2}$.

● $ص = \frac{3}{مـ(س) + س}$ ، بيان $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=1}$ حيث $مـ(1) = 2$ ، $مـ'(1) = 3$

★ تمهيد قاعدة السلسلة ★

العلاقة	المشتقة
$ص = س^3 + 5س + 1$	$\frac{د ص}{د س} = 3س^2 + 5$
$ع = س^4 + 3س + 2$	$\frac{د ع}{د س} = 4س^3 + 3$
$ص = ع^2 + 2$	$\frac{د ص}{د ع} = 2ع$
$ص = ل^2 + 2ل + 1$	$\frac{د ص}{د ل} = 2ل + 2$

● إذا كانت $ص = ل^2 + 5ل + 1$ ،

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ، $\left.\frac{د ص}{د ل}\right|_{ل=4}$

- الحل : $\frac{د ص}{د ل} = 2ل + 5$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{ل=4} = 13 \times 42.5 = 546$.

● إذا كان $ص = ع^2 + 5$ ، أوجد

$\frac{د ص}{د ع}$ ، $\frac{د ص}{د س}$ ، $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{س=1}$ ، $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{ص=9}$

- الحل : $\frac{د ص}{د ع} = 2ع$ ، $\frac{د ع}{د س} = \frac{1}{2ع}$

* $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{س=1} = 2ع = 2 \times 1 = 2$

يجب أن نستخرج قيمة "ع أولاً"

* $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{ص=9}$

$ص = ع^2 + 5 \leftarrow 9 = ع^2 + 5 \leftarrow ع = \pm 2$

$\frac{د ص}{د ع} = 2ع$ ، $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{ع=2} = 4$ ، $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{ع=-2} = -4$

● إذا كان $س = ل^2 + 2ل + 1$ ، أوجد

$\frac{د س}{د ل}$ ، $\left.\frac{د ل}{د س}\right|_{ل=1}$ ، $\left.\frac{د ل}{د س}\right|_{س=1}$

- الحل :

$\frac{د س}{د ل} = 2ل + 2$

* $\left.\frac{د ل}{د س}\right|_{ل=1} = \frac{1}{2ل + 2}$ ، $\left.\frac{د ل}{د س}\right|_{س=1} = \frac{1}{12}$

● $ص = ع^3 + 2ع + 7$ ، أوجد :

$\frac{د ص}{د ع}$ ، $\frac{د ع}{د ص}$

- الحل : $\frac{د ص}{د ع} = 3ع^2 + 2$ ، $\frac{د ع}{د ص} = \frac{1}{3ع^2 + 2}$

● إذا كان $ص = ل^2 + 3$ ، أوجد :

$\frac{د ص}{د ل}$ عندما $ص = 4$ ؟

- الحل : $\frac{د ص}{د ل} = 2ل$ ، لكن يجب معرفة قيم ل .

منصة العلم
AL-OALLAM EDUCATION

NOTE BOOK

ص = ل^{٣} + ٣ل^{٢} = ٤ ← ٣ل^{٢} = ١ ← ل^{٢} = ١ ← ل = ±١

$\left.\frac{د ص}{د ل}\right|_{ص=٤}$ = ±٢

● ص = ع^{٣} + ع ، أوجد $\frac{د ص}{د ع}$ ؟

- الحل: $\frac{د ص}{د ع}$ = ٣ع^{٢} + ١ ، $\left.\frac{د ص}{د ع}\right|_{ع=١}$ = ٣+١ = ٤

$\frac{د ع}{د ص}$ = $\frac{١}{٣ع^{٢}+١}$ ، $\left.\frac{د ع}{د ص}\right|_{ع=١}$ = $\frac{١}{٤}$

● إذا كان ص = ن^{٢} + ٣ن + ١ ، أوجد

$\frac{د ص}{د ن}$ ، $\frac{د ن}{د ص}$ ، $\left.\frac{د ص}{د ن}\right|_{ن=١}$

- الحل:

$\frac{د ص}{د ن}$ = ٢ن + ٣ ، $\frac{د ن}{د ص}$ = $\frac{١}{٣+٢ن}$

$\left.\frac{د ص}{د ن}\right|_{ن=١}$ = ٢+٣ = ٥.

٤ ★ قاعدة السلسلة ★

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$

● إذا كان ص = ن^{٢} + ١ ، ن = ٥س^{٢} + ٣

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ، $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١

- الحل: $\frac{د ص}{د ن}$ = ٢ن ، $\frac{د ن}{د س}$ = ١٠س

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ن} \times \frac{د ن}{د س}$ = ٢ن × ١٠س = ٢٠ن س

ن = ٥س^{٢} + ٣ ، س = ١ ← ن = ٨

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١}$ = ٢٠ × ٨ × ١ = ١٦٠.

● إذا كان ص = ل^{٣} + ٤ل + ٢ ، كان

ل = س^{٢} + ٢س + ٧ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

- الحل: $\frac{د ص}{د ل}$ = ٣ل^{٢} + ٤ ، $\frac{د ل}{د س}$ = ١٠س + ٢

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$ = (٣ل^{٢} + ٤)(١٠س + ٢)

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣ ((س^{٢} + ٢س + ٧)^{٢} + ٤)(١٠س + ٢).

● إذا كان ص = ل^{٢} + ٧ ، ل = ٥س^{٣} + ٢

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ، $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢}$ ؟

- الحل:

$\frac{د ص}{د ل}$ = ٢ل ، $\frac{د ل}{د س}$ = ١٥س^{٢}.

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$ = ٢ل × ١٥س^{٢}

= ٣٠ ل س^{٢}

$\frac{د ص}{د س}$ = ٣٠ س^{٢} (٥س^{٣} + ٢)

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٢}$ = ٣٠ × ٤ (٥ × ٨ + ٢) = ٥٠٤٠.

● إذا كان ص = ع^{٣} + ١ ، ع = ٥س^{٢} + ٢س ،

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

المتة في الرياضيات Al-Bustanji

- الحل: $\frac{ص}{ع} = ٣ع^{٢}$ ، $\frac{ع}{س} = ١٠س + ٢$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{س} = ٣ع^{٢}(١٠س+٢)$

● إذا كان $ص = ل^{٦} + ٢ل + ١$ ،

$س = ٥ل^{٢} + ٦$ ، أوجد $\frac{ص}{س}\Big|_{ل=١}$ ؟

- الحل:

$\frac{ص}{ل} = ٦ل^{٥} + ٢$ ، $\frac{س}{ل} = ١٠ل$ ←

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \times \frac{ل}{س} = (٦ل^{٥}+٢) \times \frac{١}{١٠ل}$

$\frac{ص}{س}\Big|_{ل=١} = \frac{٨}{١٠}$.

★ المشتقة الوسطية ★

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \div \frac{س}{ل}$$

● $ص = ل^{٦} + ٢ل + ١$ ، $س = ٥ل^{٢} + ٦$

$\frac{ص}{ل} = ٦ل^{٥} + ٢$ ، $\frac{س}{ل} = ١٠ل$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \div \frac{س}{ل} = \frac{٦ل^{٥}+٢}{١٠ل}$$

● إذا كان $ص = ع^{٣} + ١$ ، $س = ع^{٢} + ع + ١$ ،

أوجد $\frac{ص}{س}$ عندما ع = ١ ؟

- الحل: $\frac{ص}{ع} = ٣ع^{٢}$ ، $\frac{س}{ع} = ٢ع + ١$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \div \frac{س}{ع} = \frac{٣ع^{٢}}{٢ع+١}$$

$\frac{ص}{س}\Big|_{ع=١} = \frac{٣}{٣} = ١$

● $ص = ل^{٢} + ل + ٢$ ، $س = ل^{٣} + ل$ ،

أوجد $\frac{ص}{س}\Big|_{ل=٢}$ ؟

- الحل:

$\frac{ص}{ل} = ٢ل + ١$ ، $\frac{س}{ل} = ٣ل^{٢} + ١$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \div \frac{س}{ل} = \frac{٢ل+١}{٣ل^{٢}+١}$$

$\frac{ص}{س}\Big|_{ل=٢} = \frac{٥}{١٣}$.

● إذا كان $ص = ل^{٣} + ١$ ، $س = ل^{٥} + ٢$ ،

أوجد $\frac{ص}{س}$ عندما ل = ١

- الحل: $ص = ل^{٣} + ١ \leftarrow \frac{ص}{ل} = ٣ل^{٢}$

$س = ل^{٥} + ٢ \leftarrow \frac{س}{ل} = ٥ل^{٤}$

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} \div \frac{س}{ل} = \frac{٣ل^{٢}}{٥ل^{٤}} = \frac{٣}{٥}$

● إذا كان $ص = ع^{٣} + ٤ع + ١٥$ ، $س = ع^{٣} + ٧$ ،

أوجد $\frac{ص}{س}\Big|_{ع=٢}$ ؟

- الحل: $\frac{ص}{ع} = ٣ع^{٢} + ٤$ ، $\frac{س}{ع} = ٣ع^{٢}$

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} \div \frac{س}{ع} = \frac{٣ع^{٢}+٤}{٣ع^{٢}}$$

$\frac{ص}{س}\Big|_{ع=٢} = \frac{١٤}{١٢}$.

NOTE BOOK
منصة العلم التعليمية AL-ALLAM EDUCATION

● ص = جاع ، ع = جاس ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$؟

- الحل: $\frac{د ص}{د ع}$ = جاع ، $\frac{د ع}{د س}$ = -جاس

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$ = (جاع)(-جاس)

$\therefore \frac{د ص}{د س}$ = جتا (جاس) (-جاس).

● ص = جتال ، ل = قاس ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$؟

- الحل:

$\frac{د ص}{د ل}$ = -جال ، $\frac{د ل}{د س}$ = قاس ظاس

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$ = (-جال)(قاس ظاس)

$\frac{د ص}{د س}$ = -جا(قاس) (قاس ظاس).

● ص = ع$^{\frac{1}{3}}$ ، ع = ٥س + ١ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام قاعدة السلسلة؟

- الحل: ص = (٥س + ١)$^{\frac{1}{3}}$ (يحتاج إلى ثلاثة رموز)

ص = (ع)$^{\frac{1}{3}}$ ، ع = ٥س + ١

$\frac{د ص}{د ع} = \frac{1}{3}$ ع$^{-\frac{2}{3}}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٥

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{1}{3}$ ع$^{-\frac{2}{3}}$ × ٥ = $\frac{٥}{٣ \text{ ع}^{\frac{2}{3}}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٥}{٣ (٥س + ١)^{\frac{2}{3}}}$

● ص = (س^{٤} - ٥س)^{٥} ، جد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام قاعدة السلسلة؟

ص = ع^{٥} ، ع = س^{٤} - ٥س

$\frac{د ص}{د ع}$ = ٥ع^{٤} ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٤س^{٣} - ٥

جان $\frac{د ص}{د س}$ ؟

- الحل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{٣ \text{ ع}^{٢}}$ ، $\frac{د ع}{د ل}$ = ٣ل^{٢} ،

$\frac{د ل}{د س}$ = ٣

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{1}{٣ \text{ ع}^{٢}} \times$ ٣ل^{٢} × ٣ = $\frac{٩ \text{ ل}^{٢}}{٣ \sqrt{٣ل^{٣} + ٩}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٩ (٣س - ٢)^{٢}}{٣ \sqrt{(٣س - ٢)^{٣} + ٩}}$

● ص = ٣$\sqrt{(٥س + ١)}$ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ باستخدام قاعدة السلسلة؟

- الحل: ص = ٣(٥س + ١)$^{\frac{1}{2}}$ (يحتاج إلى ثلاثة رموز)

ص = ٣(ع)$^{\frac{1}{2}}$ ، ع = ٥س + ١

$\frac{د ص}{د ع} = \frac{3}{2}$ ع$^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{د ع}{د س}$ = ٥

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = \frac{3}{2}$ ع$^{\frac{1}{2}}$ × ٥ = $\frac{١٥}{٢ \sqrt{ع}}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١٥}{٢ \sqrt{(٥س + ١)}}$

● ص = ع^{٢} + ١ ، ع = ٢ل - ١ ، ل = س^{٢} - س

جان $\frac{د ص}{د س}$ = ؟

- الحل:

$\frac{د ص}{د ع}$ = ٢ع ، $\frac{د ع}{د ل}$ = ٢ ، $\frac{د ل}{د س}$ = ٢س - ١

$\frac{د ص}{د س}$ = (٤ع)(٢)(٢س - ١)

$\frac{د ص}{د س}$ = ٤(٢ل - ١)(٢س - ١)

$\frac{د ص}{د س}$ = (٨س^{٢} - ٨س - ٤)(٢س - ١).

● ص = أع ، ع = ل^{٣} + ٩ ، ل = ٣س - ٢

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

0795420542
0788982906

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س} = ٥ ع^{٤} (٤ س^{٣} - ٥)$

$\frac{د ص}{د س} = ٥ (س^{٤} - ٥ س)^{٤} \times (٤ س^{٣} - ٥)$

● $ص = \frac{س + ٥}{س^{٢} + ١}$ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$

باستخدام قاعدة السلسلة ؟

العلاقة	المشتقة
$هـ(س)$	$هـ'(س)$
$هـ(٢س)$	$هـ'(٢س) \times ٢$
$هـ(س^{٢})$	$هـ'(س^{٢}) \times ٢س$
$هـ(جاس)$	$هـ'(جاس) \times جتاس$
$(هـ(س))^{٣}$	$٣(هـ(س))^{٢} \times هـ'(س)$

● إذا كان $ص = هـ(س^{٢})$ و أن
$هـ'(٩) = ١٠$ ، أوجد $\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٣}$ ؟

- الحل: $ص = هـ(س^{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = هـ'(س^{٢}) \times ٢س$

$\left| \frac{د ص}{د س} \right|_{س = ٣} = هـ'(٩) \times ٦ = ١٠ \times ٦ = ٦٠$

● إذا كان $ص = (هـ(س))^{٣}$ و كان $هـ(٥) = ٤$ ، $هـ'(٥) = ١١$ ، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٢$

$= ٣(هـ(٥))^{٢} \times هـ'(٥) = ٣ \times (٤)^{٢} \times (١١) = ٥ \times ١٦ \times ١١ = ١٥٦$

● إذا كان $هـ(س) = س^{٣} + ٤س + ١$ ،
أوجد $هـ'(١)$ ؟

- الحل: $هـ'(س) \times ٢ = ٣س^{٢} + ٤$

$هـ'(س) = \frac{٣س^{٢} + ٤}{٢}$

$هـ'(١) = \frac{(٣ \times ٢٥) + ٤}{٢} = \frac{٧٩}{٢}$

● إذا كان $هـ(٥س) = س^{٣} + ١$ ،
أوجد $هـ'(١٥)$ ؟

- الحل: $هـ'(٥س) \times ٥ = ٣س^{٢}$

$هـ'(٥س) = \frac{٣س^{٢}}{٥}$

$هـ'(١٥) = \frac{٩ \times ٣}{٥} = \frac{٢٧}{٥}$

$٥س = ١٥$
$س = ٣$

● إذا كان $هـ(س^{٣}) = س^{٣} + ٥س + ١$ ،
أوجد $هـ'(٤)$ ، حيث $س > ٠$ ؟

- الحل: $هـ'(س^{٣}) \times ٣س^{٢} = ٣س^{٢} + ٥$

$هـ'(س^{٣}) = \frac{٣س^{٢} + ٥}{٣س^{٢}}$

$س^{٣} = ٤$
$س = \sqrt[٣]{٤}$

لكن $س$ (من $س$) $= ٢$

$هـ'(٤) = \frac{(٤ \times ٣) + ٥}{٤} = \frac{١٧}{٤}$

● إذا كان $ص = هـ(جا ٢س)$ وكان
$هـ'(٠) = ٧$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = \frac{\pi}{٢}$ ؟

- الحل:

$\frac{د ص}{د س} = هـ'(جا ٢س) \times جتا(٥ س) \times ٢$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=\frac{\pi}{٤}} = هـ'(جا(\pi)) \times ٢ جتا(\pi)$

$= هـ'(٠) \times -٢ = ٧ \times -٢ = -١٤$

● إذا كان ل(س) = هـ(٢س) وكان هـ'(٣) = ٤، أوجد ل'(٩) ؟

- الحل: $ل'(س) = هـ'(٢س) \times \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

$ل'(٩) = هـ'(٣) \times \frac{١}{٦} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

● إذا كان ل(٢س²) = هـ(٣س) وكان هـ'(٣٦) = $\sqrt{٣٦}$، أوجد ل'(١٨) حيث س > ٠ ؟

- الحل: $ل'(٢س^٢) \times ٤س$

$= هـ'(٣س) \times \frac{١}{٢\sqrt{٣س}}$

$ل'(١٨) \times ١٢ = هـ'(٣٦) \times \frac{١}{٢\sqrt{٣٦}}$

$ل'(١٨) = \frac{\sqrt{٣٦}}{١٢ \times ٢\sqrt{٣٦}} = \frac{١}{٢٤}$

$١٨ = ٢س^٢$
$س^٢ = ٨$، $س = \pm ٣$
$س = ٣$

● إذا كان هـ(٣) = ٥، هـ'(٣) = ٣، هـ(٨) = ٤، هـ'(٨) = ٧، أوجد هـ'(٣) إذا علمت أن:

● إذا كان هـ(٢س) = جاس + جتاس أوجد هـ'(π) ؟

- الحل: هـ'(٢س) × ٢ = جتاس − جاس

هـ'(π) × ٢ = $جتا\frac{\pi}{٢} - جا\frac{\pi}{٢}$

هـ'(π) = $-\frac{١}{٢}$

$٢س = \pi$
$س = \frac{\pi}{٢}$

● إذا كان ص = هـ(جا ع)، ع = $\pi س^٢$ هـ'(صفر) = ٦، فما قيمة $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٤}$ حيث س > ٠ ؟

- الحل: ع = $\pi س^٢$، $\pi = \pi س^٢$

$\leftarrow س^٢ = ١ \leftarrow س = ١$

ص = هـ(جا($\pi س^٢$))

$\frac{د ص}{د س} = هـ'(جا(\pi س^٢)) \times جتا(\pi س^٢) \times ٢\pi س$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = هـ'(٠) \times -١ \times ٢\pi$

$= ٦ \times -١ \times ٢\pi = -١٢\pi$

● هـ(س) = هـ(جا ٢س) وكان هـ'(١) = ٣، أوجد هـ'($\frac{\pi}{٤}$) ؟

الإجابة = صفر

- الحل: $هـ(س) = هـ(س^٣) + هـ^٣(س)$ ؟

$هـ'(س) = هـ'(س^٣) \times ٣س^٢ + ٣هـ^٢(س) \times هـ'(س)$

$هـ'(٢) = هـ'(٨) \times ١٢ + ٣هـ^٢(٢) \times هـ'(٢)$

$هـ'(٢) = (٧ \times ١٢) + ٣ \times ٢٥ \times ٣ = ٢٤٣$

● إذا كان هـ(٢س) = جاس + جتاس أوجد هـ'(π) ؟

- الحل: هـ'(٢س) × ٢ = جتاس − جاس

هـ'(π) × ٢ = $جتا\frac{\pi}{٢} - جا\frac{\pi}{٢}$

هـ'(π) = $-\frac{١}{٢}$

$٢س = \pi$
$س = \frac{\pi}{٢}$

● إذا كان ص = هـ(جا ع)، ع = $\pi س^٢$ هـ'(صفر) = ٦، فما قيمة $\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٤}$ حيث س > ٠ ؟

- الحل: ع = $\pi س^٢$، $\pi = \pi س^٢$

$\leftarrow س^٢ = ١ \leftarrow س = ١$

ص = هـ(جا($\pi س^٢$))

$\frac{د ص}{د س} = هـ'(جا(\pi س^٢)) \times جتا(\pi س^٢) \times ٢\pi س$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=١} = هـ'(٠) \times -١ \times ٢\pi$

$= ٦ \times -١ \times ٢\pi = -١٢\pi$

● هـ(س) = هـ(جا ٢س) وكان هـ'(١) = ٣، أوجد هـ'($\frac{\pi}{٤}$) ؟

الإجابة = صفر

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

القمة في الرياضيات مع الأستاذ: سعد لبيه لبنى

subject: Date:

● $س = هـ(٢س+١) = ٢س^{٣} + ٢$ ،
أوجد $هـ'(٣)$ ؟

$هـ(٢س+١) + س هـ'(٢س+١) \times ٢$
$= ٦س^{٢}$

$٢س+١ = ٣ \leftarrow ٢س = ٢ \leftarrow س = ١$

$هـ(٣) + ٢هـ'(٣) = ٦$

$هـ'(٣) = \frac{٦ - هـ(٣)}{٢}$

لكن $هـ(٣)$ من المعادلة الأصلية

التي في السؤال:

$هـ(٣) = ٢ + ٢ = ٤ \leftarrow هـ(٣) = ٤$

$هـ'(٣) = \frac{٦-٤}{٢} = ١$

● $ل(ص) = هـ(س^{٢}) - هـ^{٢}(س)$ ،
أوجد $ل'(١)$ علماً بأن $هـ(١) = ٤$ ،
$هـ'(١) = ٧$.

- الحل: $ل'(س) = هـ'(س^{٢}) \times ٢س -$
$٢هـ(س) \times هـ'(س)$

$ل'(١) = (هـ'(١) \times ٢) - (٢هـ(١) \times هـ'(١))$

$ل'(١) = ١٤ - (٨ \times ٧) = ١٤ - ٥٦$

$ل'(١) = -٤٢$

● إذا كان $ك(س) = س^{٢} + هـ(س)$ و
كان $هـ(س) = ٢ك(س) - ٥$ ، فما
قيمة $هـ'(٣)$ علماً بأن $هـ(٣) = ٨$ ؟

- الحل: $ك'(س) = ٢س + هـ'(س)$

$ك'(٣) = ٦ + هـ'(٣) = ٦ + ٨ = ١٤$

$هـ'(ص) = ٢ك'(س)$

$هـ'(٣) = ٢ك'(٣) = ٢ \times ١٤ = ٢٨$

● إذا كان $ع = جتا ن$ ، $د ن = \frac{-١}{٩} د ع$
فجد $\frac{د ع}{د م}$ عندما $(ن = \frac{\pi}{٢})$ ؟

- الحل: $\frac{د ع}{د م} = \frac{د ع}{د ن} \div \frac{د م}{د ن}$

$\frac{د ع}{د م} = -جا ن \times -٩$

$\frac{د ع}{د م} = ٩ جا ن = ٩ جا(\frac{\pi}{٢}) = ٩$

● إذا كان $هـ(س^{٣}) = س^{٢} + ٤$ فما
قيمة $هـ''(٢٧)$.

- الحل: $هـ'(س^{٣}) \times ٣س^{٢} = ٢س$

$هـ''(س^{٣}) \times ٩س^{٤} + ٦س هـ'(س^{٣}) = ٢$

$(هـ''(٢٧) \times ٨١ \times ٩) + ١٨ هـ'(٢٧) = ١$

$٧٢٩ هـ''(٢٧) + ١٨ هـ'(٢٧) = ٢$

$هـ'(٢٧) \times ٢٧ = ٦$

$هـ'(٢٧) = \frac{٦}{٢٧}$

$٧٢٩ هـ''(٢٧) + ١٨ \times \frac{٦}{٢٧} = ٢$

$٧٢٩ هـ''(٢٧) + ٤ = ٢$

$٧٢٩ هـ''(٢٧) = -٢ \leftarrow هـ''(٢٧) = \frac{-٢}{٧٢٩}$

NOTEBOOK
منصة العلم التعليمية AL SALAM EDUCATION

● إذا كان $هـ(س) = \sqrt{س^3 + 1}$ ،
أوجد $\frac{د}{د س}(\sqrt{هـ(٢س)})$ عندما س = ١؟

- الحل: $= \frac{هـ'(٢س) \times ٢}{٢\sqrt{هـ(٢س)}} = \frac{هـ'(٢) \times ٢}{٢\sqrt{هـ(٢)}}$

$= \frac{هـ'(٢)}{\sqrt{هـ(٢)}}$.

* $هـ'(س) = \frac{٣س^٢}{٢\sqrt{س^٣+١}} \Leftarrow هـ'(٢) = \frac{١٢}{٦} = ٢$

* $هـ(٢) = ٣$

$\frac{د}{د س}(\sqrt{هـ(٢س)}) = \frac{٢}{٣\sqrt{٣}}$.

● إذا كان $ص = ٥ + ٤جا^٢س + ٣جتا٢س$
، أثبت أن $ص'' + ٤ص = ٠$.

- الحل: $ص' = ٨جتا٢س - ٦جا٢س$

$ص'' = -١٦جا٢س - ١٢جتا٢س$

$ص'' + ٤ص = -١٦جا٢س - ١٢جتا٢س$
$+ ٢٠ + ١٦جا٢س +$
$١٢جتا٢س$

$\therefore ص'' + ٤ص = ٢٠$.

● إذا كان $ج(س) = \frac{ل(س)}{هـ(س)}$ وكان
كل من $ل(س)$ ، $هـ(س)$ قابلاً
للاشتقاق عند س = P ، $ج'(P) =$ صفر،
فأثبت أن: $ج(P) = \frac{ل'(P)}{هـ'(P)}$ ، حيث $هـ'(P) \neq ٠$
$هـ(P) \neq ٠$

- الحل: $ج'(س) = \frac{هـ(س)ل'(س) - ل(س)هـ'(س)}{[هـ(س)]^٢}$

$ج'(P) = \frac{هـ(P)ل'(P) - ل(P)هـ'(P)}{[هـ(P)]^٢} = ٠$

$هـ(P)ل'(P) - ل(P)هـ'(P) = ٠$
بالقسمة على $[هـ(P)]^٢$.

$\frac{ل'(P)}{هـ(P)} - \frac{ل(P)}{[هـ(P)]^٢}هـ'(P) = ٠$

$ل'(P) = ج(P)هـ'(P)$

$\leftarrow ج(P) = \frac{ل'(P)}{هـ'(P)}$ #

● إذا كان $ص = ٢س^٣ + ٩س$ ، $س = ٣\sqrt{ن}$ ،
$ن = \sqrt[٣]{ع^٢}$ ، أثبت أن $\frac{د ص}{د ع} = ٥٤$ ؟

- الحل: $\frac{د ص}{د ع} = \frac{د ص}{د س} \times \frac{د س}{د ن} \times \frac{د ن}{د ع}$

$\frac{د ص}{د ع} = ٦س^٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{ن}} \times \frac{٣}{٣ع^{\frac{٢}{٣}}}$

$\frac{د ص}{د ع} = ٦س \times \frac{١}{٢\sqrt{ن}} \times \frac{١}{ع^{\frac{١}{٣}}}$

$\frac{د ص}{د ع} = ٦ \times ٩\sqrt{ن} \times \frac{١}{٢\sqrt{ن}} \times \frac{١}{ع^{\frac{١}{٣}}} = ٥٤$

* $س = ٣\sqrt{ن} \Leftarrow س^٢ = ٩ن$

* $ن = \sqrt[٣]{ع^٢} \Leftarrow ن = ع^{\frac{٢}{٣}} \Leftarrow ع = ن^{\frac{٣}{٢}}$

● إذا كان $هـ(٢س) = س^٣ ج(س)$ وكان
$ل(٦) = ٤$ ، $ل'(٦) = ٥$ ، أوجد $هـ''(٣)$ ؟

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

- الحل: ل'(٢، س) × ٢ =
  س^٣ هـ(س) + ٣ س^٢ هـ(س)
  ٢ ل'(٦) = ٢٧ هـ(٣) + ٢٧ هـ(٣)
  ١٠ = ٢٧ هـ(٣) + ٢٧ هـ(٣)
  لكن ل(٦) = ٢٧ هـ(٣) ← هـ(٣) = ٤/٢٧
  ١٠ = ٢٧ هـ(٣) + ٢٧ × ٤/٢٧
  هـ(٣) = ٦/٢٧ .

- إذا كان هـ(١) = ٢، هـ'(١) = ٥،
  وكان م(س) = هـ(س^٤) - هـ^٤(س)
  ، أوجد م'(١).
  - الحل:
  م'(س) = هـ'(س^٤) × ٤س^٣ - ٤ هـ^٣(س) × هـ'(س)
  م'(١) = (هـ'(١) × ٤) - (٤ هـ^٣(١) × هـ'(١))
  م'(١) = (٤ × ٥) - (٤ × (٢)^٣ × ٥)
  م'(١) = ٢٠ - (٤ × ٨ × ٥) = ٢٠ - ١٦٠
  م'(١) = - ١٤٠.

- ص = م^٤(٥ - س) جد (د ص / د س) عندما س = ٠
  علماً بأن م(٥) = ١، م'(٥) = ٢
  - الحل: د ص / د س = ٤ م^٣ (٥ - س) × م'(٥ - س) × -١
  د ص / د س |_{س=٠} = ٤ م^٣(٥) × م'(٥) × -١
  = ٤ × ١ × ٢ × -١ = -٨

- م(٥ س) = س^٢ - ٣ س + ٥، أوجد
  م'(٧) ؟

- م(س^٣) = (٥ س - ٩)^٧ جد م'(٨)؟
  - الحل: م'(س^٣) × ٣ س^٢ = ٧ (٥ س - ٩)^٦ × ٥
  م'(س^٣) = ٣٥ (٥ س - ٩)^٦ / ٣ س^٢
  م'(١٨) = ٣٥ (١٠ - ٩)^٦ / ٤ × ٣
  م'(٨) = ٣٥/١٢

س^٣ = ٨
س = ٢

★★ التركيب ★★

- م(س) = س^٤ + ٣، هـ(س) = س^٣ + ٢
  (م ○ هـ)(س) = م(هـ(س))
  = م(س^٣ + ٢) = (س^٣ + ٢)^٢ + ٢

- م(س) = جا س، هـ(س) = س^٥، بيّن
  (م ○ هـ)(س) = م(هـ(س))
  = م(س^٥) = جا(س^٥)
  (هـ ○ م)(س) = هـ(م(س))
  هـ(م(س)) = (جا(س))^٥

★ مشتقة التركيب (م ○ هـ)(س) ★

- (م ○ هـ)(س) = م(هـ(س))
  (م ○ هـ)'(س) = م'(هـ(س)) × هـ'(س)
  (هـ ○ م)'(س) = هـ'(م(س)) × م'(س)

منصة القلم التعليمية AL QALAM EDUCATION

* $(ف \circ هـ)'(س) = ف'(هـ(س)) \times هـ'(س)$

* $(ل \circ م)'(س) = ل'(م(س)) \times م'(س)$.

● $ف(س) = س^3 - س$ ، $هـ(س) = \frac{4}{س}$.

أوجد: (أ) $(ف \circ هـ)'(1)$ ، (ب) $(هـ \circ ف)'(1)$

- الحل: * القاعدة الأساسية الثالثة *:

$هـ(1)$ ، $هـ'(1)$ ، $ف'(هـ(1))$

* $م(س) = س^3 - س + 2$ ، $هـ(س) = \frac{4}{س}$

$ف'(س) = 3س^2 - 1$ ، $هـ'(س) = \frac{-4}{س^2}$

* $هـ(1) = 4$ ، $هـ'(1) = -4$ ، $ف'(4) = 47$

* $(ف \circ هـ)'(1) = ف'(هـ(1)) \times هـ'(1)$

$= ف'(4) \times -4 = 47 \times -4 = -188$

* $(هـ \circ ف)'(1) = هـ'(ف(1)) \times ف'(1)$

$= هـ'(2) \times 2 = -1 \times 2 = -2$

● $هـ(س) = \sqrt{س}$ ، $ف(س) = س^3$ ،

$(ف \circ هـ)(4) =$

(أ) 2 (ب) -2 (ج) 32 (د) -32

● $ف(س) = (س^2 - 2)^3$ ،

$هـ(س) = س(2 - س)$ ، أوجد :

أ) $\frac{د}{د س}(ف(هـ(س)))$ عندما $س = 1$

ب) $\frac{د}{د س}(هـ(ف(س)))$ عندما $س = 1$

ج) $(هـ \circ ف)'(2)$.

● $ف(س) = س^4 - 2$ ، أوجد $(ف \circ ف)'(1)$ ؟

● $ف(س) = س^3 + 1$ ، أوجد $(ف \circ ف)''(س)$ ؟

● $ف(س) = 2س^2 + س$ ، $هـ(1) = 2$ ،

$هـ'(1) = 5$ وكان :

$(ف \circ هـ)'(1) = -35$ ، جد قيم $ف'(2)$ ؟

● $ف(س) = س^2 + 2$ ، $هـ(س) = س^3 + 1$ ،

أوجد :-

① $(ف \circ هـ)'(2)$

التجهيز : $ف'(س) = 2س$ ، $ف''(س) = 2$

$هـ'(س) = 3س^2$ ، $هـ''(س) = 6س$

* $(ف \circ هـ)'(2) = ف'(هـ(2)) \times هـ'(2)$

$= ف'(9) \times هـ'(2) = 18 \times 12 = 216$

② $(هـ \circ ف)'(2) = هـ'(ف(2)) \times ف'(2)$

$= هـ'(6) \times ف'(2) = 3 \times (6)^2 \times 2 \times 2$

$= 3 \times 36 \times 4 = 12 \times 36 = 432$

③ $(ف \circ هـ)'(2) = ف''(هـ(2)) \times هـ'(2)$

$= ف''(9) \times 12 = 2 \times 12 = 24$

④ $(ف \circ ف)'(2) = ف'(ف(2)) \times ف''(2)$

$= ف'(12) \times 12 = 2 \times 12 \times 12 = 288$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

⑤ $(ق \circ هـ)'(٢) = ق''(هـ(٢)) \times هـ'(٢)$

$= ق''(٩) \times هـ'(٢) =$ صفر $\times ١٢ =$ صفر

⑥ $(ق' \circ هـ'')'(٢) = ق''(هـ''(٣)) \times هـ''(٢)$

$= ق''(١٢) \times ٦ = ٢ \times ٦ = ١٢$

● إذا كان $هـ(س) = \frac{٤}{س+٣}$ ، $ق(س) = ٢س^٤ + ٢$ ، أوجد $(ق \circ هـ)'(١)$ ؟

- الحل: $(ق \circ هـ)'(١) = ق'(هـ(١)) \times هـ'(١)$

$= ق'(\frac{٤}{٤}) \times \frac{-١}{(٤)^٢} = ق'(١) \times \frac{-١}{٤}$

$= ٦ \times \frac{-١}{٤} = \frac{-٦}{٤}$

● $ق'(س) = \frac{٥}{\sqrt{س^٢+٧}}$ ، $هـ(س) = س^٣ + ٤س - ٢$

أوجد $(ق \circ هـ)'(١)$ ؟

- الحل:

$(ق \circ هـ)'(س) = ق'(هـ(س)^٢) \times هـ'(س)$

$= ق'(هـ(١)) \times هـ'(١) = ق'(٣) \times ٧$

$= \frac{٥}{٤} \times ٧ = \frac{٣٥}{٤}$

● إذا كان $ك(ع) = \frac{ع-١}{ع+١}$ ، $ع \neq -١$ ،

$ع(س) = \sqrt{س^٢+٣س}$ ، أوجد:

$(ك \circ ع)'(س)$ عندما $س = ١$ ؟

- الحل: $(\frac{ق}{ع})' = \frac{(ع+١) - (ع-١)}{(ع+١)^٢}$

$= \frac{ق}{(ع+١)^٢}$

$ع'(س) = \frac{٢س^٣ + ٣}{٢\sqrt{س^٢+٣س^٢}}$

عندما $س = ١$ ، $ع = \sqrt{١+٣} = ٢$

$(ك \circ ع)'(١) = ك'(ع(١)) \times ع'(١)$

$= ك'(٢) \times \frac{٣}{٢} = \frac{٢}{٩} \times \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٣}$.

● إذا كان $ق(س) = س^٣ + ١$ ، أوجد

① $(ق(١))'$ ② $ق'(١)$

③ $(ن ق ن)'(١)$ ④ $(ن ق ن)'(١)$

⑤ $(\frac{ق}{س^٢})'(١)$ و $(\frac{ق}{ن})'(١)$.

● إذا كان $هـ(س) = ٢س^٢ + ٣س$ ، أوجد

③ $هـ'(٢)$ ④ $(هـ \circ هـ)'(١)$

⑤ $(هـ(١))'$.

● أوجد مشتقة جا س بدلالة جتا س ؟

- الحل: ص = جا س ، ع = جتا س

* مشتقة ص بدلالة ع $= \frac{د ص}{د ع}$

* $\frac{د ص}{د س} =$ جتا س ، $\frac{د ع}{د س} = -$ جا س

* $\frac{د ص}{د ع} = \frac{د ص}{د س} \div \frac{د ع}{د س}$.

NOTE BOOK
منصة القطام التعليمية AL-QATAM EDUCATION

$\frac{دص}{دع} = \frac{جتاس}{-جاس} = -ظتاس$

● أوجد مشتقة $س^3 + ٤س +$ ابدلالة $س^2 + ٢س + ٣$.

- الحل: $ص = س^3 + ٤س + ١$ ، $ع = س^2 + ٢س + ٣$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^2 + ٤$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س + ٢$

$\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{٣س^2 + ٤}{٢س + ٢}$

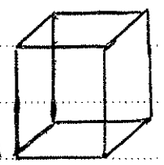
● أوجد مشتقة جاس بدلالة $س^2 + ٥س + ١$؟

- الحل: $ص = جاس$ ، $ع = س^2 + ٥س + ١$

$\frac{دص}{دس} = جتاس$ ، $\frac{دع}{دس} = ٢س + ٥$

$\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{جتاس}{٢س + ٥}$

● أوجد مشتقة حجم المكعب بالنسبة لمساحة إحدى جانباته.



حجم المكعب $= س^3$

المساحة الكلية $= ٦س^2$

المساحة الجانبية $= ٤س^2$

$ص = س^3$ ، $ع = ٤س^2$

$\frac{دص}{دس} = ٣س^2$ ، $\frac{دع}{دس} = ٨س$

$\frac{دص}{دع} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{٣س^2}{١٢س} = \frac{س}{٤}$

● ما معدل التغير في جتاس بالنسبة لجاس؟

- الحل: $ص = جتاس$ ، $ع = جاس$

$\frac{دص}{دس} = -جاس$ ، $\frac{دع}{دس} = جتاس$

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دس} \div \frac{دع}{دس} = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظتاس$

● صفيحة معدنية على شكل دائرة تتمدد بالحرارة بانتظام بحيث تبقى دائرية الشكل، أوجد معدل التغير في مساحتها بالنسبة لنصف قطرها عندما تكون نصف قطرها بساوي ٧ سم؟

- الحل: $م = \pi نق^2$ ، $\frac{دم}{دنق} = ٢\pi نق$

$\left.\frac{دم}{دنق}\right|_{نق=٧} = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ = ١٤\pi$.

● إذا علمت أن $هـ(س) = ٢س^2 + ب س + ج$ و $هـ(س) = ب س^2 + ٢س + ج$، أوجد قيم س بحيث $هـ'(س) = هـ(س)$؟

- الحل: $هـ'(س) = هـ(س)$

$٢٢س + ب = ٢ب س + ٢$

$٢٢س - ٢ب س = ٢ - ب$

$٢س(٢ - ب) = ٢ - ب$

$س = \frac{٢ - ب}{٢(٢ - ب)} \Leftarrow س = \frac{١}{٢}$.

● ألقي حجر في بركة ماء فأحدث موجات دائرية فإذا علمت أن نصف قطرها يزداد بمعدل ٢٠ سم بعد ثانية فجد معدل تغير المساحة في هذه الموجة بالنسبة لـ ن عندما ن = ٣ ثواني؟

AL-QALLAM EDUCATION التعليمية

- الحل: م(س) = π ص² = π (٢س)²
م(٥) = ٤٠٠ π ، م'(٥) = ٨٠٠ π
م'(٣) = ٨٠٠ π × ٣ = ٢٤٠٠ π

- إذا كان ل(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س، وكانت: ص = جا^٧ (ل(س))، حيث (ن عدد صحيح غير الصفر) ؟ ٤ علامات (١٩٩٧)

- الحل:
$\frac{د ص}{د س} = ٧ جا^{٦}(ل(س)) جتا(ل(س)) × ل'(س)$

- إذا كان هـ اقتراناً معرفاً على ح وكان هـ(١) = ٤ ، هـ(س) = س² - ٣ ، (هـ ○ هـ)'(١) = ٢٤ فإن قيمة هـ'(١) ؟ (١٩٩٨)

أ) ٢٤ ب) ١٢ ج) ٨ د) ٣ (هـ)

- الحل: هـ'(هـ(١)) × هـ'(١) = ٢٤ ←
هـ'(٤) × هـ'(١) = ٢٤
٨ × هـ'(١) = ٢٤ ← هـ'(١) = ٣

- إذا كان هـ(س) = س ص ، هـ(س) = س^٣ فما قيمة (هـ ○ هـ)'(٤) ؟ (١٩٩٩)

أ) ٢ ب) ٤ ج) ٣٢ د) ١٦

- إذا كانت ص = هـ(س² + ٣س)، هـ'(٣) = ٥ ، $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = ١ تساوي: (٢٠٠٠)

- إذا كان هـ(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر ، جد (هـ ○ هـ)'(١) = ؟ (١)

أ) ١ ب) ٤ ج) ١- د) ٤-

- إذا كان هـ(١) = -٣ ، هـ'(١) = ٢ ، جد (٣س هـ(س))'(١) ، ٤ علامات (١)

- الحل: = (٣س هـ'(س) + $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ هـ(س)) | عند س = ١
= هـ'(١) + $\frac{هـ(١)}{٢}$ = ٢ + $\frac{-٣}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$

- إذا كان س = جا ٢ص ، $\frac{د ص}{د س}$ = ٨ ، فجد $\frac{د س}{د ص}$ عندما ص = $\frac{\pi}{٣}$ ؟ (١)

- الحل: $\frac{د س}{د ص} = \frac{د س}{د ع} \times \frac{د ع}{د ص}$ = ٨ × جتا ٢ص
$\frac{د س}{د ص}$ | ص = $\frac{\pi}{٣}$ = ٨ جتا $(٢ \times \frac{\pi}{٣})$ = ٨ × $\frac{-١}{٢}$
= -٤

- إذا كان هـ(س) اقتراناً كثير حدود وكان هـ(١) = ٥ ، هـ'(١) = -١ ، فإن (هـ²)'(١) ؟ (١) (وزاري)

أ) ١٠- ب) ١٠ ج) صفر د) ٢-

- إذا كان هـ(س) = جا س ، هـ(س) = ٣ ص.

القسم العلمي

(١) إذا كان $ه(س) = هـ(س) \times ل(س)$

أ) $\frac{9}{2}$ ب) $\frac{9}{2}$ ج) $\frac{37}{2}$ د) 37

● إذا كان $ص = ٣م^٢ - ٢م + ١$،

(١) $م = ٢س + ٣$، فأوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = ٠$

- الحل: $\frac{د ص}{د م} = ٦م - ٢$، $\frac{د م}{د س} = ٢$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د م} \times \frac{د م}{د س} = (٦م - ٢)(٢)$

* عندما $س = ٠$، $م = ٢(١) + ٣ = ٣$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=٠} = \left.\frac{د ص}{د س}\right|_{م=٣} = ١٦ \times ٢ = ٣٢$

● إذا كان $ص = جا^٤ س$، أوجد $\frac{د ص}{د س}$،

عندما $س = \frac{\pi}{١٢}$

(١) - الحل: $\frac{د ص}{د س} = ٣ جا^٢(٤س)(جتا(٤س) \times ٤$

$\frac{د ص}{د س} = ١٢ جا^٢ ٤س$ جتا $٤س$ عندما $س = \frac{\pi}{١٢}$

$= ١٢ \times \frac{١}{٢} \times (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{٩}{٢}$.

● إذا كان $(هـ \circ ه)'(٣) = ١٥$، حيث

(١) $ه(س) = س^٢ - ٩$، $هـ'(٣) = ١٥$، فإن

$هـ(٣)$ يساوي؟

أ) صفر (ب) ١٠٥ ج) ٣ د) ٦

● إذا كان $ه(س) = \frac{ل(س)}{هـ(س)}$، $هـ(س) \neq ٠$

(١) وكان كلاً من $ل(س)$، $هـ(س)$ قابلاً

للاشتقاق عند $س = م$، $ه(م) =$ صفر

أثبت أن: $ه'(م) = \frac{ل'(م)}{هـ'(م)}$

- الحل:

$ه'(س) = \frac{ل'(س) \times هـ(س) - هـ'(س) \times ل(س)}{هـ^٢(س)}$

$ه'(م) = \frac{ل'(م) \times هـ(م) - هـ'(م) \times ل(م)}{هـ^٢(م)}$

صفر $= \frac{ل'(م) \times هـ(م) - هـ'(م) \times ل(م)}{هـ^٢(م)}$

$ل'(م) \times هـ(م) - هـ'(م) \times ل(م) =$ صفر

$* ل'(م) \times هـ(م) = هـ'(م) \times ل(م)$

$\frac{ل'(م)}{هـ'(م)} = \frac{ل(م)}{هـ(م)} = ه(م)$ #

● صفيحة معدنية مستطيلة الشكل

(٢) تتمدد بانتظام بحيث يبقى طولها

يساوي ثلاث أمثال عرضها.

أوجد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة

بالنسبة إلى طولها عندما يكون طولها ١٠ سم؟

- الحل: $م = س \times ص$، $س = ٣ ص$

$م = \frac{١}{٣} س^٢ \leftarrow \frac{د م}{د س} = \frac{٢}{٣} س$

$\left.\frac{د م}{د س}\right|_{س=١٠} = \frac{٢}{٣} \times ١٠ = ١٠$ سم.

● إذا كان $ه(س) = س^٣ + ٢س$،

(٣) $هـ(س) = س^٢$، فإن:

$(هـ \circ ه)'(١)$ تساوي؟

أ) ١٢ (ب) ٦ ج) ١٠ د) ١٦

NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● إذا كان $هـ(س) = \frac{1}{3+2س}$ ،

$س \neq \frac{-3}{2}$ ، $هـ'(1) = ؟$ أوجد $ق$ ؟

(1 : 1)

$\therefore$ الحل : $هـ'(س) = \frac{-2}{(3+2س)^2}$

$هـ'(1) = \frac{-2}{(3+2)^2} = \frac{-2}{25}$

$\frac{-2}{25} = \frac{-2}{(3+2ق)^2} \leftarrow -2ق = -2(3+2ق)^2$

$-2(9+12ق+4ق^2) = -2ق$

$\leftarrow 18 + 24ق + 8ق^2 = -2ق$

$2ق^2 + 13ق + 18 = 0$

$(ق+2)(2ق+9) = 0$

$ق = -2$ ، $ق \neq \frac{-9}{2}$

● إذا كان $هـ(س) = \frac{5}{هـ(س)}$ وكانت

$هـ(3) = 4$ ، $هـ'(3) = 1$ ، فما قيمة

$هـ'(3)$ ؟

(1 : 1)

(ق) $\frac{-4}{5}$ ب) $\frac{-3}{5}$ ج) $\frac{3}{5}$ د) $\frac{4}{5}$

● $هـ(س) = س^3 - 2$ ، فما قيمة

$(هـ \circ هـ)'(1)$ ؟

(1 : 1)

(ق) -18 ب) -9 ج) 9 د) 18

● إذا كان $هـ(س) \times هـ(ص) = 1$ و

كان $هـ(1) = -3$ ، $هـ'(1) = 5$ ،

فما قيمة $هـ'(1)$ ؟

(1 : 1)

ق) $\frac{4}{9}$ ب) $\frac{-5}{9}$ ج) $\frac{5}{9}$ د) $\frac{-5}{3}$

● إذا كان $ل = \frac{4س}{2س+1}$ ، $ص = ل^2$ ،

(1 : 1)

أجد $\frac{د ص}{د س}$

$\therefore$ الحل : $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ل}{د س} \times \frac{د ص}{د ل}$

$= \frac{4(2س+1) - 2(4س)}{(2س+1)^2} \times 2ل$

$= \frac{8س + 4 - 8س}{(2س+1)^2} \times 2ل$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{8س}{(2س+1)^2} \times \frac{4}{(2س+1)^2} = \frac{32س}{(2س+1)^3}$

● $هـ(س) = جا^2 2س$ ، فإن

$هـ'(\frac{\pi}{12})$ يساوي :

(1 : 1)

ق) 3 ب) صفر ج) $\sqrt{3}$ د) 1

● $هـ(س) = س^2 - 2س$ ، وكانت

$هـ(2) = 6$ ، $(هـ \circ هـ)'(2) = 8$

(1 : 1)

فما قيمة $هـ'(2)$:

ق) 4 صفر ب) 8 ج) 12 د) 5

● $ص = (ع^2 - 4ع + 1)^{\frac{3}{2}}$ ، وكانت

$ع = س^3 + 1$ ، فجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ع = 9$ ؟

منصة التعليمية AL-DARLAM EDUCATION

مثال ٣:
- أكمل: $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢}{٣}(ع^{\frac{٣}{٢}} - ١٠ع + ١)$
$(٢ع - ١٠)$
$د ع = ٣ س^{٢}$
$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢(٢ع - ١٠)}{\frac{١}{٢}(٣(ع^{٢} - ١٠ع + ١)} \times (٣ س^{٢})$
* عندما ع = ٩ ← ٩ = $س^{٣} + ١$ ← س = ٢
$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢(١٨ - ١٠)}{\frac{١}{٢}(١٦٩ - ٨١)٣} \times ١٢$
$\frac{د ص}{د س} = \frac{٦}{٢} \times ١٢ = ٣٦$.

مثال ٤:
● إذا كان هـ(س) = $س^{٣}$، هـ(٢) = ٣،
هـ'(٢) = -٢، هـ''(٢) = ٥، فاجد
قيمة (هـ ٥ هـ)''(٢) ؟
- أكمل: هـ(س) = $٣س^{٢}$، هـ''(س) = ٦س
(هـ ٥ هـ)'(س) = هـ'(هـ(س)) × هـ'(س)
(هـ ٥ هـ)''(س) = هـ''(هـ(س)) × هـ'(س)
^{٢}(هـ'(س)) × هـ''(هـ(س)) +
= هـ''(هـ(س)) × هـ''(س) + هـ'(س)
× هـ'''(هـ(س)) × هـ'(س).
الآن نعوض مكان س = ٢.
= هـ''(هـ(٢)) × هـ''(٢) + هـ'(٢)
× هـ'''(هـ(٢)) × هـ'(٢)
= هـ''(٣) × ٥ × -٢ + هـ''(٣) × -٢
= (٤٧) × ٥ + ١٨ × ٤ = ٢٠٧.

★ الاشتقاق الضمني ★

* يجب التمييز بين الصريح و الضمني، حيث الصريح يكون ص لوحدها ولا يوجد غيرها أمّا في الضمني يكون هناك تداخل بين قيم س مع ص (ص ليست لوحدها).

● صنف كلا من العلاقات التالية إلى صريحة وضمنية:
① ص = $س^{٢} + ٥س + ١$ (صريحة).
② ص = $س ص^{٢} + ٥ س ص$ (ضمنية).
③ $ص^{٢} = ١٠ س^{٢} + س^{٢} ص$ (ضمنية).
④ ص = $س^{٣} + ٥س + ١$ (صريحة)
⑤ $ص^{١} س = ٥ س ص$ (ضمنية)
⑥ $س^{٢} = \sqrt{ص} + ٥ص$ (ضمنية)

* تذكير مفيد:
في أسئلة الاشتقاقة الضمني، ليشتق كل حد لوحده مع التذكير أن المشتقة:
ص هي $\frac{د ص}{د س}$ ومشتقة $ص^{٢} = ٢ص \frac{د ص}{د س}$
ومشتقة $ص^{١}$ هي $\frac{د ص}{د س}$، $\frac{٩ د ص}{د س}$،
يستخدم الاشتقاقة الضمني إذا كانت العبارة المعطاة ضمنية.

سعد الدين التميمي
subject: ٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦ ★ ٠٧٩٥٤٤٠٥٤٤ Date:

العلاقة	المشتقة
ص	$\frac{د ص}{د س}$
$(س^3 + ص)$	$3س^2 + \frac{د ص}{د س}$
$(س^2 + 5س)^{10}$	$10(س^2+5س)^9 \times (2س+5)$
$(س + ص)^{10}$	$10(س+ص)^9 \times (1 + \frac{د ص}{د س})$
$(س + 2ص)^{30}$	$30(س+2ص)^{29}(1 + 2\frac{د ص}{د س})$
جا ص	جتا ص $(\frac{د ص}{د س})$
جا$(س + ص)$	جتا$(س+ص)(1 + \frac{د ص}{د س})$
$ص^2$	$2ص \frac{د ص}{د س}$
$س^3 ص^5$	$س^3 \times 5ص^4 \frac{د ص}{د س} + 3س^2 ص^5$
$\frac{7س^2}{ص}$	$\frac{14 س ص - 7س^2 \frac{د ص}{د س}}{ص^2}$

● إذا كان $س^2 + ص^2 = 25$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(3، 4)$؟
- الحل: * نشتق ضمنياً *
$2س + 2ص \frac{د ص}{د س} = صفر \leftarrow$
$2 \times 3 + 2 \times 4 \frac{د ص}{د س} = 0$
$6 + 8 \frac{د ص}{د س} = 0 \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{-6}{8}$

● إذا كان $س + ص^2 + 5س ص = 7س$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $(1، 2)$؟
- الحل: $1 + 2ص \frac{د ص}{د س} + 5س \frac{د ص}{د س} + 5ص = 7$
$1 + 2 \frac{د ص}{د س} + 5 + 5 \frac{د ص}{د س} = 7$
$7 \frac{د ص}{د س} = 1 \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{1}{7}$

● إذا كان $س^2 + ص^3 + 2س ص = 7ص$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$؟
- الحل: $2س + 3ص^2 \frac{د ص}{د س} + 2س \frac{د ص}{د س} + 2ص = 7 \frac{د ص}{د س}$
$3ص^2 \frac{د ص}{د س} + 2س \frac{د ص}{د س} - 7 \frac{د ص}{د س} = -2ص - 2س$
$\frac{د ص}{د س}(3ص^2 + 2س - 7) = -2ص - 2س$
$\frac{د ص}{د س} = \frac{-2ص - 2س}{3ص^2 + 2س - 7}$

● إذا كان $س^2 ص + 5ص = 12س$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $س = 1$؟
$\frac{د ص}{د س} = \frac{4}{3}$

● إذا كان $س ص (س + ص) = 16$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(2، 2)$.

● إذا كان $س ص^2 + 5س^2 ص = 7س ص$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ص = 1$؟

● إذا كان $س^4 + س^3 + 3ص^5 + 4ص^7 = 10س$،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$؟
- الحل: $4س^3 + 3س^2 + 15ص^4 \frac{د ص}{د س} + 28ص^6 \frac{د ص}{د س} = 10$
$15ص^4 \frac{د ص}{د س} + 28ص^6 \frac{د ص}{د س} = -10 - 2س - 3س^2$
$\frac{د ص}{د س}(15ص^4 + 28ص^6) = -10 - 2س - 3س^2$
$\frac{د ص}{د س} = \frac{-10 - 2س - 3س^2}{15ص^4 + 28ص^6}$

● [٣،١] $\frac{1}{ص} + \frac{ص}{س} = 3$، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ص = 1$؟

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

العلاقة	المشتقة
$م(س)$	$م'(س)$
$م(٢س)$	$م'(٢س) \times ٢$
$م(-٤س)$	$م'(-٤س) \times -٤$
$م(س^٣)$	$م'(س^٣) \times ٣س^٢$
$م(ص)$	$م'(ص) \times \frac{د ص}{د س}$
$م(٥ص)$	$م'(٥ص) \times ٥ \frac{د ص}{د س}$
$م(جا س)$	$م'(جا س) \times جتا س$
$م(جتا س)$	$م'(جتا س) \times -جا س$
$م(١-٣ص)$	$م'(١-٣ص) \times -٣ \frac{د ص}{د س}$
$(م(ص))^٣$	$٣(م(ص))^٢ \times م'(ص) \times \frac{د ص}{د س}$

● إذا كان $م(ص) = س^٣ + ٤س + ١$، وعلمت أن $م'(٤) = ٧$، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $(٤،٣)$.

- الحل: $م'(ص) \frac{د ص}{د س} = ٣س^٢ + ٤$

$م'(٤) \frac{د ص}{د س} = ٣(٣)^٢ + ٤$

$٧ \frac{د ص}{د س} = ٣١ \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٣١}{٧}$

● إذا كان $(م(ص))^٢ = ٥س^٢ + ١$، و علمت أن $م(٣) = ٢$، $م'(٣) = ٤$، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(٢،٣)$.

- الحل: $٢م(ص) \times م'(ص) \times \frac{د ص}{د س} = ١٠س$

$٢م(٣) \times م'(٣) \times \frac{د ص}{د س} = ٢٠$

$١٦ \frac{د ص}{د س} = ٢٠ \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٢٠}{١٦}$

● إذا كان $م(٤ص) = ٧س + ٥$، جد $\frac{د ص}{د س}$ عندما $ص = ١$ علماً بأن $م'(٤) = ٣$؟

- الحل: $م'(٤ص) \times ٤ \frac{د ص}{د س} = ٧$

$م'(٤) \times ٤ \frac{د ص}{د س} = ٧ \leftarrow ٣ \times ٤ \frac{د ص}{د س} = ٧$

$١٢ \frac{د ص}{د س} = ٧ \leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{٧}{١٢}$

● إذا كان $ص^٢ = س \, م(س^٢)$ وكان $م(١) = ٤$، $م'(١) = ١$، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عند $س = ١$؟

- الحل: $* \, ٢ص \frac{د ص}{د س} = س \, م'(س^٢) \times ٢س + م(س^٢)$.

* الآن نجد قيمة $ص$ عندما $س = ١$

$ص^٢ = ١ (م(١)) = ٤ \leftarrow ص = \pm ٢$

* النقطة الأولى $(١،٢)$

$\frac{٤ د ص}{د س} = ١ م'(١) \times ٢ + م(١)$

$\frac{٤ د ص}{د س} = ٢ + ٤ \leftarrow \frac{٤ د ص}{د س} = ٦$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٦}{٤}$

* الآن النقطة الثانية $(١،-٢)$

$-\frac{٤ د ص}{د س} = ٦ \leftarrow \frac{د ص}{د س} = -\frac{٦}{٤}$.

● $ص^٢ = جا(جا(س))$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$؟

- الحل: $٢ص = جتا(جا(ص)) \times$

$جتا ص \times \frac{د ص}{د س}$.

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ص}{جتا(جا(ص)) \times جتا ص}$

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: تطبيقات الرياضيات Math sdad Date: Dl-Dein Al-Buraiji

● س = م(ص) = ٢ص^{٣} + ٢،
م'(٢) = ٢ فإن قيمة $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة (٢، ١) هي ؟
م(ص) = ٢ص^{٣} + $\frac{٢}{ص}$
م'(ص) × ٢ $\frac{د ص}{د س}$ = ٤ص^{٣} − $\frac{٢}{ص^{٢}}$
* نعوض النقطة *
م'(٢) × ٢ $\frac{د ص}{د س}$ = ٨ − $\frac{١}{٢}$
٤ $\frac{د ص}{د س}$ = ٧,٥ ← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٧,٥}{٤}$

● إذا كان ص = (ص − ١)(ص + ١)
(ص^{٢} + ١)، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما ص = صفر

● إذا كان س = (ص^{٤} − ١)(ص^{٤} + ١)
(ص^{٤} + ١)، أوجد $\frac{د ص}{د س}$ عندما س = صفر

● إذا كان س = ظا ص فإن $\frac{د ص}{د س}$
عندما س = ١ :
أ) $\frac{١}{٢}$ ب) $-\frac{١}{٢}$ ج) $\frac{١}{٣}$ د) $\frac{١}{٤}$

● م(ص) = ص جا ص + جتا ص،
ص ∈ [٠، π] فإن أصغر
م'(ص) هي :
أ) صفر ب) $\frac{\pi}{٢}$ ج) $-\frac{\pi}{٢}$ د) π

● إذا كان جا(س ص) = س^{٣} + جا ص،
أوجد $\frac{د ص}{د س}$ ؟

★ المشتقة الضمنية (الثانية) ★

العلاقة	المشتقة
$\frac{د ص}{د س}$	$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$
$(\frac{د ص}{د س})^{١٠}$	١٠ $(\frac{د ص}{د س})^{٩}$ × $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$
$(ص^{٣} + \frac{د ص}{د س})^{٣}$	٣ $(س^{٣} + \frac{د ص}{د س})^{٢}$ × ٣س^{٢} × $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$
س^{٢} $\frac{د ص}{د س}$	س^{٢} $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ + ٢س $\frac{د ص}{د س}$
ص × $\frac{د ص}{د س}$	(ص × $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$) + ($\frac{د ص}{د س}$ × $\frac{د ص}{د س}$)

● إذا كان $\frac{د ص}{د س}$ = س^{٣} + ص^{٢}، أوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند النقطة (٢، ١) ؟
- الحل: $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٣س^{٢} + ٥ص^{٤} $\frac{د ص}{د س}$
س = ٢ ← ص = ١ ← $\frac{د ص}{د س}$ = ٩
$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = ٣(٢)^{٢} + ٥(١)^{٤} × ٩
= ١٢ + ٤٥ = ٥٧

● إذا كان س^{٢} + ص^{٣} = ٥س − ٣،
أوجد $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ عند النقطة (١، ١).
- الحل: ٢س + ٣ص^{٢} $\frac{د ص}{د س}$ = ٥
٣ص^{٢} $\frac{د ص}{د س}$ = ٥ − ٢س ← $\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{٥ - ٢س}{٣ص^{٢}}$
س = ١ ← ص = ١ ← $\frac{د ص}{د س}$ = ١

$* \frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{(3ص^2)(-2) - (-5-2س)(\frac{د ص}{د س})}{(3ص^2)^2}$

$* \frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{(-3 \times -2) - (-5-2)(\frac{-18}{6})}{3^2}$

$= \frac{-6-18}{9} = \frac{-24}{9}$

● إذا كان $س^2 + ص^2 = 25$، أوجد:
$\frac{د^2ص}{د س^2}$ عند النقطة $(3، 4)$

- الحل: $2س + 2ص \frac{د ص}{د س} =$ صفر

$2ص \frac{د ص}{د س} = -2س \leftarrow$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-س}{ص}$

$س = 3 \quad ص = 4 \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{-3}{4}$

$* \frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{ص \times -1 - -س \times \frac{د ص}{د س}}{ص^2}$

$* \frac{د^2ص}{د س^2} = \frac{-4 + 3 \times \frac{-3}{4}}{16}$

(1997) ● إذا كان $جا(س ص) = ص$، فجد
$\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{2}، 1)$.

- الحل: $جتا(س ص)(ص + س \frac{د ص}{د س})$
$= \frac{د ص}{د س}$

$جتا(س ص) \times ص$

$+ س جتا(س ص) \frac{د ص}{د س} - \frac{د ص}{د س} = 0$

$\frac{د ص}{د س}(س ص جتا(س ص) - 1) =$

$- ص جتا(س ص)$

$\frac{د ص}{د س}(\frac{\pi}{2} جتا(\frac{\pi}{2}) - 1) = -1 \times جتا(\frac{\pi}{2})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-صفر}{-1} =$ صفر.

● إذا كان $س^3 + ص^3 = 3س ص$ فجد
(1997) $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(3، 3)$؟

- الحل: $3ص^2 \frac{د ص}{د س} = 3س \frac{د ص}{د س} + 3ص$

$3ص^2 \frac{د ص}{د س} - 3س \frac{د ص}{د س} = 3ص - 3$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{3ص - 3}{3ص^2 - 3س} \leftarrow \left|\frac{د ص}{د س}\right|_{(3،3)} = \frac{1}{3}$

● إذا كان $س^2 + س ص = ص^2 + 1$،
(1999) جد $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(2، 3)$؟

- الحل: $2س + س \frac{د ص}{د س} + ص$

$= 2ص \frac{د ص}{د س}$

$س \frac{د ص}{د س} - 2ص \frac{د ص}{د س} = -ص - 2س$

$\frac{د ص}{د س}(س - 2ص) = -ص - 2س$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-ص - 2س}{س - 2ص} = \frac{-3-4}{2-6}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$.

● إذا كانت $س ص^2 - ص س^2 = 2$ فجد
(1998) $\frac{د ص}{د س}$ عند النقطة $(1، 2)$؟

- الحل: $2س ص \frac{د ص}{د س} + ص^2 -$

$(س^2 \frac{د ص}{د س} + 2س ص) = 0$

$2س ص \frac{د ص}{د س} + ص^2 - س^2 \frac{د ص}{د س}$

$- 2س ص = 0$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: Date:

$\frac{d}{dس}(٢س ص - س^٤) = ٢س ص - ص^٢$

$\frac{dص}{dس} = \frac{٢س ص - ص^٢}{٢س ص - س^٢} = \frac{٤-٤}{٤-١}$

$= \frac{٠}{٣} =$ صفر.

● إذا كان هـ(ص)^٢ = س، وكان

(١) هـ(١) = ٣، فإن $\frac{dص}{dس}$ عندما س = ١ تساوي؟

ب) ٦ ج) $\frac{١}{٦}$ د) $-\frac{١}{٦}$ أ) -٦

● إذا كان س = هـ(ص^٢ + ١)،

(١) هـ(٥) = ٤، جد $\frac{dص}{dس}$ عندما ص = ٢؟

- الحل: ١ = هـ(ص^٢ + ١) × ٢ص $\frac{dص}{dس}$

$\leftarrow$ ١ = هـ(٥) × ٤ $\frac{dص}{dس}$

$١ = ١٦ \frac{dص}{dس} \leftarrow \frac{dص}{dس} = \frac{١}{١٦}$

● جد $\frac{dص}{dس}$ لما يلي:

(١) س ص = ١، عند س = ٢

(٢) ٢ص = هـ(٢س^٢ − س)،

هـ(٦) = ٤، عند س = ٢.

(٣) س + ظا(س ص) = صفر.

- الحل: (١) س ص = ١ $\leftarrow$ س ص = ١

* لنشتقه *

ص + س $\frac{dص}{dس}$ = ٠، عندما س = ٢،

ص = $\frac{١}{٢}$.

$\frac{dص}{dس} = \frac{-ص}{س} = \frac{-\frac{١}{٢}}{٢} = -\frac{١}{٤}$

---

(٢) ٢ $\frac{dص}{dس}$ = هـ(٢س^٤ − س) ×

(٤س − ١).

٢ $\frac{dص}{dس}$ = هـ(٦) × ٧ $\leftarrow \frac{dص}{dس} = \frac{١٤}{٢} = ٧$

---

(٣) ١ + قا^٢(س ص)(س $\frac{dص}{dس}$ + ص)

= صفر.

١ + س قا^٢(س ص) $\frac{dص}{dس}$ +

ص قا^٢(س ص) = صفر

س قا^٢(س ص) $\frac{dص}{dس}$ = −١ − ص قا^٢(س ص)

$\frac{dص}{dس} = \frac{-١ - ص قا^٢(س ص)}{س قا^٢(س ص)}$

● جد قيمة $\frac{d^٢ص}{dس^٢}$ للعلاقة:

$س^٣ + ص^٣ - ٤ س ص = ٦٤$

(١) عند النقطة (٤، ٠).

- الحل: $٣س^٢ + ٣ص^٢ \frac{dص}{dس} - ٤ ص - ٤ س \frac{dص}{dس} =$ صفر.

$٣ص^٢ \frac{dص}{dس} - ٤ س \frac{dص}{dس} = ٤ ص - ٣س^٢$

$\frac{dص}{dس}(٣ص^٢ - ٤س) = ٤ص - ٣س^٢$

$\frac{dص}{dس} = \frac{٤ص - ٣س^٢}{٣ص^٢ - ٤س}$

س = ٤ ← ص = ٠ ← $\frac{dص}{dس} = ٣$

subject: Date:

* $\frac{د^2 ص}{د س^2} = \frac{(٣ص^2 - ٤س)(٤\frac{د ص}{د س} - ٦س) - (٢ص\frac{د ص}{د س} - ٤)(٤ص - ٣س^2)}{(٣ص^2 - ٤س)^2}$

$= \frac{(-١٦)(-١٢) - (-٤)(-٤٨)}{١٦ \times ١٦} = صفر$

● $هـ(ص+١) = س^3$ ، $هـ(٥) = ٤$ ،

$هـ(٥) = ٨$ ، فإن $\frac{د ص}{د س}$ عندما ص = ٤ .

أ) ٤ ب) ٣ ج) ١٢ د) ٤٨

سعد الدين السبتجي ٠٥٤٠٧٩٥٤٠٨٢ ٠٧٨٦٩٨٤٨٠٢

الفرع العلمي

شرح مفصل للمادة

حل أسئلة الكتاب

محاضرات اضافية

أسئلة سنوات سابقة

القمة في الرياضيات

١٣٦

NOTE BOOK

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

الوحدة الثالثة

subject: Date:

* التطبيقات الهندسية *

حل أسئلة المسألة الهندسية بحاجة إلى الميل والمماس والعمودي على المماس ؛ حيث يتم إيجاد ميل خط مستقيم (المماس) بعدة طرق هي :

① إذا علم نقطتين عليه طريقه :

$$م = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

② إذا علمت معادلة المستقيم :

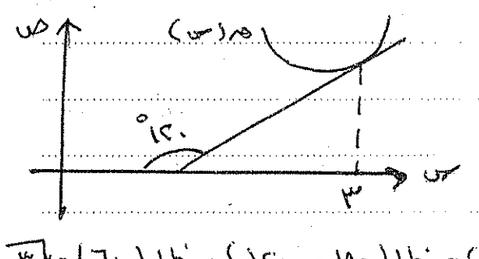
ص = م س + ب ، فإن ميل المماس م وهي معامل س أو المشتقة.

③ إذا علمت الزاوية فإن الميل = ظا الزاوية .

* هـ (س) = الميل = ظا الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات الموجب .

* هـ (٣) = ظا ٤٥ = ١

● اعتمادًا على الشكل التالي، أوجد هـ(٣)؟



هـ(٣) = ظا(١٨٠ - ١٢٠) = ظا(٦٠) = $\sqrt{٣}$

● قاعدة : هـ(م) = ميل المماس للمنحنى هـ (س) عند س = م .

★★ نجد معادلة المماس حسب القاعدة ص - ص١ = م (س - س١) ؛ حيث م، س١، ص١ تتبع إلى الأساسيات الثلاثة هـ (س١، ص١، م) :

① إيجاد ميل المماس عند الرسم :

● اعتمادًا على الشكل التالي أوجد هـ(٣) ؟

● إذا كان هـ (س) = $س^2 + ١$، أوجد ميل المماس عند س = ٣ ؟

- الحل : هـ (س) = ٢ س ← هـ (٣) = ٦

م = ٦ ، ∴ ميل المماس = ٦ .

● إذا كان هـ (س) = جا س ، أوجد ميل المماس عند س = π ؟

- هـ (س) = جتا س ← هـ (π) = جتا π

= - ١ ، ∴ ميل المماس = - ١ .

منصة الأكاديمية AL-QALAM EDUCATION

NOTEBOOK

● إذا كان $س^3 + ص^3 = ١٢٥$ أوجد ميل المماس عند النقطة $(٣، ٤)$ ؟

- الحل : * نشتق ضمنياً *

$٣س^٢ + ٣ص^٢ \frac{دص}{دس}$ = صفر ، عوض $(٣، ٤)$

$(٣ \times ٩) + (٤ \times ٣)\frac{دص}{دس}$ = صفر

$٢٧ + ٤٨\frac{دص}{دس}$ = صفر ← $٤٨\frac{دص}{دس} = -٢٧$

$م = \frac{دص}{دس} = \frac{-٢٧}{٤٨}$

● إذا كان $هـ(س) = س^٣ + ٤س$ ،
أوجد ميل المماس عند $س = ٤$.

● أوجد ميل المماس لمنحنى $هـ(س) = \frac{س^٢ + ١}{٥س + ٣}$ عندما $س = ١$ ؟

- الحل :

$هـ'(س) = \frac{(٥س+٣)(٢س) - (س^٢+١)(٥)}{(٥س+٣)^٢}$

$هـ'(١) = \frac{(٨ \times ٢) - (٥ \times ٢)}{(٨)^٢} = \frac{٦}{٦٤}$

ميل المماس	ميل العمودي
٥	$-\frac{١}{٥}$
$\frac{٧}{٢}$	$-\frac{٢}{٧}$
$\frac{٩}{٤٥}$	$-\frac{٤٥}{٩}$
$-\frac{١}{٢}$	٢
$-\frac{٧}{٩}$	$\frac{٧}{٩}$
١-	١

● أوجد ميل العمودي على المماس لمنحنى $هـ(س) = س^٣ + ٣س$ عندما $س = ١$

- الحل : $هـ'(س) = ٣س^٢ + ٣$

$هـ'(١) = ٣ + ٣ = ٦$ (ميل المماس)

* ميل العمودي $= -\frac{١}{٦}$.

★ الميل العمودي على المماس ★

* إذا كان ميل المماس $= م$ فإن
ميل العمودي $= -\frac{١}{م}$.

* ميل المماس × ميل العمودي $= -١$

● لمنحنى $هـ(س) = جتا س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ ،
$هـ'(س) = -جا س$.

$هـ'(\frac{\pi}{٢}) = -جا(\frac{\pi}{٢}) = -١$ (ميل المماس)

* ميل العمودي على المماس $= ١$.

● ماميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $ه ص + \frac{س}{ص} = ٥$ عند : (نقطة $(١، ٠)$ ؟

● $هـ(س) = س^٢ + ١$ ، $ه(س) = \frac{٨}{س + ١}$ ،
أوجد ميل المماس لمنحنى $(هـ ٥ ه)(س)$
عندما $س = ٣$ ؟

منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

٠٧٩٥٤٤٠٥٤٤
٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦
سعد الدين البستنجي

subject: Date:

● ص = ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ ، أوجد ميل المماس لمنحنى ص عند س = ١ ؟

الحل : * ميل أحد المماسين = $\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥

* ميل المماس الآخر = ٠,٨٥

● إذا كان المستقيم ٥ ص = ٤ س + ١ ، أوجد ميل المماس لمنحنى هـ(س) عند س = ٣ ، وأوجد ميل العمودي على المماس لمنحنى هـ(س) ؟

إيجاد معادلة المماس والعمودي على المماس

① الحالة المباشرة :

إيجاد معادلة المماس والعمودي على المماس إذا عرفت النقطة والميل .

● الشكل المجاور يمثل منحنى هـ(س) .

أوجد هـَ(١) ؟

● إذا كان س$_{١}$ = ٥ ، ص$_{١}$ = ١٠ ، م = ٢ ،

أوجد معادلة المماس ؟

الحل : معادلة المماس : ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$)

ص - ١٠ = ٢ (س - ٥) ← ص - ١٠ = ٢س - ١٠

ص = ٢س - ١٠ + ١٠ ← ص = ٢س

● إذا كان هـَ(س) = س^{٢} - $\frac{٦}{س}$ ، أوجد معادلة المماس عند س = ١ ؟

الحل : الأساسيات الثلاثة

س$_{١}$ = ١ ، ص$_{١}$ = ١ - ٦ = -٥ ، م = هـَ(١)

هـَ(س) = ٢س + $\frac{٦}{س^{٢}}$

هـَ(١) = ٢ + ٦ = ٨

معادلة المماس :

ص + ٥ = ٨ (س - ١)

ص = ٨ س - ١٣ .

● إذا كان ص = ع^{٣} + ع^{٢} + ع + ١ ، أوجد ميل المماس لمنحنى ص عند س = ١ ؟

الحل : * ميل أحد المماسين = $\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥

* ميل المماس الآخر = ٠,٨٥

● إذا كان العمودي على المماس يصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٣}$ مع محور السينات الموجب عند النقطة (٢ ، ٥) فإن هـَ(٢) = ؟

أ) ٣٦ ب) -٣٦ ج) $\frac{١}{٣٦}$ د) $\frac{-١}{٣٦}$

● أوجد ميل المماس لمنحنى :

س^{٢} + ٣ س ص + ٥ ص^{٢} = ٣ عند النقطة س = ٢ الواقعة عليه ؟

● إذا كان ص^{٢} - س ص = س^{٣} - ١ ،

NOTE BOOK
منصة السلام التعليمية AL SALAM EDUCATION

أوجد معادلة المماس عند النقطة (٢، ٣)؟

$س_١ = ٢$ ، $ص_١ = ٣$ ، $م = ؟؟$

$* \ ٢ص \frac{د ص}{د س} - س \frac{د ص}{د س} - ص = ٢س$

$\frac{د ص}{د س}\Big|_{(٢،٢)} = \frac{٢س + ص}{٢ص - س} = \frac{٧}{٤}$

$* \ ص - ٣ = \frac{٧}{٤}(س - ٢)$

$ص = \frac{٧}{٤}س - \frac{١}{٢}$.

● إذا علمت أن $ه(س) = \sqrt[٣]{س^٢}$ ، أوجد معادلة المماس عند $س = ٢٧$ ؟

- الجواب : $ص - ٩ = \frac{٢}{٩}(س - ٢٧)$.

● اكتب معادلة المماس لمنحنى الاقتران $ه(س) = \frac{س + ١}{س^٢}$ ، $س \neq ٠$ ، عند النقطة $(١، ٢)$ ؟

- الحل : $ه'(س) = \frac{س^٢ - (س+١)(٢س)}{س^٤}$

$م = ه'(١) = \frac{١ - ٢ \times ٢}{١} = -٣$.

* ميل المماس $= -٣$

معادلة المماس : $ص - ص_١ = م(س - س_١)$

$ص - ٢ = -٣(س - ١)$ ←

$ص = -٣س + ٥$.

● أوجد قيم $س$ التي يكون عندها ميل المماس $= ٤$ للاقتران $ه(س) = س^٢ + ٢س$.

● إذا كان المماس لمنحنى الاقتران $ه(س) = ٢س^٢ - ٥$ عند $س = ١$ يساوي ٤ فما قيمة P ؟

أ) ٢ ب) -٢ ج) -١ د) -٣

● إذا علمت أن $ه(س) = س^٤ + ٣س$ هي (المشتقة الأولى للاقتران $ه(س)$) فإن ميل المماس لمنحنى $ه(س)$ عندما $س = ١$ ؟

أ) ٤ ب) ٢ ج) ٥ د) ١

● أثبت أن النقطة $(-١، ٣)$ تقع على المنحنى $س^٢ + ص^٢ - ٤س + ٢ص = ٢٠$ ثم أوجد معادلة المماس عندها؟

- الحل : النقطة $(-١، ٣)$ تقع على المنحنى إذا حققت معادلته فبالتعويض عند $س = -١$ ، $ص = ٣$ في معادلة المنحنى نجد أن :

الطرف الأيمن $= ١ + ٩ + ٤ + ٦ = ٢٠$

$=$ الطرف الأيسر.

$* \ ٢س + ٢ص \frac{د ص}{د س} - ٤ + ٢ \frac{د ص}{د س} = ٠$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{٤ - ٢س}{٢ص + ٢}$ ← $م = \frac{٣}{٤}$

* معادلة المماس :

$ص - ٣ = \frac{٣}{٤}(س + ١)$.

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

NOTE BOOK

subject: القمة في الرياضيات Date:

③ الحل غير مباشر.

إذا لم تعطَ قيم س ، وأعطيت معلومات عن المماس :

● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = س^3 - 6س + 3$ عندما يكون ميل المماس يساوي ١٠ ؟

- الحل : $س_1 = ؟؟$ ، $ص_1 = ؟؟$ ، $م = 10$

$م = هـ'(س) = 3س^2 - 6 = 10 \leftarrow$

$3س^2 = 16 \leftarrow س = \pm 8$

$س_1 = 8$ ، $ص_1 = هـ(8) = 18$ ، $م = 10$

$ص - 18 = 10(س - 8)$

● جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = س^3 + 3س$ عندما يكون ميل المماس يساوي ٦.

● أوجد معادلة المماس لمنحنى
$س ص = 16$ إذا علمت أن ميله يساوي -1 ؟

- الحل : $ص = \frac{16}{س}$ ، $\frac{د ص}{د س} = \frac{-16}{س^2}$

$-1 = \frac{-16}{س^2} \leftarrow س^2 = 16 \leftarrow س = \pm 4$

$س = -4$ ، $ص = -4$ — $م = -1$ — $س = 4$ ، $ص = 4$

$ص + 4 = -1(س + 4)$ — $ص - 1 = -1(س - 4)$

● جد معادلة المماس لمنحنى $هـ(س) = س^3 - 6س^2 + 3$ عندما يكون ميل المماس يساوي ١٠ ؟

- الحل : $س_1 = ؟؟$ ، $ص_1 = ؟؟$ ، $م = 10$

$م = هـ'(س) = 3س^2 - 12س = 10 \leftarrow$

$3س^2 - 12س - 10 = 0$

$س = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 120}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{264}}{6}$

$س = \frac{12 \pm 2\sqrt{66}}{6} = 2 \pm \frac{\sqrt{66}}{3}$

● جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $هـ(س) = س^2 + 7س + 1$ عند النقطة التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها ٤٥° مع خط السينات الموجب.

● أوجد معادلة المماس الأفقي لمنحنى $هـ(س) = س^2 - 6س$ ؟

$س_1 = ؟؟$ ، $ص_1 = ؟؟$ ، $م =$ صفر أفقي ،

$هـ'(س) = 2س - 6 = 0 \leftarrow س = 3$

$* هـ(3) = 9 - 18 = -9$

$س_1 = 3$ ، $ص_1 = -9$ ، $م = 0$

$ص - ص_1 = م(س - س_1)$

$ص + 9 = صفر(س - 3) \leftarrow ص = -9$

★ قوانين هامة ومفيدة ★

① إذا كان $هـ(س) // هـ(س)$ فإن :

$هـ'(س) = هـ'(س)$.

* إذا كان $هـ(س)$ يوازي السينات فإن $هـ'(س) =$ صفر.

○ * $هـ$ يوازي $هـ \leftarrow هـ' = هـ' \leftarrow م_1 = م_2$

* $هـ$ يعامد $هـ \leftarrow م_1 \times م_2 = -1$

$\leftarrow هـ' \times هـ' = -1$

* تقاطع اقترانين إذا كان $هـ = هـ$ قاعدة الأول = قاعدة الثاني.

NOTE BOOK
منصة العلم AL-'ALAM EDUCATION

③ هـ عكس ⟵ هـ = هـ

↳ هـَ = هـَ

● أوجد النقطة على منحنى هـ(س) = س² + ٥ ، حيث أن المماس عندها عمودي على ص = ٧/٤ س + ١ .

- الحل : هـَ(س) = ٢س ، حَ = ٧/٤ .

* لكن المنحنيان متعامدان أي أن:

٢س × ٧/٤ = -١ ← ٧س/٢ = -١ .

س = -٢/٧ .

النقطة (-٢/٧ ، هـ(-٢/٧)) =

(-٢/٧ ، ٢٤٩/٤٩) .

● أوجد معادلة المماس لمنحنى ص² = ٤س، عندما يكون ميل العمودي عليه يساوي -١/٤ ؟

- الحل : ميل العمودي = -١/٤ ،

ميل المماس = ٤

* ٢ص دص/دس = ٤ ← ٢ص × ٤ = ٤ ← ص = ١/٢

* ص² = ٤س ← ١/٤ = ٤س ← س = ١/١٦

س١ = ١/١٦ ، ص١ = ١/٢ ، م = ٤

(ص - ١/٢) = ٤ (س - ١/١٦) .

● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) = س² + ٥ عند تقاطعه مع المستقيم ه(س) = ٦س ؟

- الحل: هـ تقطع ه ← هـ = ه عند التقاطع

س² + ٥ = ٦س ← س² - ٦س + ٥ = ٠

(س - ٥) (س - ١) = صفر

س١ = ٥	س١ = ١
ص١ = ٣	ص١ = هـ(١) = ٦
م = هـَ(٥) = ١٠	م = هـَ(١) = ٢
ص - ٣ = ١٠(س - ٥)	ص - ٦ = ٢(س - ١)

● أوجد معادلة المماس لمنحنى:

(س+ص)³ - ٥س + ص = ١ ، عند تقاطعه مع المستقيم س + ص = ١ ؟

- الحل : س + ص = ١ ← ص = ١ - س نعوض في

(س + ص)³ - ٥س + ص = ١

(س + (١ - س))³ - ٥س + ١ - س = ١

١ - ٦س + ١ = ١ ← س = ١/٦ ، لكن ص = ١ - س ← ص = ٥/٦

* الآن نشتق (س+ص)³ - ٥س + ٧ = ١ :

٣(س+ص)²(١ + دص/دس) - ٥ + دص/دس = صفر

٣(١)²(١ + دص/دس) - ٥ + دص/دس = صفر

٣ + ٣ دص/دس - ٥ + دص/دس = صفر

٤ دص/دس = ٢ ← دص/دس = ١/٢ .

* ص - ٥/٦ = ١/٢ (س - ١/٦) .

سعد الدين البستنجي

القمة في التربيعيات

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

الأستاذ : سعد الدين البستنجي
٠٧٩٥٤٤٠٥٤٣
٠٧٨٨٩٨٤٨٠٦

subject: Date:

● أثبت أن المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = س^2 - ٥س + ٦$ عند تقاطعه
تقاطعه مع محور السينات متعامدين ؟

- الحل) * هـ يقطع السينات عندما ص = ٠
$س^2 - ٥س + ٦ = ٠ \leftarrow (س-٣)(س-٢) = ٠$
س = ٣ | س = ٢
$م_1 = هـ'(٣) = ٦ - ٥ = ١$ | $م_2 = هـ'(٢) = -١$
لكن $م_1 \times م_2 = -١$ ∴ المماسان متعامدان.

● إذا كان $هـ(س) = س^2 + P$، عيّن
الاقتران $هـ(س) = س$ ، أوجد قيمة P ؟

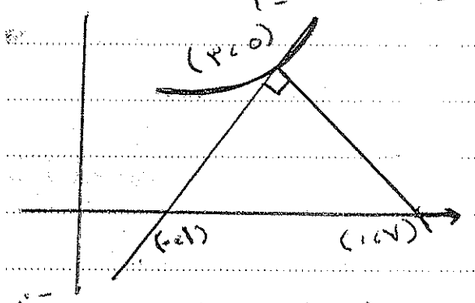
- الحل : * $هـ' = هـ \leftarrow ٢س = ١ \leftarrow س = \frac{١}{٢}$
* $هـ = هـ \leftarrow س^2 + P = س \leftarrow \frac{١}{٤} + P = \frac{١}{٢}$
$P = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} \leftarrow P = \frac{١}{٤}$.

● أوجد النقطة على منحنى $س + ص = ٦$
بحيث يكون عندها المماس عمودي على
المستقيم $٣ص - ٦س = ٧$.

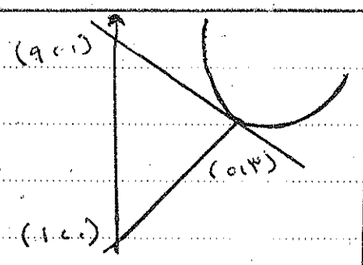
● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران
$هـ(س) = س^3 - ٨$ عند تقاطعه مع
محور السينات .

● أوجد النقطة التي تقع على $ل_1$ لمنحنى:

يوازي محور السينات .
يوازي المستقيم $ص - ٢س + ٣ = ٠$
عمودي على المستقيم $٦ص - ٣س - ٥ = ٠$



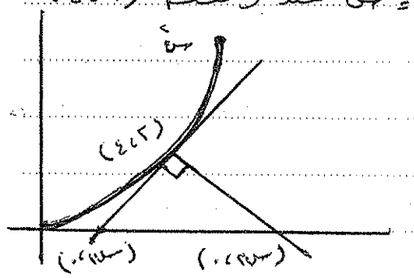
مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × (القاعدة × الارتفاع)
$م = \frac{١}{٢} \times (٧-١) \times ٣ = \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٣ = ٩$



$م = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٣$
$= ٤ \times ٣$
$= ١٢$ وحدة مربعة.

● أوجد مساحة المثلث المتكون من
المماس والعمودي على المماس و
السينات على منحنى الاقتران
$هـ(س) = س^2$ عند النقطة (٢،٤).

الحل :



NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

م = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{1}{2}$ × (س$_2$ − س$_1$) × ٤

* ق(س) = ٢ س

الميل = ٢ × ٢ = ٤

المماس	العمودي
ص − ٤ = ٤ (س − ٢)	ص − ص$_1$ = $\frac{-1}{م}$ (س − س$_1$)
ص = ٤ س − ٤	ص − ٤ = $\frac{-1}{٤}$ (س − ٢)
	٤ ص − ١٦ = − س + ٢
	٤ ص = − س + ١٨

* نجد نقطة تقاطع المماس مع السينات:

ص = ٤ س − ٤ ، ص = ٠ ← ٤ س − ٤ = ٠ ← س = ١

* نجد نقطة تقاطع العمودي مع السينات:

٤ ص = − س + ١٨ ← ص = ٠ ← س = ١٨

∴ م$_{\Delta}$ = $\frac{1}{2}$ × (١٨ − ١) × ٤ = ٣٤ وحدة مربعة

● أوجد مساحة المثلث الذي أضلاعه محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة:

٤ س^2 + ص^2 = ٢٠ عند النقطة (١، −٤)

الحل: ٨ س + ٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = ٠ ←

٢ ص $\frac{د ص}{د س}$ = − ٨ س ،

$\frac{د ص}{د س}$ = $\frac{-٨ س}{٢ ص}$ ← $\left|\frac{د ص}{د س}\right|_{(١، -٤)}$ = ١

* معادلة المماس:

ص + ٤ = س − ١ ← ص = س − ٥

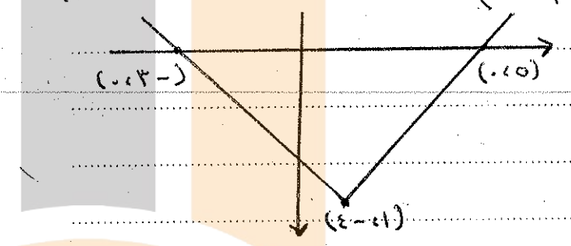
* التقاطع مع السينات عندما ص = ٠

* معادلة العمودي:

ص + ٤ = − (س − ١) ← ص = − س − ٣ ،

* التقاطع مع السينات عندما ص = − ٣ ،

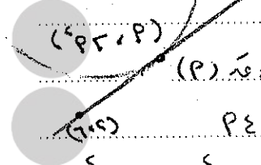
* م = $\frac{1}{2}$ × (٥ − ٣) × ٤ = ١٦ وحدة مربعة



★ النقطة الخارجة أسئلة المماس ★

● أوجد النقطة على منحنى ق(س) = ٢ س^2 والتي يمر المماس عندها بالنقطة (٦، ٢)؟

- الحل: نفرض النقطة:



م = $\frac{\text{مرتبة المماس}}{\text{مرتبة السينات}}$ م = ق′(ف)

= ٤ ف

م = $\frac{ف - ٢}{٢ ف^2 - ٦}$ = ٤ ف ← ف^2 − ٢ = ٨ ف^2 − ٢٤ ← ٨ ف^2 − ف^2 − ٢٤ + ٢ = ٠

٧ ف^2 − ٢٢ ف + ٣ = ٠

(ف − ٣)(٧ ف − ١) = ٠ ← ف = ٣ ، ف = $\frac{1}{7}$

* النقط (٣، ق(٣)) = (١٨، ٣)

($\frac{1}{7}$، ق($\frac{1}{7}$)) = ($\frac{1}{7}$، ٢)

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● أوجد معادلة المماس لمنحنى المقترانه للسؤال السابقه ؟

* ص - ١٨ = ١٢ (س - ٣)

* ص - ٢ = ٤ (س - ١)

● إذا رسم مماس منحنى هـ(س) = س^{٢} + أ عند النقطة (١، ب) و يقطع محور الصادات عند س = -١، جد قيم أ، ب ؟

- الحل: هـ(س) = س^{٢} + أ،

هـ'(س) = ٢ س .

أ = ٢ × ١ = ٢ ← ص - ب = ٢ (س - ١)

ص = ٢ س - ٢ + ب ← ص يقطع الصادات عندما س = ١

∴ ٠ = -٢ + ب ← ب = ٤

* لكن هـ يمر بالنقطة (١، ب) = (١، ٤)

هـ(١) = ١ + أ = ٤ ← أ = ٣ .

● أوجد معادلة كثير حدود من الدرجة الثانية حيث أن الاقتران هـ(س) يمر بالنقطة (١، ٥) ويصل المماس لمنحنى هـ(س) عند النقطة (٢، ١١) يساوي ٧ ؟

- الحل: هـ(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

هـ'(س) = ٢ أ س + ب

* هـ(١) = أ + ب + جـ = ٥ ..... ①

* هـ(٢) = ٤ أ + ٢ ب + جـ = ١١ ..... ②

* هـ' (٢) = ٤ أ + ب = ٧ ..... ③

حل المعادلات ١، ٢، ٣ ⇐

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ١

∴ هـ(س) = س^{٢} + ٣ س + ١ .

● إذا كان ص = أ س + ب عمودياً على منحنى هـ(س) = س^{٣} ، أوجد قيم أ، ب إذا كانت نقطة التماس (٢، ١) ؟

- الحل: هـ (٢) = ١ = ٢ أ + ب

∴ ٢ أ + ب = ١ ..... ①

* هـ'(س) = $\frac{-٢}{س^{٣}}$ ← هـ'(٢) = $\frac{-١}{٢}$

∴ ميل المماس = $-\frac{١}{٢}$ ←

ميل العمودي = ٢

لكن ص = أ س + ب ← ميله = ٢

∴ أ = ٢ لكن النقطة (١، ٢) تقع عليه .

١ = ٤ + ب ← ب = -٣ .

● عين الثوابت أ، ب، جـ في المنحنيين: هـ(س) = جـ س - س^{٣} ، هـ(س) = أ س^{٢} + ب س + جـ ، حيث أن صادق هما مماس مشترك للمنحنيين

عند النقطة (٢،٠) الواقعة عليه ؟

- الحل : هـ(٢) = ٠ ← ٢جـ - ٤ = ٠

← جـ = ٢

هـ(س) = ٤أ + ٢ب + جـ = ٠

← ٢أ + ب = -١

* المماس مشترك بان :

هـ'(٢) = هـ'(٢) ←

جـ - ٤ = ٤أ + ب

٢ - ٤ = ٤أ + ب

٤أ + ب = -٢

← أ = -١/٢ ، ب = صفر

● إذا كان هـ(س) = س² - أس - (١-أ) حيث أ ثابتة ، أكتب قاعدة الاقتران هـ(س) التي تجعل هـ(س) مماساً لمحور السينات ؟

- الحل : هـ'(س) = ٢س - أ = صفر (ميل السينات).

∴ أ = ٢س * كذلك مماس محور السينات * ص = ٠

س² - أس - (١-أ) = صفر

س² - ٢س² - (١-٢س) = صفر

- س² - ١ + ٢س = ٠ ←

س² - ٢س + ١ = ٠

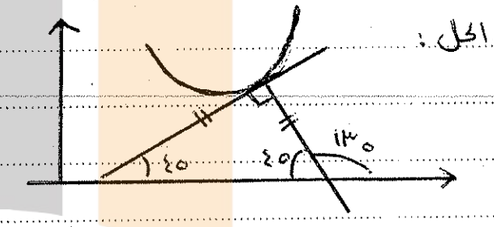
(س-١)(س-١) = ٠ ← س = ١

∴ أ = ٢س = ٢

∴ هـ(س) = س² - ٢س + ١

● أوجد النقطة على منحنى الاقتران صـ = س³ - س² والتي يصنع المماس عندها والعمودي على المماس مع محور السينات مثلث متساوي الساقين.

- الحل :



من الشكل السابق نجد أن المماس يصنع زاوية مقدارها π/٤ مع الاتجاه الموجب

∴ ظا π/٤ = ٣س² - ٢س = ١

٣س² - ٢س - ١ = ٠ ←

(٣س + ١)(س - ١) = ٠

* عند س = ١ ← صـ = ٠ ← النقطة (١،٠).

* عند س = -١/٣ ← صـ = -٢/٢٧ ← (-١/٣ ، -٢/٢٧).

● أثبت أن صـ = ٢س + ٦ يمس المنحنى س² - صـ² = ١٢ ؟

- الحل : * حتى يكون الاقترانان متماسان يجب أن يكونا متساويان ولهما نفس الميل ؛

منصة قلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$ص = ٢س^{٢} + ٦$ ... $٢س - ٢ص \frac{ص}{س} = ٠$

$\frac{د ص}{د س} = ٢$ ... $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$

$٢ = \frac{س}{ص}$ ← $س = ٢ص$.

$\therefore ص = ٢س + ٦$ ← $ص = ٤س + ٦$

← $ص = -٢$.

$ص = -٢$ ، $س = -٤$

نقطة التماس $(-٤، -٢)$

$ص = ٢س + ٦$ ... $س - ص^{٢} = ١٢$

$-٢ = ٢(-٤) + ٦$ ✓ ... $١٦ - ٤ = ١٢$ ✓

كذلك، لهم نفس الميل عند $(-٤، -٢)$ فإنهما متماسين.

● إذا رسم $م$ للنقطة $(١، -٢)$ عمودياً للاقتران $ص = \frac{١ - ٢س}{س - ٣}$، $س \neq ٣$، أوجد نقطة التماس؟

∴ الحل: النقطة $(١، م(١)) = (١، ١)$.

● أوجد معادلة المماس المرسوم $م$ للنقطة $(١، -٨)$ للمنحنى $س^{٣} - ص^{٢} = ٨$؟

∴ الحل: $ص = -٣س - ٨$

● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $م(س) = ٢س^{٣} + ٥س$ الذي يوازي القاطع بين النقطتين $(١، م(١))$، $(٣، م(٣))$

∴ الحل: ميل القاطع $= \frac{م(٣) - م(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{٧ - ٢٣}{٢}$

$م = ٨$ ← $م(س) = ٤س$

$م(س_{١}) = ٤س_{١} = ٨$ ← $س_{١} = ٢$

النقطة $(٢، م(٢)) = (٢، ١٣)$

$ص - ١٣ = ٨(س - ٢)$

● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $م(س) = ٢س^{٣} + ٥س + ٥$ الذي يوازي القاطع بين النقطتين $(-١، ٢)$، $(١، ٩)$

∴ الحل: ميل القاطع $= \frac{٩ - ٢}{١ - (-١)} = \frac{٧}{٢}$

$م = \frac{٧}{٢}$ ← $م(س) = ٤س + ٥$

$٤س + ٥ = \frac{٧}{٢}$ ← $س = -\frac{٣}{٨}$

$ص = ٢(-\frac{٣}{٨})^{٢} + ٥(-\frac{٣}{٨}) + ٥$

$= \frac{٩}{٣٢} - \frac{١٥}{٨} + ٥ = \frac{٩ - ٦٠ + ١٦٠}{٣٢} = \frac{١٠٩}{٣٢}$

$ص - \frac{١٠٩}{٣٢} = \frac{٧}{٢}(س + \frac{٣}{٨})$

● إذا رسم $م$ للنقطة $(١، -٢)$ عمودياً للاقتران $ص = \frac{١ - ٢س}{س - ٣}$، $س \neq ٣$، أوجد نقطة التماس؟

∴ الحل: النقطة $(١، م(١)) = (١، ١)$.

● جد معادلة المماس المرسوم $م$ للنقطة $(١، -٨)$ للمنحنى $س^{٣} - ص^{٢} = ٨$؟

∴ الحل: $ص = -٣س - ٨$

● أوجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $م(س) = ٢س^{٣} + ٥س + ٥$ الذي يوازي القاطع بين النقطتين $(-١، ٢)$، $(١، ٩)$

∴ الحل: ميل القاطع $= \frac{٩ - ٢}{١ - (-١)} = \frac{٧}{٢}$

$م = \frac{٧}{٢}$ ← $م(س) = ٤س + ٥$

$٤س + ٥ = \frac{٧}{٢}$ ← $س = -\frac{٣}{٨}$

$ص = ٢(-\frac{٣}{٨})^{٢} + ٥(-\frac{٣}{٨}) + ٥$

$= \frac{٩}{٣٢} - \frac{١٥}{٨} + ٥ = \frac{٩ - ٦٠ + ١٦٠}{٣٢} = \frac{١٠٩}{٣٢}$

$ص - \frac{١٠٩}{٣٢} = \frac{٧}{٢}(س + \frac{٣}{٨})$

● جد النقطة على منحنى $ص = س - جا٢س$ حيث أن المماس عندها يوازي محور السينات؟

∴ الحل: $\frac{د ص}{د س} = ١ - ٢جتا٢س = صفر$

جتا٢س $= \frac{١}{٢}$ ← $٢س = ٢ن\pi + \frac{\pi}{٣}$

$٢س = ٢ن\pi + \frac{٥\pi}{٣}$

$س = ن\pi + \frac{٥\pi}{٦}$ ، $ن \in ص$.

● إذا كان $هـ(س) = س م(س)$ و $م(١) = ٢$ ، $ص - ٤س = ٦$، $ص$

منصة اللقم التعليمية AL LOQAM EDUCATION

الميل ده (س) في النقطة (١، ٥)،
أوجد معادلة المماس عند س = ١؟
- الحل: بما أن: ٢ص - ٤س = ٦
يعني ص = د (س)
ص = ٢س + ب
٥ = ٢(١) + ب ← ب = ٣
∴ معادلة المماس:
ص - ٥ = -٣ (س - ١)

● إذا علمت أن ده (س) = أ س² + ب س + جـ،
وكان ص = د (س) = ٢ س² + ٣ س + ٤،
أوجد قيم س بحيث ده (س) = د (س)؟
- الحل: ٢أ س + ب = ٢ب س + ٣
٢أ س - ٢ب س = ٣ - ب ←
٢ س (أ - ب) = (٣ - ب)
٢ س = ١ ← س = ١/٢

● إذا رسم مماس لمنحنى س² + ٣ عند
(١، ب) يقطع محور السينات عندما
س = -١، جد قيم أ، ب؟
- الحل: ده (س) = س² + أ ←
ده (س) = ٢ س
* نقطة التماس (١، ب) ←
ص = ٢(١) + ٥ = ٧
ص = ٢(١) + ٣ = ٥
ص = ٢(١) + ٤ = ٦
ص = ٢(١) + ٢ = ٤
ص = ٢(١) + ١ = ٣
ص = ٢(١) + ٠ = ٢
ص = ٢(١) + -١ = ١
ص = ٢(١) + -٢ = ٠
ص = ٢(١) + -٣ = -١
ص = ٢(١) + -٤ = -٢
ص = ٢(١) + -٥ = -٣
ص = ٢(١) + -٦ = -٤
ص = ٢(١) + -٧ = -٥
ص = ٢(١) +

● إذا كان هـ(س) = ٤س³ - ١٢س² + ١٠س - ٣ فإن ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س) عند النقطة التي تكون منها قيمة المشتقة الثانية مساوية للعدد ٤ تساوي :

ج) ٤٦ د) ٢٤ ب) ١٠ أ) -٢

● جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ه(س) = س + ٤/√س ، س > ٠ عند س = ٤ .

- الحل : س١ = ٤ ، ص١ = ه(٤) = ٥ ،

م = ؟ ؟ (١)

ه'(س) = ١ + (-١)/(س √س) (١)

م = ه'(٤) = ١ + (-١)/(٢ × ٤) = ٧/٨

* معادلة المماس :

ص - ص١ = م (س - س١) (١)

ص - ٥ = ٧/٨ (س - ٤) (١)

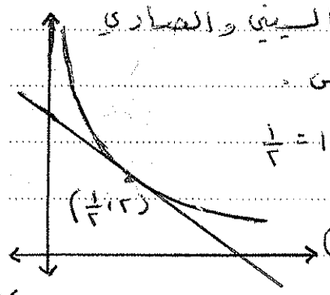
* معادلة العمودي :

ص - ص١ = -١/م (س - س١) (١)

ص - ٥ = -٨/٧ (س - ٤)

● ما مساحة المثلث المحصور بين محوري الإحداثيات ومماس المنحنى ص = ١/س ، س > ٠ عند النقطة (٢ ، ١/٢) .

- الحل : * أولا نجد معادلة المماس ثم نجد المقطع السيني والصادي لمعادلة المماس .



* س١ = ٢ ، ص١ = ١/٢

د ص/د س = -١/س² = م ← م = -١/٤ (١)

* معادلة المماس : ص - ص١ = م (س - س١) (١)

ص - ١/٢ = -١/٤ (س - ٢) ←

ص = -١/٤ س + ١ (١)

عندما س = ٠ ← ص = ١

← المقطع الصادي (٠ ، ١) (١)

عندما ص = ٠ ← س = ٤

← المقطع السيني (٤ ، ٠) (١)

مساحة المثلث = ١/٢ × ٤ × ١ = ٢ وحدة مربعة . (١)

● إذا كان ه(س) = ل(س) + ٨س ، وكان ه(س) ≠ صفر ، وكان ل(س) ، هـ(س) لمنحنى كل منهما س أفقي عند النقطة (٤ ، ١) فما قيمة ه'(٤) ؟

- الحل : * لمماس أفقي عند النقطة (٤ ، ١) يعطي :

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

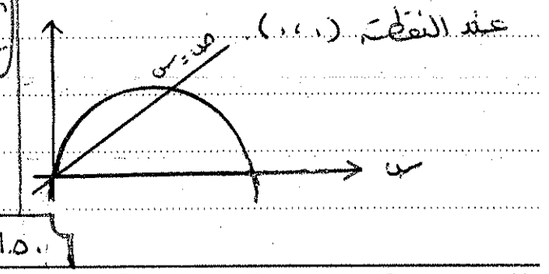
هـ(١) = ٤ ، هـ'(١) = صفر ①
ل(١) = ٤ ، ل'(١) = صفر
مـ'(س) = (ل'(س)+٨)هـ'(س) - هـ(س)(ل(س)+٨س) / هـ²(س) ②
مـ'(١) = (ل'(١)+٨)(هـ(١))² - هـ(١)(ل(١)+٨) / هـ²(١)
مـ'(١) = ٣٢ - ٠ / ١٦ = ٢ ①

● أوجد ميل المماس لمنحنى :
س² + ٤ ص² = ٤٠ ، عند النقطة (٢√٢ ، -١/√٢) ④
- الحل : ٢س + ٨ص dص/dس = ٠ ①
٢√٢ + (-٨/√٢) dص/dس = ٠ ①
-٨/√٢ dص/dس = -٢√٢ ← dص/dس = ١/٢
ميل المماس = ١/٢ . ①

● في الشكل المجاور ، أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ، ومماس منحنى الاقتران هـ(س) = ٣√٢ س - س² عند النقطة (١،١) ④
- الحل : هـ = هـ٢ - هـ١ ①
* هـ١ ← ظا هـ١ = ١ ①
ميل المستقيم ص = س
∴ هـ١ = ٤٥° ①
* هـ٢ ← ظا هـ٢ = ميل المماس = مـ'(١) ①
ظا هـ٢ = √٣ ← هـ٢ = ٦٠° ①
هـ = ٦٠° - ٤٥° = ١٥° ①

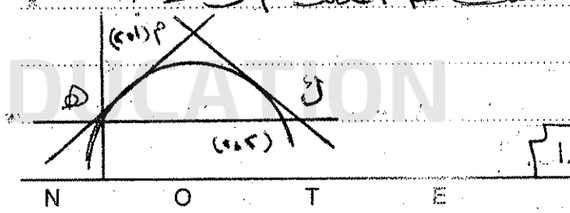
● أوجد ميل المماس لمنحنى :
س² + ٤ ص² = ٤٠ ، عند النقطة (٢√٢ ، -١/√٢) ④
- الحل : ٢س + ٨ص dص/dس = ٠ ①
٢√٢ + (-٨/√٢) dص/dس = ٠ ①
-٨/√٢ dص/dس = -٢√٢ ← dص/dس = ١/٢
ميل المماس = ١/٢ . ①

● في الشكل المجاور ، أوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ، ومماس منحنى الاقتران هـ(س) = ٣√٢ س - س² عند النقطة (١،١) ④



● م(س) = مـ'(س) + س / هـ(س) ، هـ(س) ≠ ٠ ⑤
وكان لمنحنى مـ(س) ، هـ(س) مماساً مشتركاً أفقياً عند النقطة (٣، ٤) ، أوجد مـ'(٣) ؟
- الحل : مـ(٣) = هـ(٣) = ٤
مـ'(٣) = هـ'(٣) = ٠
م'(س) = (٢مـ(س) مـ'(س) + ١)(هـ(س)) - هـ'(س)(مـ²(س) + س) / هـ²(س) .
م'(٣) = هـ(٣) + صفر / (هـ(٣))² = ٤/١٦ = ١/٤

● مـ هـ النقطة م (٢،١) رسم مماساً لمنحنى الاقتران ص = ٢س - س² ، فقطع المحورين الإحداثيين في النقطتين ك ، هـ ، جد مساحة المثلث م ك هـ ؟ ⑤



منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION
NOTE BOOK

الحل: م ١ = $\frac{ص - ٢}{س - ١}$

$\frac{ص - ٢}{س - ١}$ = ٢ - ٢ س

ص - ٢ = ٢ (١ - س) (س - ١)

ص = ٢ س - ٢ س^{٢} - ٢ + ٢ س

ص = ٤ س - ٢ س^{٢} - ٢

س^{٢} - ٢ س = ٠ ← س = ٠ ← النقطة (١،١)

← س = ٢ ← النقطة (١،٢)

المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ = ٢ وحدة مربعة

● إذا كان منحنى ه (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ يقطع محور الصادات في النقطة (٠، ٣) وله مماسان، المماس الأول عند النقطة س = -١ ويصنع زاوية مقدارها ٤٥° مع الإتجاه الموجب لمحور السينات والمماس الثاني عند النقطة س = ٢ ويصنع زاوية مقدارها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، جد القيم أ، ب، جـ.

الحل: ه (٠) = ٣ ← جـ = ٣

* ه' (س) = ٢ أ س + ب ←

ه' (-١) = -٢ أ + ب = ظا ٤٥ = ١

← -٢ أ + ب = ١

* ه' (٢) = ٤ أ + ب = ظا ١٣٥ = -١

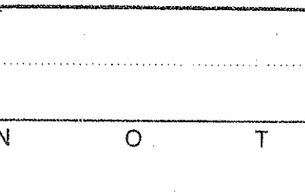
← ٤ أ + ب = -١

$\frac{-٢}{٦}$ = أ ← أ = $\frac{-١}{٣}$ ، ب = $\frac{١}{٣}$

● أوجد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة ($\frac{١}{٢}$، ٢) ويكون عمودياً على المنحنى ص = س^{٢}.

الحل: ص = س^{٢} ← $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ س ①

ميل العمودي = $\frac{-١}{١ \div ٢}$



* حتى نجد معادلة العمودي يجب معرفة نقطة المماس *

م = $\frac{١}{١ \div ٢}$ = $\frac{-١}{٢ - ١ س}$ ①

$\frac{-١}{١ س^{٢} \div ٢}$ = $\frac{-١}{٢ - ١ س}$

٢ س^{٣} - ١ س = -٢ + ١ س ①

٢ س^{٣} = ٢ ← س = ١ ①

ميل العمودي ل = $\frac{-١}{٢}$

س = ١ ، ص = ١ ، ل = $\frac{-١}{٢}$

ص - ١ = $\frac{-١}{٢}$ (س - ١) ①

٢ ص + س = ٣

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

• أوجد معادلة كل من المماس والعمودي على المماس لمنحنى العلاقة :

(٤ د) $س^٢ - ص^٢ = ١٦$ ، عند النقطة $(٥، -٣)$

- الحل : $٢س - ٢ص \frac{د ص}{د س} = صفر$

$\leftarrow \frac{د ص}{د س} = \frac{س}{ص}$ (١)

ميل المماس عند $(٥، -٣) = \frac{٥}{-٣}$ (١)

* معادلة المماس :

$ص + ٣ = \frac{-٥}{٣}(س - ٥)$ (٢)

* معادلة العمودي :

$ص + ٣ = \frac{٣}{٥}(س - ٥)$ (٢)

• إذا كان المستقيم $٨س - ٤ص + جـ = ٠$ ، ليس مماساً لمنحنى الاقتران $ه(س) = \frac{٣}{٢}س - \frac{٨}{س}$ ، فجد قيمة الثابت جـ ؟

(٤ د)

- الحل : ميل المستقيم $= ٢$ (١)

$ه'(س) = \frac{٣}{٢} + \frac{٤}{س^٢}$ (١)

ميل المماس $= ه'(س_١) \leftarrow ٢ = \frac{٣}{٢} + \frac{٤}{س_١^٢}$ (١)

$س_١ = ٤$ ، $ص_١ = ه(٤) = ٢$ (٢)

نقطة التماس $(٤، ٢)$ ، (١)

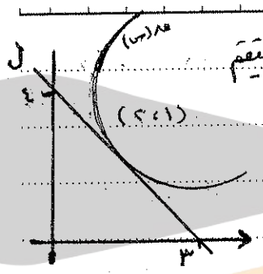
ولكن هذه النقطة تحقق معادلة المماس :

$(٤ \times ٨) - (٢ \times ٤) + جـ = صفر$

$جـ = -٢٤$ .. (١)

• في الشكل المجاور المستقيم ل مماس لمنحنى $ه(س)$ عند النقطة $(١، ٢)$ فما قيمة $ه'(١)$ ؟

(٣ د)



ب) $-\frac{٣}{٤}$ (ب) $-\frac{٤}{٣}$ جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٤}{٣}$

• إذا كان $ه(س) = \frac{س^٢}{ل(س)}$ ، $ل(س) \neq صفر$.

وكانت معادلة المماس لمنحنى $ل(س)$ عند $س = ٢$ هي :

$٣س + ص = ١$ فجد $ه'(٢)$ ؟

(٣ د)

- الحل : * $ل'(٢) = -٣$ ،

$ه'(س) = \frac{(٢س\ ل(س)) - (ل'(س) \times س^٢)}{ل^٢(س)}$ (٣)

$ه'(٢) = \frac{٤ل(٢) - ل'(٢) \times ٤}{ل^٢(٢)}$

*لكن $ل'(٢) = -٣$ ، $ل(٢) = ١١ - ٦ = ٥$ (٢)

$ه'(٢) = \frac{(٥ \times ٤) - (-٣ \times ٤)}{(٥)^٢} = \frac{٣٢}{٢٥}$ (١)

• أوجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة :

$٧ص^٢ - ٣س^٢ص + ٣س + ٥ = صفر$

عند النقطة $(٤، ١)$ ؟

(٤ د)

- الحل : $س_١ = ٤$ ، $ص_١ = ١$ ، م = ؟؟

$١٤ص \frac{د ص}{د س} - (٣س^٢ص + س^٣ \frac{د ص}{د س}) + ١ = صفر$ (١)

منصة قلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

* نعوض النقطة (٤، ١).

$\frac{د^٢ص}{د س^٢} = (٤٨ + ٦٤ \frac{د ص}{د س}) + ١ =$ صفر

$\frac{د ص}{د س} - ٤٨ + ١ =$ صفر ①

$\frac{د ص}{د س} = ٤٧$ ← $\frac{د ص}{د س} = \frac{٤٧}{٥٠}$ ①

* ميل العمودي $= \frac{٥٠}{٤٧}$ ①

معادلة العمودي:

$ص - ١ = \frac{٥٠}{٤٧}(س - ٤)$ ①

● أثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقة $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٤٥$، $س^٢ - ٤ص^٢ = ٥$ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدين.

(٣ نقاط)

- الحل: نجد نقط التقاطع.

$٤(٥ + ٤ص^٢) + ٩ص^٢ = ٤٥$

$٥ص^٢ = ٢٥$ ← $ص^٢ = ١$

$ص = ١$ (التقاطع في الربع الأول) ①

$س = \sqrt{٥ + ٤ص^٢} = \sqrt{٥ + ٤} = ٣$ ①

* نقطة التقاطع الواقعة في الربع الأول (٣، ١) نشتق كل معادلة بالنسبة لـ س.

* الأولى: $٨س + ١٨ص \frac{د ص}{د س} = ٠$

← $\frac{د ص}{د س} = \frac{-٨س}{١٨ص}$ ①

* ميل المماس للعلاقة الأولى عند (٣، ١) $= \frac{-٢٤}{١٨} = \frac{-٤}{٣}$ ①

* الثانية: $٢س - ٨ص \frac{د ص}{د س} = ٠$

← $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢س}{٨ص}$

* ميل المماس للعلاقة الثانية عند (٣، ١) $= \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$ ①

* حاصل ضرب ميلي المماسين $= \frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} = -١$ ①

∴ المماسين للعلاقتين عند (٣، ١) متعامدين.

★ التطبيقات الفيزيائية ★

● ملاحظات هامة جداً:

① ف(ن) تعني المسافة المقطوعة عند الزمن (ن).

② ع(ن) = ف'(ن) وتعني السرعة اللحظية في اللحظة "ن".

③ ت(ن) = ع'(ن) = ف''(ن) وهي تدل على التسارع في اللحظة "ن".

④ إن السرعة يمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

⑤ التسارع يمكن أن يكون موجباً أو سالباً.

⑥ المسافة (الإزاحة) يمكن أن تكون موجبة أو سالبة.

⑦ إذا سقط جسم من ارتفاع معيّن فإن إزاحته سالب ذلك الارتفاع

⑧ يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

تكون سرعته اللحظية صفر.

⑨ الزمن لا يكون سالباً فأقل قيمة للزمن صفر.

⑩ زمن الصعود يساوي زمن الهبوط.

● مثال شامل.

متحرك جسيم في خط مستقيم فإذا كانت المسافة المقطوعة في زمن قدره ن تحقق العلاقة:

ف = ن³ - ٩ن² + ٢٤ن ، أوجد: ن

① السرعة اللحظية. ② التسارع اللحظي.

③ السرعة عندما ن = ٣

④ التسارع عندما ن = ٣

⑤ التسارع عند انعدام السرعة.

⑥ السرعة عند انعدام التسارع.

⑦ المسافة المقطوعة عندما يكون الجسيم في حالة سكون.

⑧ مجموعة قيم ن التي يكون عندها التسارع موجب.

⑨ مجموعة قيم ن التي يكون عندها التسارع سالب.

- الحل:

① ع = ٣ن² - ١٨ن + ٢٤

---

② ت = ٦ن - ١٨

③ ع(٣) = (٩×٣) - (١٨×٣) + ٢٤

= -٣ م/ث .

---

④ ت(٣) = (٦×٣) - ١٨ = صفر .

---

⑤ التسارع عند انعدام السرعة أي (ع = صفر):

ع = ٣ن² - ١٨ن + ٢٤ = ٠

ن² - ٦ن + ٨ = ٠ ← (ن-٤)(ن-٢) = ٠

انعدام السرعة عندما ن = ٤ ، ن = ٢

* ت(٤) = (٤×٦) - ١٨ = ٦ م/ث²

ت(٢) = (٢×٦) - ١٨ = -٦ م/ث²

---

⑥ ٦ن - ١٨ = ٠ ← ٦ن = ١٨ ← ن = ٣

عندما التسارع عندما ن = ٣

ع(٣) = ٣(٣)² - (١٨×٣) + ٢٤

= ٢٧ - ٥٤ + ٢٤ = -٣ م/ث .

---

⑦ السكون اللحظي أي ع = صفر

ن = ٤ ، ن = ٢

ف(٤) = ٦٤ - (١٦×٩) + (٤×٢٤) =

ف(٢) = ٨ - (٤×٩) + (٢×٢٤) =

---

⑧ ت = ٦ن - ١٨ = ٠ ← ن = ٣

NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

* المتسارع (موجب) $\Leftarrow$ (٣، ∞)
* المتسارع (سالب) $\Leftarrow$ [٠، ٣)

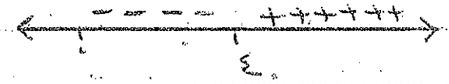
لأن $ن$ الزمن لا يمكن أن يكون أقل من صفر.

● إذا كانت ف = $ن^٣ - ٨ن + ١$ حيث ف بالأمتار و $ن$ بالثواني، أجب:

① مجموعة قيم $ن$ التي تكون عندها السرعة موجبة.

② مجموعة قيم $ن$ التي تكون عندها السرعة سالبة.

- الحل: ع = $٣ن^٢ - ٨ = ٠ \leftarrow ن = ٤$



* السرعة موجبة (٤، ∞).
* السرعة سالبة [٠، ٤).

● قذف جسم رأسياً لأعلى مستقيم حسب العلاقة ف = $-ن^٢ + ٢١ن$ أوجد:

① الزمن اللازم ليصل الجسم لأقصى ارتفاع.

② الزمن اللازم ليعود الجسم للمكان الذي قذف منه.

③ أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

- الحل: ف = $-ن^٢ + ٢١ن$

ع = $-٢ن + ٢١ = ٠$

$-٢ن = -٢١ \leftarrow ن = ٣$ ثانية

* يصل الجسم لأقصى ارتفاع عندما تكون ع = صفر أي بعد ٣ ثواني.

* الزمن اللازم ليعود الجسم إلى المكان الذي قذف منه هو ٢ × ٣ = ٦ ثواني.

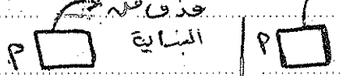
* أقصى ارتفاع عندما ن = ٣.

ف (٣) = $-٩ + ٦٣ = ٢١$ متر.

*** هام جداً.

* في المقذوفات تكون العلاقة موجودة في السؤال قبل بعد الجسم عند نقطة الاستناد وإذا كانت طبيعية (بدون إضافة أو طرح عدد).

ف (ن) = ع. ن $- ٩ن^٢$.

قذف من الأرض	قذف من البناية
	
ف أرض = $٢١ن - ٥ن^٢$	ف البناية = $٢١ن - ٥ن^٢$
ف البناية = $٢١ن - ٥ن^٢ - ٩$	ف الأرض = $٢١ن - ٥ن^٢ + ٩$

منصة العلم التعليمية AL QALAM EDUCATION

● قذف جسم رأسياً للأعلى بسرعة ابتدائية قدرها ٥٠ م/ث من قمة برج ارتفاعه ٢٠ متر وحسب العلاقة ف(ن) = ٥٠ن − ٥ن²، احسب :

① أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض.

② سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٦٥ متر عن سطح الأرض.

③ سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٤٥ متر عن البرج.

- الحل:

ف البرج = −٥ن² + ٥٠ن

ف الأرض = −٥ن² + ٥٠ن + ٢٠

ع = ٥٠ − ١٠ن

ت = −١٠

① * عند أقصى ارتفاع :

ع = ٠ ← ٠ = ٥٠ − ١٠ن ← ن = ٥

* ف أرض = (−٥×٥²) + (٥٠×٥) + ٢٠

= ١٤٥ متر

② ٦٥ = −٥ن² + ٥٠ن + ٢٠

٠ = ٤٥ + ٥٠ن − ٥ن²

٠ = ٩ + ١٠ن − ن²

٠ = (ن − ٩)(ن − ١) ←

ن = ١ ، ن = ٩

ع (١) = ٥٠ − ١٠ = ٤٠ م/ث .

ع (٩) = ٥٠ − ٩٠ = −٤٠ م/ث

③ ٤٥ = ٥٠ن − ٥ن²

٠ = ٤٥ + ٥٠ن − ٥ن² ←

٠ = ٩ + ١٠ن − ن² ←

٠ = (ن − ٩)(ن − ١) ←

ن = ١ ، ن = ٩

ع (١) = ٤٠ م/ث .

ع (٩) = −٤٠ م/ث .

● قذف جسم رأسياً للأعلى من سطح بناية حسب العلاقة :

ف = ١٠ن − ٥ن² ، احسب ارتفاع البناية علماً بأن أقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض = ١٠ متر.

- الحل : ف البناية = ١٠ن − ٥ن²

ف الأرض = ١٥ن − ٥ن² + P

ت = −١٠

* أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ١٠

ع = صفر ← ف أرض = ١٠

٠ = ١٠ − ١٠ن ← ١٠ = P + ١٥ن − ٥ن²

ن = ١ ← ١٠ = P + ٥ − ١٠

P = ٥

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

● قذف ف رأسياً للأعلى سمحت بزع حسب العلاقة ف (ن) = ٤٨ ن - ٦ ن^{٢} ، حيث ارتفاع بزع عما بأن سرعة الجسم لحظة وصوله الأرض هي ٦٠ م/ث .

● قذف جسم رأسياً للأعلى حسب العلاقة ف (ن) = ٩٦ ن - ١٦ ن^{٢} ، احسب ما يلي :

(أ) أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم .

(ب) الزمن اللازم حتى يعود الجسم للأرض .

(ج) السرعة التي قذف بها الجسم .

(د) سرعة الجسم وهو على ارتفاع ٨٠ م .

● قذف جسم رأسياً إلى الأعلى بحيث أن ارتفاعه عن نقطة القذف بالأمتار بعد ن ثانية يحقق وفقاً للاقتران : (٥ علامات)

ف (ن) = ع$_{١}$ ن - ٥ ن^{٢} ، فإذا علمت أن أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم هو ٢٠ متر فما قيمة ع$_{١}$ ؟

- الحل : ع (ن) = ف' (ن)

(١) ع$_{١}$ - ١٠ ن = ٠

(١) ← ع$_{١}$ = ١٠ ن أقصى ارتفاع (١)

* ف (ن) = ١٠ ن^{٢} - ٥ ن^{٢} = ٢٠ (١)

ن^{٢} = ٤ ← ن = ٢ (١)

∴ ع$_{١}$ = ٢٠ (١)

● قذف جسم رأسياً للأعلى وحسب العلاقة ف = ٩٠ ن - ٥ ن^{٢} ، حيث م قيمة عما بأن أقصى ارتفاع يساوي ٤٥ متر .

- الحل : ع = م - ١٠ ن = صفر ← م = ١٠ ن

ف = (ن × ن ١٠) - ٥ ن^{٢}

ف = ١٠ ن^{٢} - ٥ ن^{٢} ← ف = ٥ ن^{٢} = ٤٥

← ن^{٢} = ٩ ← ن = ٣ ← م = ٣ × ١٠ = ٣٠

● ف (ن) = ٩٠ ن - ٥ ن^{٢} ، حيث م الثابت عما بأن أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم هو ٤٠ متر .

● يتحرك جسم بسرعة ابتدائية مقدارها ٥٠ م/ث حسب العلاقة :

ف (ن) = م ن^{٢} + ب ن حيث م ، ب ثوابت ، احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما ن = ٢ ، علماً بأن قاع الجسم ١٢ م/ث .

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

العلاقة	المشتقة
ف	ع
ف + ع	ع + ت
ف × ع	(ف × ت) × (ع × ع)
$\sqrt{ف}$	$\frac{ف}{2\sqrt{ف}} = \frac{ع}{2\sqrt{ف}}$
$ف^5$	$5ف^4 \times ع$
$\sqrt{ف+ع}$	$\frac{ع+ت}{2\sqrt{ف+ع}}$
$(ف+ع)^7$	$7(ف+ع)^6 \times (ع+ت)$

● إذا كانت ع = $9\sqrt{ف}$ أوجد ت ؟

- الحل : ت = $\frac{9 \times ف}{2\sqrt{ف}} = \frac{ع \times 9}{2\sqrt{ف}}$

= $\frac{9 \times 9\sqrt{ف}}{2\sqrt{ف}} = \frac{81}{2}$ م/ث^2

● ع = $م^2\sqrt{ف}$ وعلمت أن ت = $\frac{1}{2}$ فما قيمة م ؟

- الحل : ع = $م^2\sqrt{ف}$ ← ت = $\frac{م^2 \times ع}{2\sqrt{ف}}$

ت = $\frac{م^2 \times م^2\sqrt{ف}}{2\sqrt{ف}} = \frac{م^4}{2} = \frac{1}{2}$

$م^4$ = 1 ← م = 1

● يتحرك جسيم حسب العلاقة :

ع^2 = 1 - $ف^3$ ، حيث ع السرعة ، ف المسافة ، جد التسارع عندما تنعدم السرعة.

- الحل : 2ع ت = $-3ف^2$ ع ←

2ع ت + $3ف^2$ ع = 0

ع (2ت + $3ف^2$) = 0

ع = صفر ، 2ت + $3ف^2$ = صفر

ت = $\frac{-3ف^2}{2}$ ، تنعدم السرعة عندما ع = صفر

1 - $ف^3$ = 0 ← ف = 1

∴ ت = $\frac{-3}{2}$ م/ث^2.

● قذف جسم رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض حسب العلاقة :

ف(ن) = 128 ن - $16ن^2$ ، حيث ف المسافة بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ما الزمن بالثواني الذي يبدأ جسم المسير وهو صاعد حتى تبلغ سرعته نصف السرعة التي قذف بها ؟

أ) 4 ب) 2 ج) 64 د) 128

● يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية يعطى وفقاً للقانون:

ف(ن) = ٣ن² + ٧، ما سرعة الجسم بعد ٣ ثوانٍ ؟

(أ) ١٨ م/ث (ب) ٣٤ م/ث (ج) [illegible] (د) [illegible]

● مصعدان كهربائيان أ، ب مستقران في الطابق الأرضي من عمارة، المسافة الأفقية بينهما ٨ متر، بدأ المصعد (أ) يرتفع للأعلى بسرعة (٣ م/ث) وبعد ثانيتين بدأ المصعد (ب) في الارتفاع للأعلى بسرعة (١ م/ث)، جد معدل تغير المسافة بين المصعدين أ، ب بعد ٢ ث من بدء حركة المصعد.

(٨ علامات)

- الحل:

* $\frac{د ص}{د ن} = ٢$، $\frac{د س}{د ن} = ١$

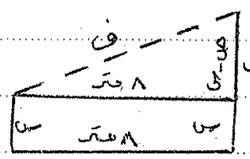
ص بعد ٤ ث = ٢ × ٤ = ٨

س بعد ٢ ث = ١ × ٢ = ٢

$ف = \sqrt{(ص - س)^2 + ٦٤}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(ص - س)(\frac{د ص}{د ن} - \frac{د س}{د ن})}{٢\sqrt{(ص - س)^2 + ٦٤}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{١٢}{١٠٠} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$



● قذفت كرة رأسياً إلى أعلى من قمة برج ارتفاعه (١٦٠) قدماً إذا كانت المسافة المقطوعة بالأقدام بعد ن ثانية، جد ما يأتي:

المسافة المقطوعة تعطى بالمعادلة التالية:

ف(ن) = -١٦ن² + ٤٨ن + ١٦٠، أوجد

(١) أقصى ارتفاع تصله الكرة.

(٢) سرعة الكرة لحظة اصطدامها بالأرض.

- الحل: ف بزع = -١٦ن² + ٤٨ن + ١٦٠

ف بزع = -١٦ن² + ٤٨ن

ع = -٣٢ن + ٤٨ = ٠ ← ن = $\frac{٣}{٢}$

* ف($\frac{٣}{٢}$) = -١٦ × $\frac{٩}{٤}$ + ٤٨ × $\frac{٣}{٢}$ = ٣٦

أقصى ارتفاع عن قمة البرج = ٣٦

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض: ٣٦ + ١٦٠ = ١٩٦

* لحظة وصولها الأرض أي ف = صفر *

-١٦ن² + ٤٨ن + ١٦٠ = ٠

ن² - ٣ن - ١٠ = ٠

(ن - ٥)(ن + ٢) = ٠، ← ن = ٥

ع(٥) = (-٣٢ × ٥) + ٤٨ = -١١٢ م/ث

● يتحرك جسم في خط مستقيم وفقه المعادلة الزمنية:

ف(ن) = $\frac{١}{٣}$ن³ - ٦ن² ، حيث ف المسافة المقطوعة بالأقدام بعد ن ثانية، جد ما يأتي:

١- سرعة الجسم عندما ن = ٥ ثواني؟

٢- تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته؟

- الحل: ع(ن) = ١٢ن - ن٢

ع(٥) = ٦٠ - ٢٥ = ٣٥ قدم/ث

* ١٢ن - ن٢ = ٠ ← ن(١٢ - ن) = ٠

← ن = ٠ ، ١٢

ت(٥) = ١٢ قدم/ث٢

ت(١٢) = -١٢ قدم/ث٢

سرعته = ام/ث .

- الحل: ع = ٣ن٢ - ١٤ن + ٩ = ١

٣ن٢ - ١٤ن + ٨ = ٠ ←

(٣ن - ٢)(ن - ٤) = ٠ ← ن = ٤ ، ن = ٢/٣

* ت = ٦ن - ١٤

ت(٤) = ٢٤ - ١٤ = ١٠ م/ث٢ .

ت(٢/٣) = ٤ - ١٤ = -١٠ م/ث٢ .

● ف(ن) = ن٣ - ٣ن٢ + ٣ن + ٣ ، حيث ف(ن) المقاس بالأمتار ، ن الزمن بالثواني ، أثبت أن الجسيم يتوقف مرة واحدة دون أن يغير من اتجاه حركته .

- الحل: ع(ن) = ٣ن٢ - ٦ن + ٣

* عندما يتوقف الجسم تكون ع = صفر *

٣(ن - ١)٢ = ٠ ← ن = ١

∴ الجسم يتوقف مرة واحدة عندما ن = ١ .

ع + + + + + + + + + + +

١

* السرعة موجبة دائماً ∴ لا يغير حركته .

● متحرك جسم على خط مستقيم بحيث أن بعده ف عن نقطة الأصل بالأمتار بعد ن ثانية يساوي ف(ن) = جا٢ن ، فجد سرعة الجسم في اللحظة التي يغير منها تسارعه لأول مرة بعد تحركه .

- الحل: ع = ٤جا٣ن جتان

ت = ١٢جا٢ن جتا٢ن - ٤جا٤ن = ٠

٤جا٢ن (٣جتا٢ن - جا٢ن) = ٠

* ٣جتا٢ن - جا٢ن = ٠ ←

٣جتا٢ن - ١ + جتا٢ن = ٠

٤جتا٢ن - ١ = ٠ ← جتان = ± ١/٢

ن = π/٣ (أول مرة بعد تحركه)

ع(π/٣) = ٣√٣/٤

● ف = ن٣ - ٧ن٢ + ٩ن + ١ ، أوجد تسارع الجسيم عندما تكون

saad Bantanji
معلم الرياضيات
منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

● $ف(N) = \frac{1}{4}(N+2)^4 - 6N^2$ ، جد

نتائج الجسم عندما تكون ف

سرعته صفر م/ث .

(3 : 30)

- الحل : ع = $(N+2)^3 - 12N = 8 - 12N$

$N^3 + 6N^2 + 12N + 8 - 12N = 8$

$N^3 + 6N^2 = 0$ حيث

* عوامل الحد المطلق $N = 3$

نقسم على $N - 3$

$(N-3)(N^2 + 9N + 27) = 0$

$N = 3$ ← ليس لها حل حقيقي

$ن = 3(N+2)^2 - 12$

$ن(3) = 3(5)^2 = 12 = 75 - 12$

$= 63$ م/ث^2 .

● أسقط جسم من ارتفاع ١٠٠ متر عن سطح الأرض حيث أن مسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي: $ف_1(N) = 5N^2$ ، في نفس الوقت أطلق جسم من سطح الأرض للأعلى حيث أن مسافة التي يقطعها هي: $ف_2(N) = 50N - 5N^2$ جد سرعة كل من الجسمين عندما يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض .

- الحل : عندما يكون للجسمين الارتفاع

عن سطح الأرض : $100 - ف_1(N) = ف_2(N)$

$100 - 5N^2 = 50N - 5N^2 \leftarrow N = 2$

* سرعة الأول = $ف_1'(N) = 10N$

ع (2) = 20 م/ث .

* سرعة الثاني: $ف_2'(N) = 50 - 10N$

ع (2) = 50 - 20 = 30 م/ث .

★ تطبيقات الاشتقاق الضمني ★

● المعادلات المرتبطة بالزمن ●

تبين هذا المسائل من إحدى الكلمات التالية مثل معدل التغير في السرعة أو المساحة أو الحجم أو المسافة أو هلم جرا "....

طريقة حل هذه المسائل :

① نرسم شكلا" هندسياً يوضح فكرة السؤال بعد تكرار قراءة السؤال .

② نضع المعطيات من مقادير ثابتة لا تتغير عن الشكل الذي تم رسمه .

③ نضع المقادير المتغيرة من حجوم أو مساحات أو أطوال أو زوايا على نفس الشكل .

④ من خلال الشكل والقوانين نجد علاقة تربط المعلوم بالمطلوب .

subject: سهـــد الدين المستجير Date:

⑤ نشتق ضمنياً بالنسبة للزمن.

ملاحظة

① يجب الانتباه إلى أن هناك أرقام بالسؤال، لا تستخدم إلا بعد الاشتقاق وهذه الأرقام هي التي تأتي بعد إحدى الكلمات التي تدل على الزمن الآني أو اللحظي، مثل: (عندما، بعدها، في اللحظة، بعد مرور، الخ ...).

② يجب الانتباه إلى أنه الاشتقاق دائماً ضمنياً بدلالة الزمن.

أمثلة: تمسك ميس بيدها خيط طائرة تطير أفقياً على ارتفاع ٣٠ م من سطح الأرض، إذا كانت السرعة التي تسحب بها ميس خيط الطائرة ٤ م، أوجد السرعة الأفقية للطائرة عندما يكون طول الخيط المعتد لها يساوي ٥٠ م؟

ف² = س² + ص²

ف² = س² + ٩٠٠

س² = ف² − ٩٠٠

س = √(ف² − ٩٠٠)

$\frac{د س}{د ن} = \frac{٢ ف \frac{د ف}{د ن}}{٢ \sqrt{ف^٢ - ٩٠٠}}$

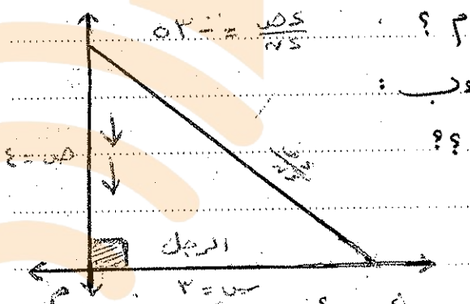
• السرعة الأفقية

• المطلوب: التغير في س، $\frac{د س}{د ن}$ ؟

$\frac{د س}{د ن} = \frac{٢ \times ٥٠ \times ٤}{٢ \sqrt{٥٠^٢ - ٩٠٠}} = \frac{٤٠٠}{٢ \sqrt{٢٥٠٠ - ٩٠٠}}$

$= \frac{٤٠٠}{٢ \sqrt{١٦٠٠}} = \frac{٤٠٠}{٨٠} = ٥$ م/د

* طريقان مستقيمان متعامدان في م يسير رجل على إحداهما مبتعداً عن م بسرعة ٤ كم/ساعة وتسير سيارة على الطريق الآخر بسرعة ٥٣ كم/ساعة مقتربة من م، ما معدل التغير في البعد بين الرجل والسيارة عندما تبعد السيارة والرجل ٤ كم، ٣ كم على الترتيب عن م؟



المطلوب: $\frac{د ف}{د ن}$ ؟؟

ف² = س² + ص²

ف = √(س² + ص²)

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ س \frac{د س}{د ن} + ٢ ص \frac{د ص}{د ن}}{٢ \sqrt{س^٢ + ص^٢}}$

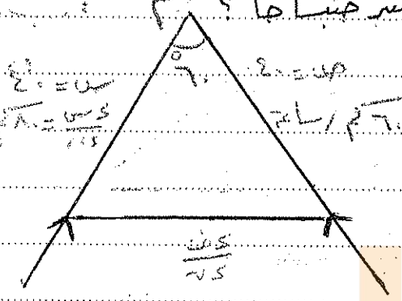
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢ \times ٤٠ + ٤ \times ٣ - ٥٣}{٢ \sqrt{(٤٠)^٢ + (٣)^٢}}$

$= \frac{٨٠ - ٢١٢}{٢ \sqrt{١٦٠٠ + ٩}} = \frac{-١٣٢}{٢ \sqrt{١٦٠٩}} = \frac{-١٣٢}{٢ \times ٤٠} = \frac{-١٣٢}{٨٠}$

= −١٫٦٥ كم/س

مصغرة
القلم
التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

• قطار حديدي يميل أحدهما على الآخر بزاوية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ و يلتقيان في النقطة م يسير القطار م على إحداهما بسرعة ٦٠ كم/ساعة مقتربا منه م في يسير القطار ب على الخط الآخر و بسرعة ٨٠ كم/ساعة، مقتربا منه م عند الساعة العاشرة صباحا، إذا كان القطاران ا م، ب م على بعد ١٠٠ كم و ١٤٠ كم على الترتيب من م، أوجد معدل اقتراب القطارين من بعضهما البعض عند الساعة الحادية عشر صباحا؟



* بدء الحركة الساعة ١٠ - المتغير في الساعة الساعة ١١ ، الزمن ساعة.
* المسافة التي قطعها ص = السرعة × الزمن
= ٦٠ × ١ = ٦٠
* المسافة بين م و ص الساعة ١١ -
= ٦٠ - ١٠٠ = ٤٠
* المسافة التي قطعها س = السرعة × الزمن
= ٨٠ × ١ = ٨٠
* المسافة بين م، س = ١٢٠ - ٨٠ = ٤٠
ضلعين معلومين وزاوية باستخدام قانون شبيهة فيثاغورس.
ف٢ = س٢ + ص٢ - ٢ س ص جتا لزاوية المحصورة بينهما.

$ف^2 = س^2 + ص^2 - 2 \times س \times ص \times جتا \frac{\pi}{3}$

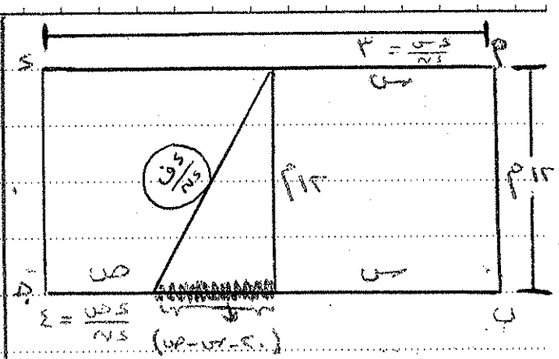
$ف = \sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}$

$\frac{ف}{ن ز} = \frac{2 س \frac{س}{ن ز} + 2 ص \frac{ص}{ن ز} - (س \times \frac{ص}{ن ز} + ص \times \frac{س}{ن ز})}{2\sqrt{س^2 + ص^2 - س ص}}$

$\frac{ف}{ن ز} = \frac{2 \times ٨٠ \times ٤٠ + 2 \times ٦٠ \times ٤٠ - (٦٠ \times ٤٠ + ٨٠ \times ٤٠)}{2\sqrt{(٤٠)^2 + (٤٠)^2 - ٤٠ \times ٤٠}}$

= ٥٠ كم/ساعة.

• ملعب على شكل مستطيل، انظر الشكل :-
تدحرجت كرة من م باتجاه د وبسرعة ٣ م/ث. وفي نفس اللحظة بدأت كرة أخرى بالحركة من ج إلى ب وبسرعة ٤ م/ث.
- ما معدل التغير في البعد بين الكرتين بعد مرور ثانيتين على بدء الحركة؟



س = السرعة × الزمن

س = ٣ × ٢ = ٦

ص = السرعة × الزمن

= ٤ × ٢ = ٨

$ف^{٢} = (١٢)^{٢} + (٢٠ - س - ص)^{٢}$

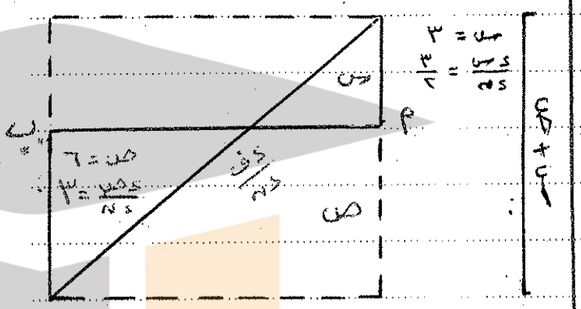
$ف = \sqrt{١٤٤ + (٢٠ - س - ص)^{٢}}$

$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(٢٠ - س - ص)(-\frac{د س}{د ن} - \frac{د ص}{د ن})}{٢\sqrt{١٤٤ + (٢٠ - س - ص)^{٢}}}$

$= \frac{(٢٠ - ٦ - ٨)(-٣ - ٤)}{\sqrt{١٤٤ + (٢٠ - ٦ - ٨)^{٢}}}$

$= \frac{٦ \times -٧}{\sqrt{١٤٤ + ٣٦}} \approx -٣٫٢$ م/ث .

* سفينتان م إلى الشرق من ب و البعد بينهما ١٢ كم ، أبحر م شمالاً بسرعة ٣ كم/ساعة وفي نفس اللحظة أبحرت ب جنوباً بسرعة ٣ كم/ساعة ، أوجد معدل التغير في البعد بين السفينتين بعد مرور ساعتين على الإبحار ؟



س = $\frac{٣}{٢} \times ٢ = ٣$ كم .

ص = ٣ × ٢ = ٦ كم .

$ف^{٢} = (١٢)^{٢} + (س + ص)^{٢}$.

$ف = \sqrt{١٤٤ + (س + ص)^{٢}}$

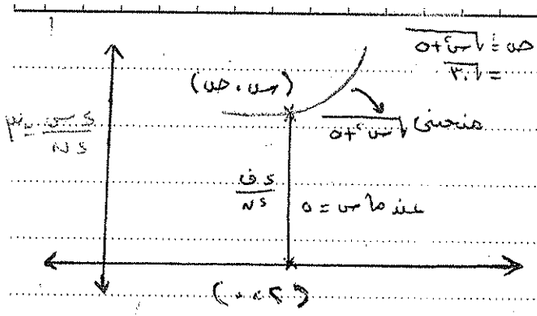
$\frac{د ف}{د ن} = \frac{٢(س + ص)(\frac{د س}{د ن} + \frac{د ص}{د ن})}{٢\sqrt{١٤٤ + (س + ص)^{٢}}}$

$= \frac{(٣ + ٦)(\frac{٣}{٢} + ٣)}{\sqrt{١٤٤ + (٦ + ٣)^{٢}}}$

≈ ٢ كم/ساعة .

* الشكل المجاور يمثل مكعب خشبي، طول ضلعه ٢٠ سم ، انطلقت عليه نملتان في نفس اللحظة الأولى من الرأس م و على الحرف م ك باتجاه الرأس ك و بسرعة ٤ م/ث و الثانية من الرأس هـ و على الحرف هـ و باتجاه الرأس ك بسرعة ٣ م/ث ، أوجد معدل ابتعاد النملتين عن بعضهما البعض مع مرور ٤ ثوان على بدء الحركة ؟

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION



* الطول : المسافة بين النقطتين .

ف = √ (فرق الصادات)² + (فرق السينات)²

ف = √ (ص - ١)² + (س - ٢)²

ف = √ (٥ + س² - ١)² + (س - ٢)²

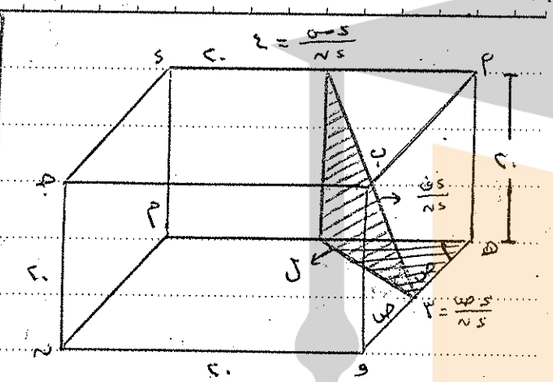
ف = √ س⁴ + ٥ + س² - ٤ س + ٤

ف = √ ٢ س² - ٤ س + ٩

ك ف / ن ث = (٤ س ك س / ن ث - ٤) / (٢ √ ٢ س² - ٤ س + ٩)

= (٤ × ٥ × ٢ - ٤ × ٣) / (٢ √ ٢ × (٥)² - ٤ × ٥ + ٩) = ٢٤ سم / ث .

● بدأت النقطتان ب ، جـ الحركة معاً من نقطة الأصل م بحيث تتحرك النقطة ب على محور السينات الموجب بسرعة ٤ وحدات / ث . وتتحرك النقطة جـ في الربع الأول على منحنى الإقتران ص = س² بحيث يبقى دائماً طول م جـ = طول ب جـ ، أوجد معدل التغير في مساحة المثلث م ب جـ بعد ٢ ثانية من الحركة ؟



المساحة = الوتر × الزمن

س = ٤ × ٤ = ١٦

ص = ٣ × ٤ = ١٢

من المثلث الصغير على الأرض فيا ن :-

ل² = س² + ص² ⇐ ف² = (٢٠)² + ل²

⇐ ف² = (٢٠)² + (س + ص)² ⇐

ف = √ ٤٠٠ + ٢ س² + ٢ ص س + ص²

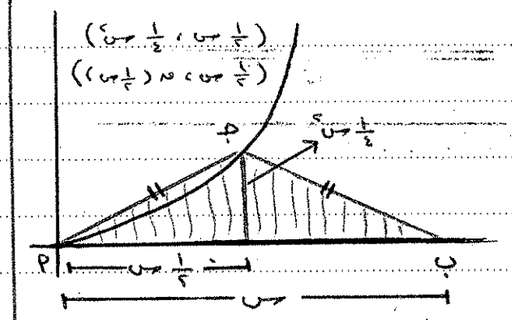
ك ف / ن ث = (٢ س ك س / ن ث + ٢ ص ك ص / ن ث) / (٢ √ ٤٠٠ + ٢ س² + ص²)

= (٣ × ٤ + ٤ × ١٢) / (٢ √ ٤٠٠ + ١٤٤ + ٨١)

ك ف / ن ث = ٩٨ ، ١ سم / ث .

● تتحرك نقطة مادية على منحنى الاقتران ، ف (س) = √ ٤ س + ٥ ، حيث يزداد الإحداثي السيني لها بمعدل ٣ سم / ث . أوجد معدل تغير البعد بينها وبين النقطة (٢ ، ٠) عندما س = ٥ ؟

NOTE BOOK
منصة التفاضل AL-TAFADDUL EDUCATION



$هـ(س) = س^2 \Leftarrow هـ(\frac{1}{2}س) = (\frac{1}{2}س)^2 = \frac{1}{4}س^2$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

$= \frac{1}{2} \times س \times ص$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}س \times \frac{1}{4}س^2$

$\therefore م = \frac{1}{8}س^3$

$م = \frac{1}{8}س^3$ ، $س = 4 \times 2 = 8$ ، $ص = س^2$

$\frac{د م}{د ن} = \frac{3}{8}س^2 \times \frac{د س}{د ن}$

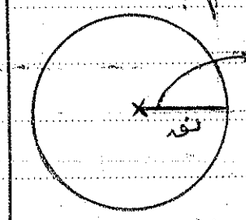
$= 4 \times 8 \times 8 \times \frac{3}{8}$

$= 96$ وحدة مربعة

$ص = \frac{1}{4}س^2$

$ص|_{س=\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}س^2$

● قرص دائري يتمدد بالحرارة فتزداد مساحته بمقدار ٨ سم² / دقيقة ، أوجد معدل التغير في محيط القرص عندما يكون نق = ٤ سم ؟



نق = ٤

$\frac{د م}{د ن} = ٨ سم^2$

محيط القرص = 2π نق

$ط = 2\pi$ نق ⇐

$\frac{د ط}{د ن} = 2\pi \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د م}{د ن} = 2\pi$ نق $\frac{د نق}{د ن}$

$٨ = 2\pi \times ٤ \frac{د نق}{د ن}$

$٨ = ٨\pi \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{1}{\pi} = \frac{٨}{٨\pi} = \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{د ط}{د ن} = 2\pi \times \frac{1}{\pi}$

$\therefore \frac{د ط}{د ن} = 2$ سم/د

$\frac{د ط}{د ن} = 2\pi \frac{د نق}{د ن}$

$2 = 2\pi \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{1}{\pi} = \frac{د نق}{د ن}$

$م = \pi$ نق^2 ⇐

$\frac{د م}{د ن} = 2\pi$ نق $\frac{د نق}{د ن}$

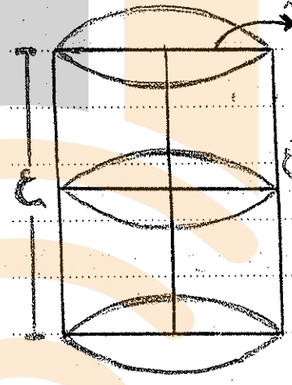
$٨ = 2\pi \times ٤ \frac{د نق}{د ن}$

$٨ = ٨\pi \frac{د نق}{د ن}$

$\frac{1}{\pi} = \frac{٨}{٨\pi} = \frac{د نق}{د ن}$

● خزان ماء أسطواني الشكل قطر قاعدته ٣٠ م يخرج منه الماء في الخزان ؟

* المطلوب : $\frac{د ع}{د ن}$ للماء .



$\frac{د ع}{د ن} = ؟$

ع = مساحة القاعدة × الارتفاع

ع = نق$^2 \pi$ ع

ع = π (١٥)^2 ع

ع = π ٢٢٥ ع

$\frac{د ع}{د ن} = \pi ٢٢٥ \frac{د ع}{د ن}$

$٢ = \pi ٢٢٥ \frac{د ع}{د ن}$

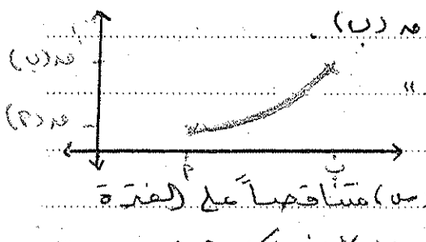
$\frac{٢}{\pi ٢٢٥} = \frac{د ع}{د ن}$

● مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ارتفاعه ١٢ م وطول قطر قاعدته ١٢ م ينسكب فيها الماء بمعدل ٨ م^3 / ساعة ، فما معدل ارتفاع سطح الماء فيه عندما يكون ارتفاع الماء ٣ م ؟

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

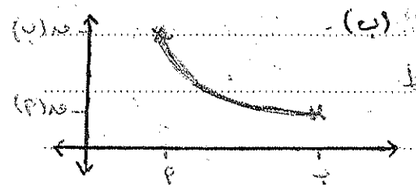
التزايد والتناقص ◎ النقط الحرجة ◎ القيم القصوى

* نقول عن س بأنها حرجة إذا كانت
  هـ (س) ← صفر
  ← غير موجودة.
* يكون هـ (س) متزايداً على الفترة [أ، ب]، إذا كان لكل أ < ب
  هـ (أ) < هـ (ب).



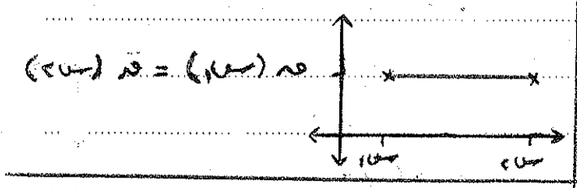
«دائماً متزايد»

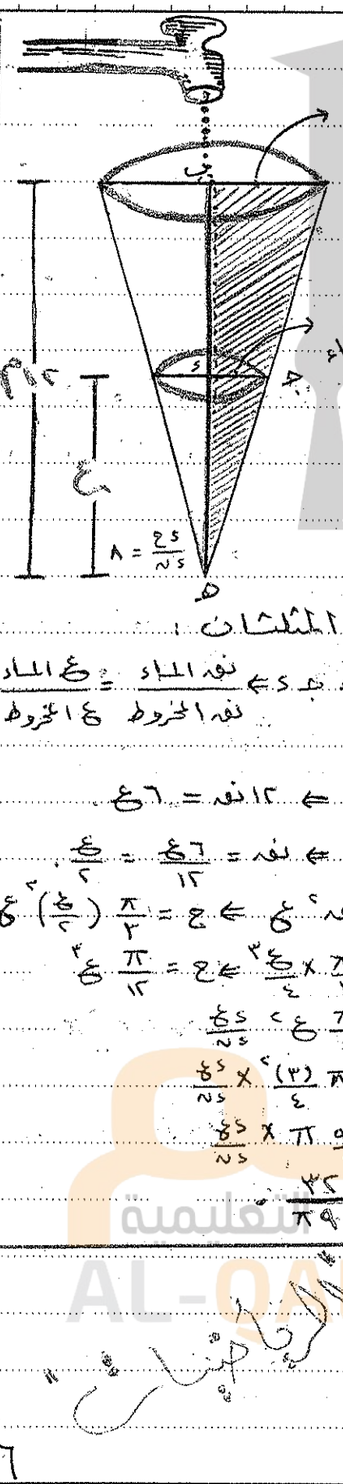
* يكون هـ (س) متناقصاً على الفترة [أ، ب]، إذا كان لكل أ < ب
  هـ (أ) > هـ (ب).



«دائماً متناقص»

◎ يكون هـ (س) ثابتاً على [أ، ب]، إذا كان لكل س١ ≠ س٢، هـ (س١) = هـ (س٢)





من تشابه المثلثان:

$\frac{\text{نق الماء}}{\text{نق الحروط}} = \frac{\text{ع الماء}}{\text{ع الحروط}} \leftarrow$ أ ب = هـ ب ع ص

$\frac{\text{نق}}{٦} = \frac{\text{ع}}{١٢} \leftarrow$ ١٢ نق = ٦ ع

$\text{نق} = \frac{٦\text{ع}}{١٢} = \frac{\text{ع}}{٢}$ ←

ح = $\frac{\pi}{٣}$ نق^{٢} ع ← ح = $\frac{\pi}{٣}(\frac{\text{ع}}{٢})^{٢}$ ع

ح = $\frac{\pi}{٣} \times \frac{\text{ع}^{٣}}{٤}$ ← ح = $\frac{\pi}{١٢}$ ع^{٣}

$\frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ن}^{٣}} < \text{ع} \frac{\pi}{٤} = \frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ن}^{٣}}$ ←

$\frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ن}^{٣}} \times \frac{(٣)^{٢}}{٤} \pi = ٨$ ←

$\frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ن}^{٣}} \times \pi \frac{٩}{٤} = ٨$ ←

∴ $\frac{\text{ع}^{٣}}{\text{ن}^{٣}} = \frac{٣٢}{٩\pi}$

القيم القصوى

- العظمى ← هي الأعظم أو تساوي جوارها
- الصغرى ← هي الأصغر أو تساوي جوارها

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

التفاضل والتكامل

- العظمى المطلقة ← هي الأعظم على الإطلاق.
- الصغرى المطلقة ← هي الأصغر على الإطلاق.

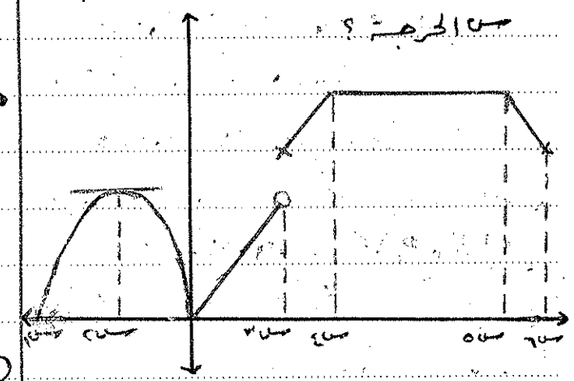
ملاحظة: كيف نحدد قيم س الحرجة ؟

* س حرجة بشرط

مجـ (س) = ٠ ، مجـ (س) غير موجودة

① يكون بسط مجـ س ② أطراف فترة
أقصى عندما مجـ تقاطع. ④ نقاط عدم اتصال
③ الثابت كـ = ⑤ رؤوس مدببة
قيم حرجة

● مثال: من الشكل المجاور حدد قيم س الحرجة ؟



(س الحرجة):

* مـ (س) = صفر :
١) عما س أقصى، س = ٢ ، صفر
٢) الثابت كـ = [٤ ، ٥]
* مـ (س) غير موجودة (نخ . م)
) أطراف فترة ١ ، ٦
٢) نقاط عدم اتصال

٣) رؤوس مدببة ٤ ، ٥

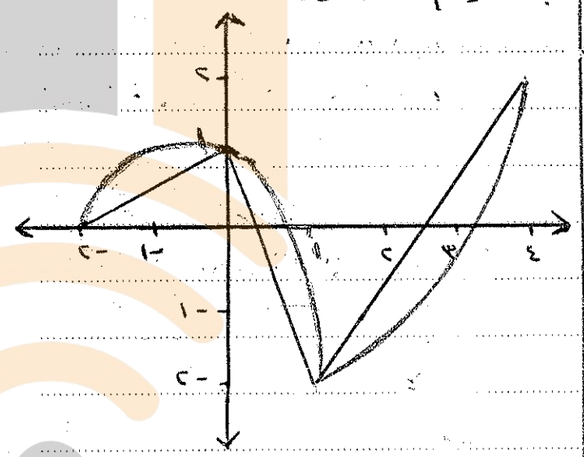
∴ س الحرجة = { ١ ، ٢ ، ٠ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }

* الشكل المرسوم جانباً يمثل منحنى مـ (س) المعرف [-٢ ، ٤] ، أوجد مايلي :

أ) قيم س الحرجة.

ب) فترات التزايد & التناقص.

ج) القيم القصوى



① قيم س الحرجة :-
{ -٢ ، -١ ، ١ ، ٤ }

② فترات التزايد [-٢ ، -١] ، [١ ، ٤]
فترات التناقص [-١ ، ١]

③ القيم القصوى :-
عند س = (-٢ ← مـ (-٢)) = صغرى محلية
« صغرى محلية »

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: النهاية في الرياضيات Date:

* عند س = (-١ ← هـ(-١) = ١
" عظمى محلية "
* عند س = (١ ← هـ (١) = -٢
" صغرى مطلقة "
* عند س = (٤ ← هـ(٤) = ٢
" عظمى مطلقة "

ماذا نستفيد من المشتقة الأولى ؟

تحديد فترات التزايد والتناقص و القيم القصوى وقيم س الحرجة .

* كيف ذلك ؟

① : نجد هـ (س) .
② : نضع على خط الأعداد

- أصفار بسط
- أصفار مقام
- أطراف المجال أو الفترة .

أصفار المشتقة

③ نحدد إشارة هـ (س) بالتعويض في هـ (س) ← نكن على مجال هـ .
④ إذا كان لدينا التعويض :

هـ (س) > ٠	هـ (س) < ٠	هـ (س) = ٠
(موجب)	(سالب)	(هـ (س) ثابت)
الاقتران متزايد	الاقتران متناقص	

* ملاحظات :

① ← في الاقتران الكسري ، وحدة نستثني أصفار المقام من كل شيء ولكن نضعها على خط الأعداد ونضع عنده حلقة .
② ← في الاقتران المتشعب نبحث الاتصال عند التحول فقط .
٣- إذا كان متصل ، نكمل الحل عادي ؟
ب- إذا كان غير متصل ، نرسم حلقة حسب الاقتران الأصلي .
③ ← في الاقتران أكبر عدد صحيح نعتمد على رسم الاقتران الأصلي ، وليس على إشارة هـ (س) .
④ ← في الجذور الزوجية نحدد مجالها لأنه لا يجوز أن يكون سالب تحت الجذر .
⑤ ← في الاقتران الثابت كله عظمى ، كله صغرى ، كله حرجة .
⑥ ← في الاقتران أكبر عدد صحيح وحدة المعرف على الفترة [أ ، ب] ، تكون قيم س الحرجة تساوي كل الفترة [أ ، ب] .

القسم الرياضي

NOTE BOOK
منصة القلم AL-QALAM EDUCATION

subject: سعد الدين البستنجي Date:

★ بالنسبة لمجال ه ★

يكون السؤال لدينا ه — إذا لم يحدد السؤال يكون ع = (-∞، ∞) ما عدا الفترات التي

- الجذور الزوجية
- الاقترانات الكسرية

تحدد هم نحنه

★ بالنسبة للمنحنى نضع على خط الأعداد ★

أطراف مفتوحة — نقاط التحول بشرط ه(س) — جذور قواعد ه(س)

صفر ، غ.م

★ مثال: إذا كان ه(س) = ٢ س^٣ - ٣ س^٢

معرفاً على الفترة [-٢، ٥]، أوجد ما يلي:

① قيم س الحرجة للاقتران.

② فترات التزايد والتناقص.

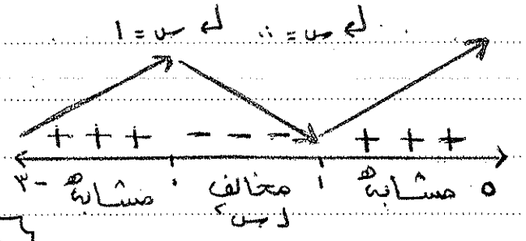
③ القيم القصوى، مبيناً نوعها وحدد المطلقة.

ه(س) = ٦ س^٢ - ٦ س

٦ س^٢ - ٦ س = ٠ ⇐

٦ س (س - ١) = ٠

⇐ س = ٠ ، س = ١



★ س الحرجة {-٣، ٠، ١، ٥}.

★ فترات التزايد [-٣، ٠]، [١، ٥].

★ فترات التناقص [٠، ١].

★ القيم القصوى:

عند س = -٣ ← (-٣، ه(-٣))

عند س = ٠ ← (٠، ه(٠)).

عند س = ١ ← (١، ه(١))

عند س = ٥ ← (٥، ه(٥))

ه(-٣) = -٨١ ← صغرى مطلقة.

ه(٠) = ٠ ← عظمى محلية.

ه(١) = -١ ← صغرى محلية.

ه(٥) = ١٧٥ ← عظمى مطلقة.

★ ملاحظة: عندما يتحول الإقتران من متزايد إلى متناقص فإنه يوجد قيمة عظمى.

عندما يتحول الإقتران من متناقص إلى متزايد فإنه يوجد قيمة صغرى.

(كل جبل (قمة) قيمة عظمى)

(كل جورة (قاع) قيمة صغرى)

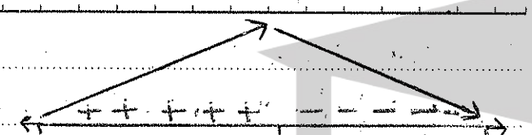
★ مثال: إذا كان ه(س) = جا س

معرفاً على الفترة [٠، π]، أوجد:

① القيم الحرجة، ② فترات التزايد والتناقص،

③ القيم القصوى؟

NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION



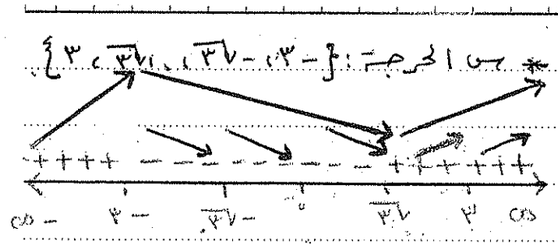
∵ $f'(س) = جتا س \Leftarrow جتا س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$

* س الحرجة : $\{0 ، \frac{\pi}{2} ، \pi\}$

* المتزايد $[0 ، \frac{\pi}{2}]$ * المتناقص $[\frac{\pi}{2} ، \pi]$

* القيم القصوى :

- عند $س = 0$ ∴ صغرى مطلقة
- عند $س = \frac{\pi}{2}$ عظمى مطلقة
- عند $س = \pi$ صغرى مطلقة .



* س الحرجة : $\{-3 ، -\sqrt{3} ، \sqrt{3} ، 3\}$

* المتزايد $(-\infty ، -3] ، [\sqrt{3} ، \infty)$

* المتناقص $[-3 ، \sqrt{3}]$

* القيم القصوى :

عند $س = -3$ عظمى محلية

عند $س = \sqrt{3}$ صغرى مطلقة

● إذا كان $ه(س) = \sqrt[3]{س^3 - 9س}$ ، أوجد :-

① القيم الحرجة ، ② المتزايد والمتناقص ، ③ القيم القصوى .

لم يحدد السؤال فترة ← ح .

$ه(س) = (س^3 - 9س)^{\frac{1}{3}} \Leftarrow$

$ه'(س) = \frac{1}{3}(س^3 - 9س)^{-\frac{2}{3}}(3س^2 - 9)$

$ه'(س) = \frac{3س^2 - 9}{3(س^3 - 9س)^{\frac{2}{3}}}$

أصفار البسط $= 3س^2 - 9 = 0 \therefore \Leftarrow$

$س^2 = 3 \Leftarrow س = \pm\sqrt{3}$.

أصفار المقام $= س^3 - 9س = 0 \therefore \Leftarrow$

$س(س^2 - 9) = 0 \therefore \Leftarrow س = 0 ، س = \pm 3$

الأصفار هي : $\{-3 ، -\sqrt{3} ، 0 ، \sqrt{3} ، 3\}$.

● $ه(س) = \frac{ج}{س - 1} ، س \neq 1$ ، أوجد :

① مجالات التزايد والتناقص ، ② القيم الحرجة ، ③ القيم القصوى .

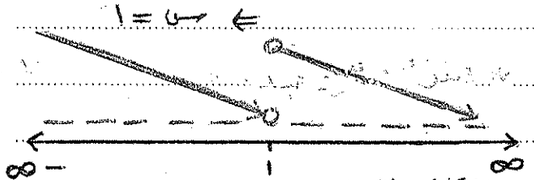
$ه(س)$ غير معرف عند $س = 1$.

$ه'(س) = \frac{-ج}{(س-1)^2}$

أصفار البسط : لا يوجد .

أصفار المقام : $س - 1 = 0 \therefore$

$س = 1 \Leftarrow$



* المتزايد لا يوجد .

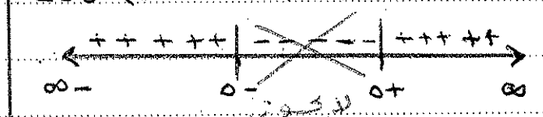
* المتناقص $(-\infty ، 1) ، (1 ، \infty)$

* قيم حرجة ، قيم قصوى (لا يوجد) .

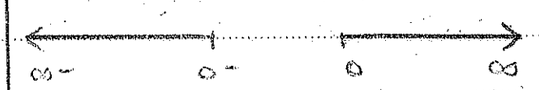
● إذا كان $هـ(س) = \sqrt{س^2 - ٢٥}$ ، أوجد :
مجالات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

* هنا جذر تربيعي يجب أن نحدد المجال قبل البدء بالحل.

$س^2 - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س^2 = ٢٥ \Leftarrow س = \pm ٥$



إذن مجال الاقتران هو :

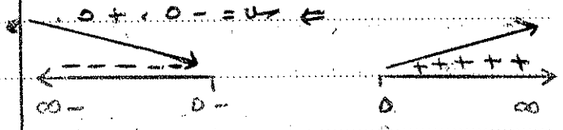


$هـ'(س) = \frac{٢س}{٢\sqrt{س^2 - ٢٥}}$

$\Leftarrow$ أصفار البسط $٢س = ٠ \Leftarrow س = ٠$

أصفار المقام $س^2 - ٢٥ = ٠ \Leftarrow س^2 = ٢٥$

$\Leftarrow س = -٥ ، +٥$



* س الحرجة $(-٥ ، ٥)$

* التزايد $(٥ ، \infty)$

* التناقص $(-\infty ، -٥)$

* القيم القصوى :

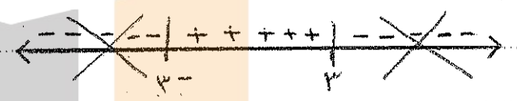
عند $س = -٥ \Leftarrow هـ(-٥) =$ صغرى مطلقة.

عند $س = ٥ \Leftarrow هـ(٥) =$ صغرى مطلقة.

● إذا كان $هـ(س) = \sqrt{٩ - س^2}$ ،
$س \geq ٣$ ، أوجد :
مجالات التزايد والتناقص والقيم الحرجة
والقيم القصوى.

* الجذر تربيعي لازم أحدد المجال

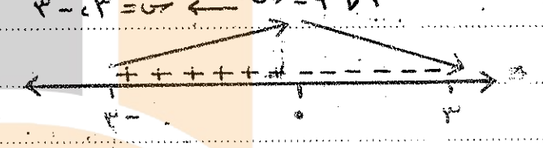
$\Leftarrow ٩ - س^2 = ٠ \Leftarrow ٩ = س^2 \Leftarrow س = \pm ٣$



مجال هـ $[-٣ ، ٣]$

$هـ'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٩ - س^2}} \longrightarrow س = ٠ \therefore$

$\sqrt{٩ - س^2} \longrightarrow س = ٣ ، -٣$



* س الحرجة $س = -٣ ، ٠ ، ٣$.

* التزايد $[-٣ ، ٠]$ ، التناقص $[٠ ، ٣]$

* القيم القصوى :

$س = -٣ \Leftarrow هـ(-٣) =$ صغرى مطلقة.

$س = ٠ \Leftarrow هـ(٠) = ٣$ عظمى مطلقة.

$س = ٣ \Leftarrow هـ(٣) =$ صغرى مطلقة.

● إذا كان $هـ(س) = |س - ١٢| + |س + ١١|$
معرفاً على ح. * أوجد قيم س الحرجة
والفترات للتزايد والتناقص والقيم
القصوى.

$س - ١٢ = ٠ \Leftarrow س = ١٢$

$س + ١١ = ٠ \Leftarrow س = -١١$

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

$س - ٢$ ، $٢ - س$

$س + ١$ ، $- س - ١$

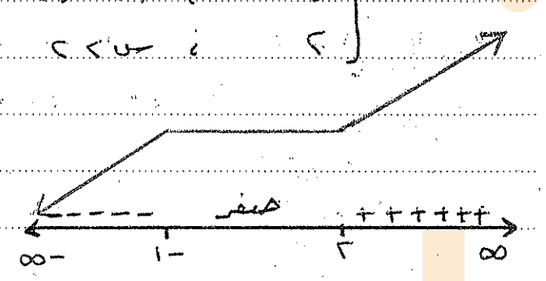
$٢س - ١$ ، $٤ - ٢س$ ، $١-$ ، $١-$ ، ٢

$$ه(س) = \begin{cases} ١ - ٢س & ، س \leq -١ \\ ٣ & ، -١ \leq س \leq ٢ \\ ٢س - ١ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$

* هنا متشعب بحث الاتصال عند نقاط التحول :-

عند $س = -١$ متصل ، عند $س = ٢$ متصل } في البعدين لازم بحث في الاتصال.

$$ه(س) = \begin{cases} -٢ & ، س \leq -١ \\ ٠ & ، -١ < س < ٢ \\ ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$$



* س الحرجة $[-١، ٣]$

* المتزايد $[٢، \infty)$ ، المتناقص $(-\infty، -١]$

* القيم القصوى :

عند $س = -١ \leftarrow$ صغرى محلية ،

عند $س = ٢ \leftarrow$ عظمى محلية .

$[-١، ٢]$ = عظمى محلية

● إذا كان $ه(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س & ، س \neq ٢ \\ ٣ & ، س = ٢ \end{cases}$ ، $د س \neq ٢$

أوجد قيم س الحرجة وفترات التزايد والتناقص والقيم القصوى.

* الاقتران متشعب لازم ابحث الاتصال عند نقاط التشعب.

$س = ٢$ ، غير متصل لأنه :

نهـ $ه(س)$ = نهـ $ه(س)$

$$\text{نهـ}_{س \to ٢^-} = \text{نهـ}_{س \to ٢^+}$$

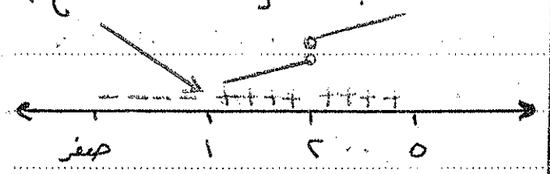
$$ه(س) = \begin{cases} ٢س - ٢ & ، س < ٢ \\ ٣س^٢ & ، س > ٢ \\ خ.م & ، س = ٢ \end{cases}$$

$٣س^٢ = ٢$ ، $س = ٠، ٢، ٥$

لا تنسَ أصفار قواعد الاقتران

$٢س - ٢ = ٠ \leftarrow ٢س = ٢ \leftarrow س = ١$

س الحرجة = $\{٠، ١، ٢، ٥\}$



* التزايد $[١، ٢) ، (٢، ٥]$

* التناقص $[٠، ١]$

* القيم القصوى :

عند $س = ٠ \leftarrow ه(٠) = ٠ \leftarrow$ عظمى محلية .

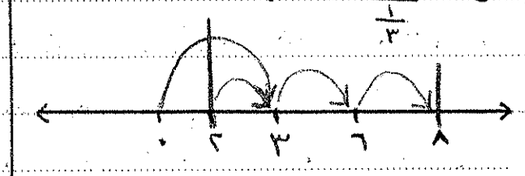
عند $س = ١ \leftarrow ه(١) = -١ \leftarrow$ صغرى مطلقة .

عند $س = ٢ \leftarrow ه(٢) = ٠ \leftarrow$ عظمى محلية .

عند $س = ٥ \leftarrow ه(٥) = ١ \leftarrow$ عظمى مطلقة .

● إذا كان $f(س) = [\frac{1}{3} س + 2]$
معرّف على الفترة $[2، 8]$.
أوجد القيم القصوى مبيناً نوعها.
ثم أوجد $\int_{2}^{8} f(س)\,د س$ الحرجة :

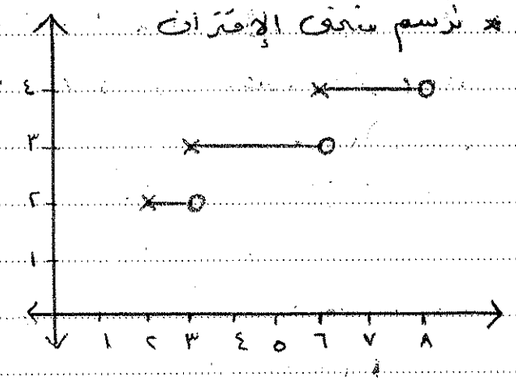
$ل = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.



$$* f(س) = \begin{cases} 2 & ، 2 \leq س < 3 \\ 3 & ، 3 \leq س < 6 \\ 4 & ، 6 \leq س \leq 8 \end{cases}$$

* قلنا أنه في الاقتران الصحيح نعتمد على رسم الاقتران لأجل حساب النقاط

* نرسم منحنى الاقتران



*القيم القصوى:
$[2، 3]$ صغرى = 2 مطلقة.
$[3، 6]$ صغرى = 3 محلية.
$[6، 8]$ صغرى = 4 محلية.
$[2، 3]$ عظمى = 2 محلية.
$[3، 6]$ عظمى = 3 محلية.
$[6، 8]$ عظمى = 4 مطلقة.

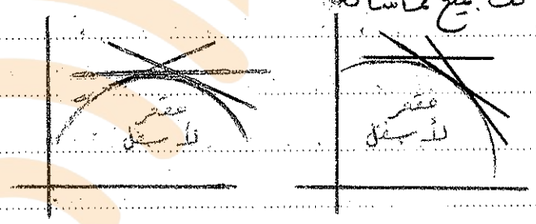
* اشارة المشتقة الثانية *

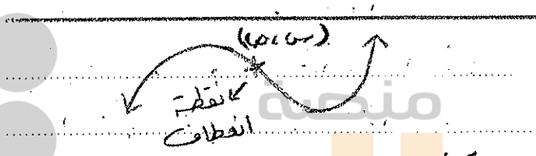
* التقعر لأعلى، ولأسفل *

* نقاط وزوايا الانعطاف *

☆ يكون $f(س)$ مقعراً لأعلى إذا كان واقعاً فوق جميع مماساته

☆ يكون $f(س)$ مقعراً لأسفل إذا كان واقعاً تحت جميع مماساته

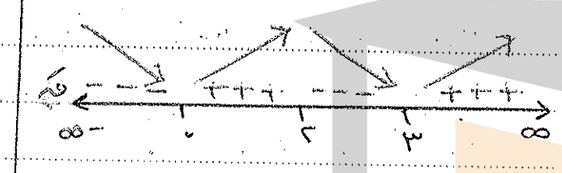




* تسمّى $س_1$ نقطة انعطاف إذا حققت ما يأتي:
(أ) أن يكون $f(س)$ متصل عند $س_1$
(ب) أن يغيّر الاقتران f تقعره حول $س_1$

* نقطة الانعطاف الأفقي: هي النقطة التي يكون عندها $f(س) = 0$ ، يقطع المماس عندها يوازي محور السينات.

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

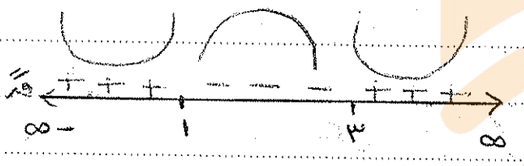


- فترات التزايد: $[0, 2]$ ، $[3, \infty)$
- فترات التناقص: $(-\infty, 0)$ ، $[2, 3]$
- القيم القصوى:

عند $س = 0$ ← صغرى محلية.

عند $س = 2$ ← عظمى محلية.

عند $س = 3$ ← صغرى محلية.



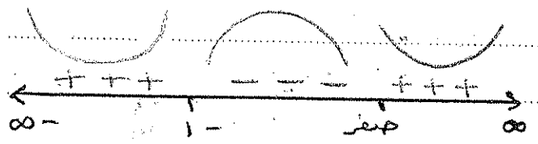
- تقعر لأعلى: $(-\infty, 1]$ ، $[3, \infty)$
- تقعر لأسفل: $[1, 3]$
- نقط الانعطاف: $(1, قـ(1))$ ، $(3, قـ(3))$
- زوايا الانعطاف: $ظا_1 = قـ'(1)$

$ظا_2 = قـ'(3)$

- أصفار البسط: $2س^3 + 2 = 0 \Leftarrow$

$2س^3 = -2 \Leftarrow س^3 = \frac{-2}{2} = -1 \Leftarrow س = -1$

- أصفار المقام: $س^3 = 0 \Leftarrow$ ∴ $س \neq 0$



- فترات التقعر لأعلى: $(-\infty, -1]$ ، $[0, \infty)$.
- فترات التقعر لأسفل: $[-1, 0]$.
- نقط الانعطاف: $(-1, قـ(-1))$ ، $(0, قـ(1))$.
- زوايا الانعطاف: $ظا_1 = قـ'(0)$

$ظا_2 = قـ'(-1)$.

⊛ أوجد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لـ

$قـ(س) = س^2 + \frac{1}{س}$ ، $س \neq 0$ ؟

$قـ(س) = س^2 + \frac{1}{س}$ ، $س \neq 0$

$قـ'(س) = 2س - \frac{1}{س^2}$

$قـ''(س) = 2 + \frac{2 \times 1}{س^3} \Leftarrow$

$قـ''(س) = \frac{2س^3 + 2}{س^3} = \frac{2}{س^3} + 2$

⊛ إيجاد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الثانية ⊛

** تستخدم هذه الطريقة عندما يطلبها السؤال فقط يطلبها تحديداً **

* خطوات الحل:

① نجد المشتقة الأولى وأصفارها.

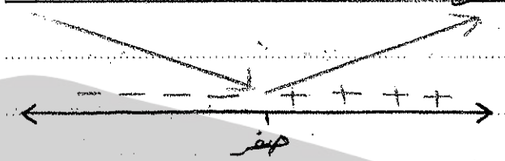
② نجد المشتقة الثانية.

③ نفحص أصفار المشتقة الأولى في المشتقة الثانية (بتعويض أصفار الأولى في الثانية).

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

subject: (كريا حسناء) Date:

* إذا كان ناتج التعويض :
(P) $م''(س) > 0$ ، (+) صغرى
(ب) $م''(س) < 0$ ، (-) قيمة عظمى
(ج) $م''(س) = 0$ ، صفر يفشل الاختبار ويعود للاختبار المشتقة الأولى.



يوجد قيمة صغرى عند $س = 0$.

* ملاحظة * النقط الحرجة الأخرى غير أصفار المشتقة الأولى.
لا تفحص إلا عن طريق المشتقة الأولى.

● إذا كان $م(س) = \begin{cases} س^2 - 4 ، س \geq 3 \\ 8 - س ، س < 3 \end{cases}$

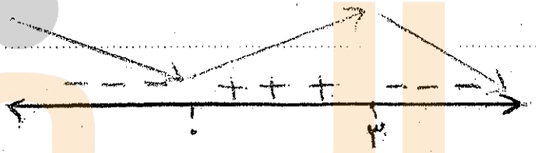
* نبحث الاتصال عند $س = 3 \leftarrow$ متصل عند 3.

$م'(س) = \begin{cases} 2س ، س > 3 \\ 6 ، س < 3 \\ غ.م ، س = 3 \end{cases}$

$2س = 0 \leftarrow س = 0$ ، $س = 3$ لا $\in$ م' (س)
غير موجودة.

$م''(س) = \begin{cases} 2 ، س > 3 \\ 0 ، س < 3 \\ غ.م ، س = 3 \end{cases}$

عند $س = 0 \leftarrow م''(0) = 2$ موجبة صغرى
أما عند $س = 3 \leftarrow$ لأنه م' (س) غير موجودة
تفحص فقط عند طريقة م' (س)



توجد قيمة عظمى عند $س = 3$.

● استخدم المشتقة الثانية في إيجاد القيم القصوى، مع تحديد نوعها:
$م(س) = س^3 - 3س^2 + 5 \leftarrow$
$م'(س) = 3س^2 - 6س \leftarrow$
$3س^2 - 6س = 0 \leftarrow 3س(س - 2) = 0$
$\leftarrow س = 0$ ، $س = 2 \leftarrow$
$م''(س) = 6س - 6 \leftarrow$
$م''(0) = 6 \times 0 - 6 = -6$ سالبة قيمة عظمى
$م''(2) = 6 \times 2 - 6 = +6$ موجبة قيمة صغرى

● أوجد القيم القصوى باستخدام المشتقة الثانية للاقتران $م(س) = س^4$؟
$م'(س) = 4س^3 \leftarrow 4س^3 = 0 \leftarrow س = 0$
$م''(س) = 12س^2 \leftarrow م''(0) = 12(0)^2 = 0$
يفشل الإختبار ويعود لاختبار المشتقة الأولى.

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات Date:

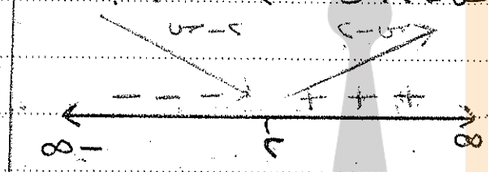
● إذا كان $م(س) = |٣س - ١٢|$

$= |س + ١١| + س$

أوجد القيم القصوى باختبار المشتقة الثانية:

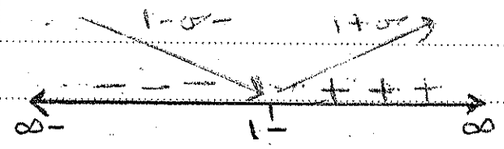
نبدأ بإعادة التعريف.

$|س - ٢| = 0 \Leftarrow س = ٢$



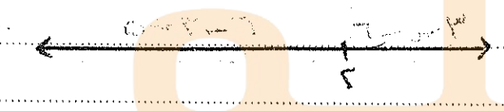
$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$

$|س + ١١| = 0 \Leftarrow س = -١$



$م(س) = \begin{cases} س + ١١ & ، س \geq -١ \\ -س - ١ & ، س < -١ \end{cases}$

$٣|س - ٤|$



$م(س) = \begin{cases} ٥ - ٥س & ، س \leq -١ \\ ٧ - س & ، -١ \leq س < ٢ \\ ٥س - ٥ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

نبحث الإتصال عند $س = -١ ، ٢$ لأنها نقاط تحول

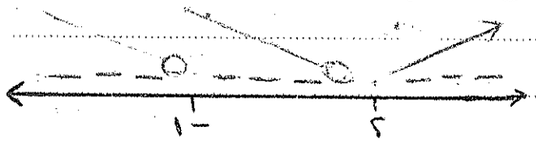
عند $س = -١$ غير متصل.

عند $س = ٢$ متصل.

$م'(س) = \begin{cases} -٥ & ، س < -١ \\ -١ & ، -١ < س < ٢ \\ ٥ & ، س > ٢ \\ \text{غ.م} & ، س = ٢ ، -١ \end{cases}$

$م''(س) = \begin{cases} \text{صفر} & ، س < -١ \\ \text{صفر} & ، -١ < س < ٢ \\ \text{صفر} & ، س > ٢ \\ \text{غ.م} & ، س = ٢ ، -١ \end{cases}$

يفشل الإختبار وجود للمشتقة الأولى.



يوجد قيمة صغرى مطلقة عند $س = ٢$.

● لرسم منحنى اتبع الخطوات التالية:

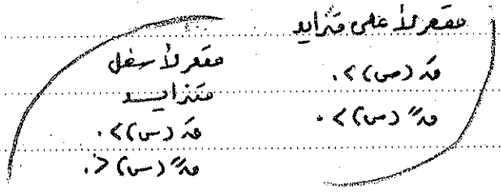
① تحديد إشارة $م'(س)$ و $م''(س)$.

② تجميع في المستوى جميع النقط الحرجة وإلا نقاط.

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

subject: Sa'ad Al-Bustanji Date:

④ نستفيد من الأشكال التالية:



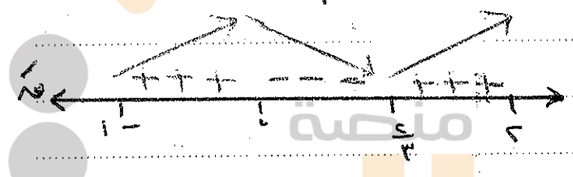
* مع ملاحظة إذا طلب رسم منحنى $ق$ لـ $هـ(س)$ لفترة فإننا نضع حلقات عند الأطراف لأنه المشتقة غير موجودة.

● مثال: إذا كان $هـ(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{2}س^3$ معرفاً على الفترة $[-1، 3]$، ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى المشتقة الأولى؟

$هـ(س) = س^3 - س^2 \Leftarrow هـ'(س) = 3س^2 - 2س$

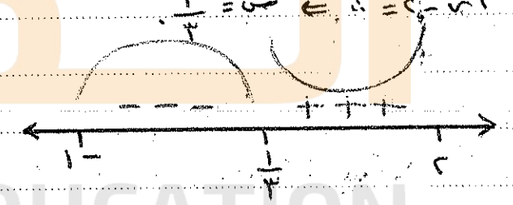
$\Leftarrow 3س^2 - 2س = 0 \therefore \Leftarrow س(3س - 2) = 0$

$\Leftarrow س = 0، س = \frac{2}{3}$



$هـ''(س) = 6س - 2$

$6س - 2 = 0 \therefore \Leftarrow س = \frac{1}{3}$



● مثال: إذا كان $هـ(س) = س^3(4 - س)$

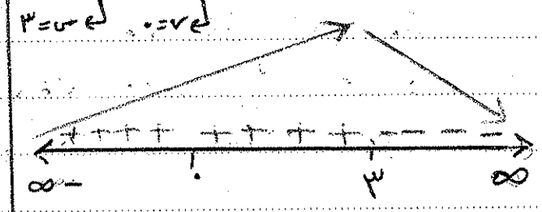
ارسم منحنى تقريبي لـ $هـ(س)$ ؟

$هـ(س) = 4س^3 - س^4 \Leftarrow$

$هـ'(س) = 12س^2 - 4س^3$

$12س^2 - 4س^3 = 0 \therefore \Leftarrow 4س^2(3 - س) = 0$

$\Leftarrow س = 0$ أو $س = 3$



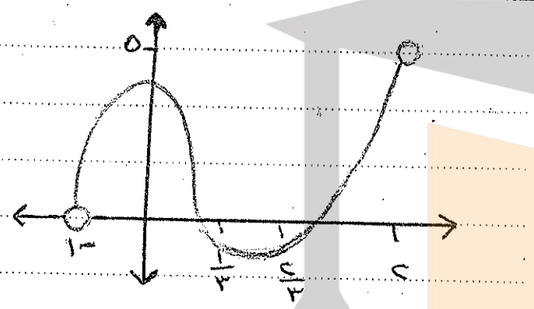
$هـ''(س) = 24س - 12س^2 \Leftarrow$

$12س(2 - س) = 0 \therefore \Leftarrow س = 0، س = 2$

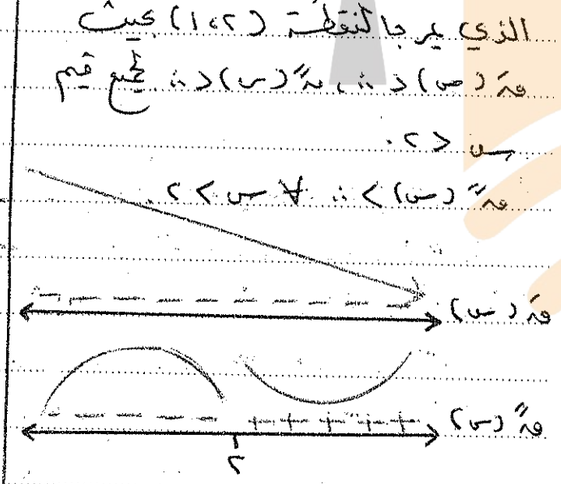
NOTE BOOK
القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

أسعد الدين البستغي
٠٧٩٥٤٢٠٥٤٢
٠٧٨٨٩١٨٢٨٠٦

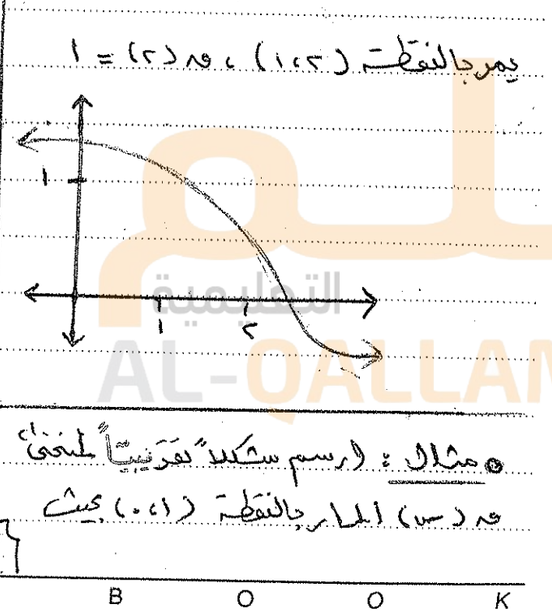
subject: Date:



● مثال: ارسم شكلاً لمنحنى $f(x)$ الذي يمر بالنقطة $(2,1)$ بحيث $f'(x) > 0$ لجميع قيم x ، $f''(x) > 0$ لجميع قيم $x < 2$.



● مثال: ارسم شكلاً تقريبياً لمنحنى $f(x)$ المار بالنقطة $(1,0)$ بحيث $f'(x) < 0$ لجميع قيم x ، $f''(x) > 0$ لجميع قيم $x < 2$ ، $f''(x) < 0$ لجميع قيم $x > 2$.



✱ ملاحظات:

نستفيد منها لتكوين معادلات الاقترانات.

1. إذا كانت النقطة $(P, ب)$ عظمى محلية فإن $f'(P) = ب$ ⇐ $f'(P) =$ صفر.
2. إذا كانت النقطة $(P, ب)$ نقطة انطواف فإن $f(P) = ب$ ، $f'(P) =$ صفر
3. إذا كانت النقطة $(P, ب)$ نقطة انطواف أفقي فإن $f(P) = ب$ ، $f'(P) =$ صفر ، $f''(P) =$ صفر.

✱ ملاحظة: يوجد بعض الأسئلة $f(x)$ أو $f''(x)$ أو منحنى $f(x)$ نجد:

NOTE BOOK
منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

subject: القمة في الرياضيات Date:

1) عندما يعطى منحنى المشتقة الأولى $f'(x)$ نجد منه كل مما يلي لـ $f(x)$ حسب الإشارات:

أ) نحدد إشارة $f'(x)$ من منحنى $f'(x)$:

- $f'(x)$ فوق محور السينات، الإشارة (+) للمشتقة الأولى.
- $f'(x)$ تحت محور السينات، الإشارة (-) للمشتقة الأولى.

ب) نحدد إشارة $f''(x)$ من منحنى $f'(x)$.

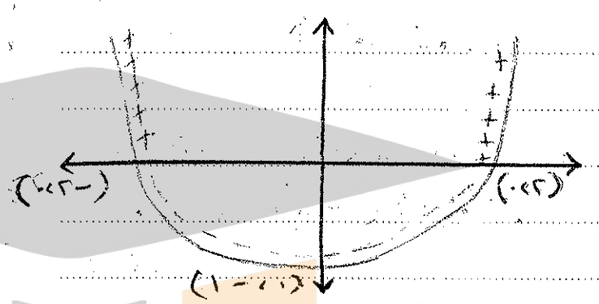
بغض النظر عن محور السينات فوقه أو تحته

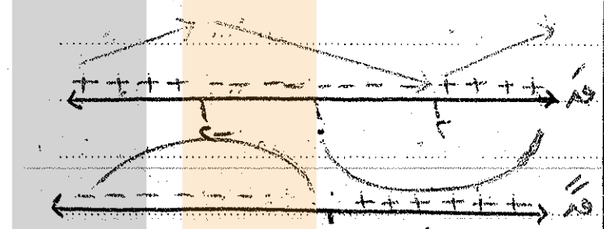
- إذا كان منحنى $f'(x)$ صاعد فإنه إشارة $f''(x)$ (+).
- إذا كان منحنى $f'(x)$ نازل فإنه إشارة $f''(x)$ (-).

2) عندما يعطى منحنى المشتقة الثانية $f''(x)$.

- منحنى $f''(x)$ فوق محور السينات إشارة $f''(x)$ (+).
- منحنى $f''(x)$ تحت محور السينات إشارة $f''(x)$ (-).

* الشكل المجاور يمثل منحنى $f'(x)$، أوجد خصائص $f(x)$؟





- س الحرجة {-٢، ٢، ٤}.
- المتزايد $(-\infty, -2]$، $[2, \infty)$.
- المتناقص $[-2, 2]$.
- المقعر لأعلى $[\ ,\infty)$.
- المقعر لأسفل $(-\infty, \ ]$.
- القيم القصوى عند س = -٢ عظمى محلية.
  عند س = ٢ صغرى محلية.
- نقط الانعطاف: عند س = .
  (، ف(،))، (، -١).
- نوعيا الانعطاف: ظاهرا = ف'(٠).

Saad el-Dein Bustanji

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

subject: القيمة في الرياضيات Date:

✱✱✱ تطبيقات القيم القصوى

✱ يستدل على هذه الأسئلة من خلال كلمات أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن.

✱ طريقة حل هذه الأسئلة:

1) نرسم الشكل المطلوب في المسألة.
2) نكتب المتغيرات في العلاقة الأصلية أو العلاقات الفرعية.
3) نحدد العلاقة التي يراد إيجاد قيمة عظمى لها أو صغرى لها.
4) نشتق العلاقة.
5) نختبر الإشارة عند طريق $d'(s)$ أو من الرسم.

● أمثلة:

✱ عددين موجبين حاصل ضربهما = ١٦، أوجد العددين بحيث يكون مجموعهما أقل ما يمكن ؟

✱ نفرض أحد العددين $س$، والآخر $ص$.

$س \times ص = ١٦$

$س = \frac{١٦}{ص}$ ، $ص = \frac{١٦}{س}$

$ل = س + ص$ أقل ما يمكن

$ل = س + \frac{١٦}{س}$

$ل' = ١ - \frac{١٦}{س^٢}$

$ل'' = \frac{٢ \times ١٦ س}{س^٤}$

$ل'' = \frac{٢ \times ١٦}{س^٣} = \frac{٢ \times ١٦}{٦٤} = \frac{٣٢}{٦٤}$

الناتج موجب قيمة صغرى.

✱ عددين موجبين حاصل ضربهما = ٩٠، أوجد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن.

نفرض العددين $س$ ، $ص$.

$س + ص = ٩٠ \Leftarrow س = ٩٠ - ص$

أو $ص = ٩٠ - س$.

$س \times ص = ل \Leftarrow$ أكبر ما يمكن.

$ل = ص \times (٩٠ - ص) \Leftarrow$

$ل = ٩٠ ص - ص^٢$

$ل' = ٩٠ - ٢ ص$

$٩٠ - ٢ ص = ٠ \therefore س = ٩٠ - ٤٥$

$٩٠ = ٢ ص \quad س = ٤٥$

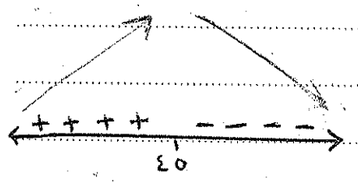
$ص = ٤٥$

نختبر عن طريق المشتقة الأولى:

$٩٠ - ٢ ص$

$٩٠ - ٢ \times ٤٦$

$٩٠ - ٩٢ = -٢$



✱ عددين موجبين حاصل ضربهما = ١٦، أوجد العددين بحيث يكون مجموعهما أقل ما يمكن ؟

$س \times ص = ١٦$

$س = \frac{١٦}{ص}$ ، $ص = \frac{١٦}{س}$

$ل = س + ص$ أقل ما يمكن

$ل = س + \frac{١٦}{س}$

$ل' = ١ - \frac{١٦}{س^٢}$

$١ - \frac{١٦}{س^٢} = ٠ \Leftarrow \frac{١٦}{س^٢} = ١$

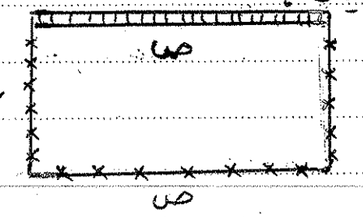
$س^٢ = ١٦ \Leftarrow س = ٤$

$س = -٤$ ، $ص = \frac{١٦}{-٤} = -٤$

✱ نجد هنا عن طريقة المشتقة الثانية

NOTE BOOK

* قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٨٠٠ م٢ على أحد جوانبها يوجد جدار، فإذا أردنا تسييجها من الجهات الثلاث الأخرى، فما أبعادها بحيث يكون طول السياج أقل ما يمكن؟



مساحة المستطيل = الطول × العرض

- المساحة (م) = س × ص

٨٠٠ = س × ص

$$\boxed{س = \frac{٨٠٠}{ص}}$$

- محيط المستطيل = ٢ س + ٢ ص

٣ جهات = ٢ س + ص

ل = ٢ س + ص ⇐

ل = ٢ س + $\frac{٨٠٠}{س}$ ⇐

ل' = ٢ − $\frac{٨٠٠}{س^٢}$ ⇐

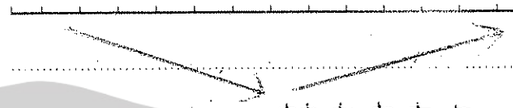
٢ = $\frac{٨٠٠}{س^٢}$ ⇐ ٢ س^٢ = ٨٠٠ ⇐

س^٢ = ٤٠٠ ⇐ س = ٢٠

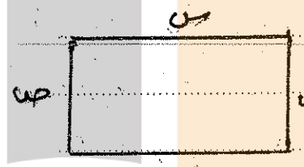
ص = $\frac{٨٠٠}{س}$ = $\frac{٨٠٠}{٢٠}$ = ٤٠

- طول الجهات الثلاث =

٢ س + ص = ٢ × ٢٠ + ٤٠ = ٨٠ م.



* إذا أردنا إقامة سياج على قطعة أرض وكان لدينا ٨٠ م من الأسلاك الشائكة وأردنا أن نحيط بها بسياج بأكبر مستطيل ممكن من حيث المساحة، أوجد بحدي، قطعة الأرض؟



٢ س + ٢ ص = ٨٠

س + ص = ٤٠ ص

ص = ٤٠ − س

م = س (٤٠ − س)

م = ٤٠ س − س^٢

م' = ٤٠ − ٢ س = ٠

٤٠ = ٢ س ⇐ $\boxed{س = ٢٠}$

ص = ٤٠ − س ⇐ ٤٠ − ٢٠ ⇐ $\boxed{ص = ٢٠}$

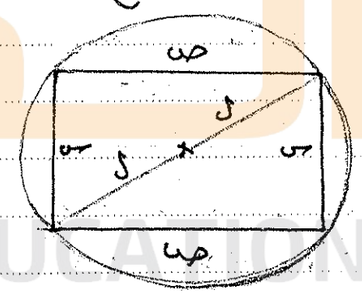
م = س × ص

نختبر عند طريقة م'' (س)

م'' (س) = −٢

قيمة عظمى لأنها سالبة.

* أثبت أنه أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة يكون مربع؟



القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION

subject: ٠٥٤٠٥٧٩٥٤٠٦ عبد الرحيم السبتي ٠٦٨٨٨٨٨٠٦ Date:

الأستاذ: ...

$م = س \times ص \Rightarrow م = س\sqrt{٤ل^٢ - س^٢}$.

$م = \sqrt{٤س^٢ل^٢ - س^٤}$.

$م' = \frac{٨ل^٢س - ٤س^٣}{٢\sqrt{٤س^٢ل^٢ - س^٤}}$

$= ٨ل^٢س - ٤س^٣ = ٠$

$٤س(٢ل^٢ - س^٢) = ٠$

$\because س = ٠$ لـ $٢ل^٢ = س^٢$

إثبات أن $ص^٢ = ٢ل^٢$.

$س = \sqrt{٢}\,ل \Rightarrow ص = \sqrt{٤ل^٢ - س^٢}$

$\Rightarrow ص = \sqrt{٤ل^٢ - ٢ل^٢} \Rightarrow ص = \sqrt{٢ل^٢}$

$\Rightarrow ص = \sqrt{٢}\,ل$ ، $\therefore ص = س$.

ومنها يكون المستطيل المرسوم (مربع).

مساحة المستطيل = الطول × العرض

حتى يكون المستطيل مربع يجب أن تتساوى جميع الأضلاع.

$س = ص$ ، يجب أن تثبت أنّ

$س = ص$ حسب متباينة حيشاغور:

$(٢ل)^٢ = س^٢ + ص^٢$

$٤ل^٢ = س^٢ + ص^٢$

$٤ل^٢ - س^٢ = ص^٢$

$ص = \sqrt{٤ل^٢ - س^٢}$.

● إذا كان $٢س + ٤ص = ٦$،

أوجد أقل قيمة للمقدار $٣س^٢ + ص^٢$؟

$٢س + ٤ص = ٦ \Leftarrow ٢س = ٦ - ٤ص$.

$ل = ٢س^٢ + ص^٢$.

$ل = ٢(٦ - ٤ص)^٢ + ص^٢$.

$ل = ٢(٣٦ - ٤٨ص + ١٦ص^٢ + ص^٢)$

$ل = ٧٢ - ٩٦ص + ٣٢ص^٢ + ص^٢$

$ل' = -٩٦ + ٦٤ص + ٢ص$

$ل' = -٦٢ص - ٩٦$

$-٦٢ص = ٩٦ \Leftarrow ص = \frac{٩٦}{٦٢} = \frac{٤}{٣}$

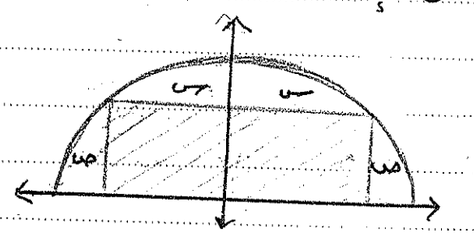
$\frac{٤×٣}{٣}س + \frac{٤}{٣} \times \frac{٤×٣}{٣} + س^٢ = ٦ \times \frac{٣}{٣} \Leftarrow$

$\frac{٦}{٣}س + س^٢ = \frac{١٦}{٣} = \frac{١٨}{٣}$.

$س = \frac{٦}{٣} \Leftarrow ١٨س = ٦ \Leftarrow$

$س = \frac{٦}{١٨} = \frac{١}{٣}$.

● أوجد أكبر مساحة لمستطيل يمكن رسمه أسفل محور السينات حيث يكون أحد جانبيه منطبقاً على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الإقتران $ص = ١٢ - س^٢$.



م المستطيل = الطول × العرض

$= ٢س \times ص$

$م = ٢س(١٢ - س^٢)$.

NOTE BOOK
منصة التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

م = ٢٤ س - ٢ س³ .

م' = ٢٤ - ٦ س² .

٢٤ - ٦ س² = ٠ ⇐ ٢٤ = ٦ س² ⇐

س² = ٤ ⇐ | س = ٢ |

م'' = -١٢ س . سالبة فيه عظمى .

ص = ١٢ - س²

له سالب فقرة لأعلى .

ص' = -٢ س .

∴ س = صفر . محور المماثل .

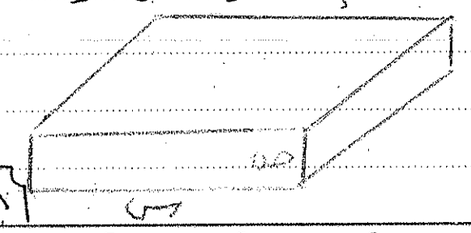
س = ٢ ⇐ ص = ١٢ - س² .

ص = ١٢ - ٤ = ٨

| ص = ٨ |

م = ٢ × ٢ × ٨ = ٣٢ وحدة مربعة .

● يراد صنع خزان على شكل متوازي مستطيلات حجمه ١٠ م³ ، بحيث يكون مفتوحاً للأعلى ، وتكون قاعدته على شكل مربع . فإذا كان تكاليف المتر المربع من القاعدة ٥ دنانير ومن الجوانب ديناران ، أوجد أبعاد الخزان بحيث تكون التكلفة الإنشائية أقل ما يمكن؟



- نفرض الطول س و الارتفاع ص .

- مساحة القاعدة = س² .

- مساحة الجانب الواحد = س × ص .

- مساحة الجوانب = ٤ (س ص) .

- مساحة القاعدتين = ٢ س² .

- تكلفة القاعدتين = ١٠ س² .

- تكلفة الجوانب الأربعة = ٨ س ص .

- تكلفة الخزان بالكامل = ١٠ س² + ٨ س ص

⇐ ل = ١٠ س² + ٨ س ص .

- ∵ ١٠ م³ = س² × ص ⇐ س² = ١٠ / ص ،

ص = ١٠ / س² .

- التكلفة (ت) = ١٠ س² + ١٠ / س² .

ت' = ٢٠ س - ٢٠ س / س⁴

= ٢٠ س - ٢٠ / س³ = صفر

٢٠ س⁴ = ٢٠ ⇐ س⁴ = ١ ⇐ س = ١ م .

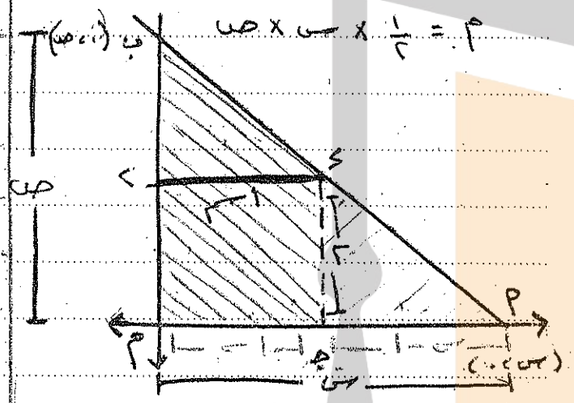
ص = ١٠ / ١ ⇐ ص = ١٠ / ١ = ١٠ م .

● مستقيم يمر بالنقطة (١ ، ٢) لا يقطع محور السينات في النقطة م (س ، ٠) ، حيث س > ٠ ، ويقطع محور الصادات في النقطة ب (٠ ، ص) حيث ص > ٠ ، أوجد أقل مساحة ممكنة لمثلث م ب جـ حيث م نقطة الأصل .

القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

م = $\frac{1}{2}$ × القاعدة × الارتفاع

م = $\frac{1}{2}$ × س × ص



ص تشابه المثلثان

م ج ء ، م ب م .

$\frac{س}{س-1} = \frac{ص}{2}$

$2س = ص(س-1)$.

$\frac{2س}{س-1} = ص$.

$م = \frac{1}{2} \times س \times \frac{2س}{س-1}$

$م = \frac{س^2}{س-1}$

$م' = \frac{(س-1)(2س) - (س^2)(1)}{(س-1)^2}$

$م' = \frac{2س^2 - 2س - س^2}{س^2 - 2س + 1}$

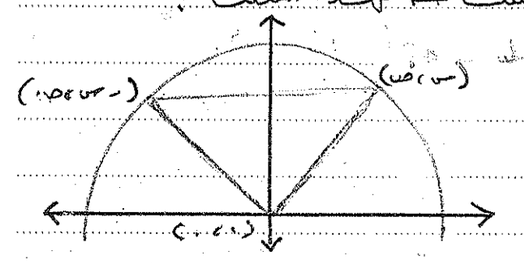
$س^2 - 2س = 0 \Leftarrow \frac{س^2}{س} = \frac{2س}{س}$

$س = 2$

$ص = \frac{2س}{س-1} = \frac{2 \times 2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$.

∴ م = $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٤ = ٤ وحدة مربعة .

● يمثل الشكل المجاور مثلث متساوي الساقين مرسوماً في فوه محور السينات بحيث يقع رأسه في نقطة الأصل ورأساه أعلاه على منحنى الاقتران ص = ٢٧ - س٢ ، أوجد أكبر مساحة لهذا المثلث ؟



المساحة = $\frac{1}{2}$ × س × ص .

م = $\frac{1}{2}$ × س × (٢٧ - س٢) .

م = $\frac{27س}{2} - \frac{س^3}{2}$

م' = $\frac{27}{2} - \frac{3}{2}س^2 = 0$

$\frac{27}{2} = \frac{3س^2}{2} \Leftarrow 54 = 6س^2 \Leftarrow$

$س^2 = 9 \Leftarrow س = 3$. (السالبة تهمل)

ص = ٢٧ - س٢

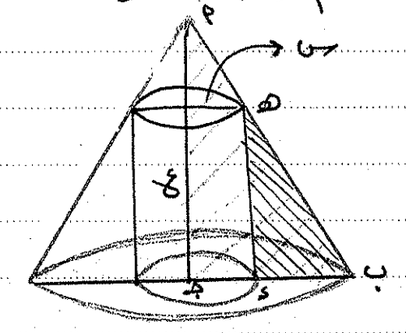
ص = ٢٧ - ٩ = ١٨

م = $\frac{1}{2}$ × ٣ × ١٨

= ٢٧ وحدة مربعة .

منصة القلم التعليمية AL-QALAM EDUCATION

● أوجد أبعاد أكبر أسطوانة يمكن رسمها في مخروط دائري ارتفاعه ٩ سم ونصف قطر قاعدته = ٦ سم؟



$\triangle P B جـ$ ، $\triangle هـ ب د$

$\frac{ب د}{٦} = \frac{ع}{٩} \Leftarrow \frac{٦ - نق هـ}{٦} = \frac{ع}{٩}$

$٩(٦ - نق هـ) = ٦ع \Leftarrow ع = \frac{٩(٦ - نق هـ)}{٦}$ سم

$ع = ٩\pi نق هـ^{٢} - ٩\pi نق هـ^{٢}$ سم^{٣}

$ع = \pi نق هـ^{٢} ع$	ارتفاع المخروط = ٩ سم
$ع = \pi نق هـ^{٢} \frac{٣}{٢} (٦ - نق هـ)$	نق قاعدة المخروط = ٦ سم
$ع = \frac{\pi ٣}{٢} ٦ نق هـ^{٢} - نق هـ^{٣} ٣$	ارتفاع الأسطوانة = ع
$ع' = ١٨\pi نق هـ - ٣ نق هـ^{٢}$	حجم الأسطوانة = نق هـ
$١٨\pi نق هـ - ٣ نق هـ^{٢} = ٠$	$ع = \pi نق هـ^{٢} ع$
$٣ نق هـ (٦\pi - نق هـ) = ٠$	ب د = ٦ - نق هـ لأسطوانة
$نق هـ = ٦\pi$	
$ع = \frac{٩(٦ - نق هـ)}{٦} = \frac{٥٤\pi - ٥٤}{٦}$	
$= \frac{٦(٩\pi - ٩)}{٦} = ٩\pi - ٩$ سم	

● ينتج مصنع س جهاز يومياً، تكاليف إنتاج الأجهزة جميعاً، $س^{٢} - ١٠س$، حيث أن سعر الجهاز $٥ س - \frac{س^{٢}}{٣} - ١٠$، أوجد عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها المصنع يومياً ليحقق أكبر ربح، ثم أوجد تكاليف إنتاج الجهاز الواحد؟

الربح = سعر البيع - سعر التكلفة

ثمن البيع = سعر البيع × عدد الأجهزة

ثمن البيع = $(٥ س - \frac{س^{٢}}{٣٠} - ١٠) س$

ثمن البيع = $٥ س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣٠} - ١٠ س$

الربح = $٥ س^{٢} - \frac{س^{٣}}{٣٠} - ١٠ س - س^{٢} + ١٠ س$

الربح' = $١٠ س - \frac{٣ س^{٢}}{٣٠} - ٢ س + ٢٠$

$= ٨ س - \frac{س^{٢}}{١٠} =$ صفر

$= ٨ س = \frac{س^{٢}}{١٠} \Leftarrow ٨٠ س = س^{٢}$

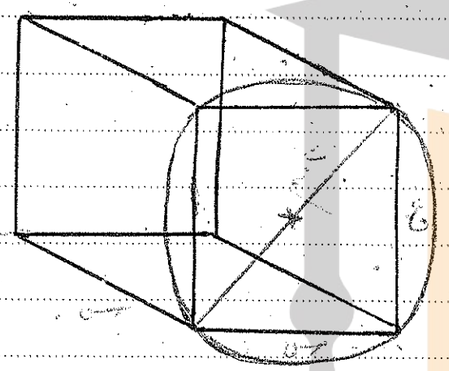
$\Leftarrow س = ٨٠$ جهاز يومياً.

$س^{٢} - ١٠ س$ ثمن تكاليف الأجهزة كاملة.

تكلفة الجهاز الواحد = $\frac{\text{تكاليف جميع الأجهزة}}{\text{عدد الأجهزة المنتجة}}$

$= \frac{س^{٢} - ١٠ س}{٨٠}$

منصة القلم التعليمية
AL-QALLAM EDUCATION



$\therefore (٢٠)^٢ = س^٢ + ع^٢$

$س^٢ = ٤٠٠ - ع^٢$

$ع^٢ = ٤٠٠ - س^٢$

$ع = \sqrt{٤٠٠ - س^٢}$

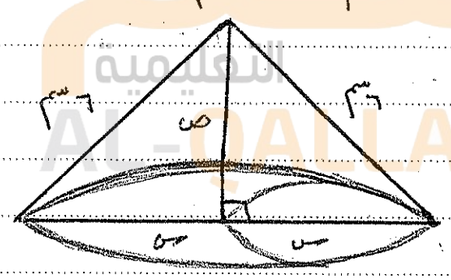
حجم المتوازي = الطول × العرض × الارتفاع

$ح = س \times س \times ع$

$ح = س^٢ ع$

$ح = س^٢ (\sqrt{٤٠٠ - س^٢})$

● ما أكبر حجم مخروط ينتج عند دوران مثلث قائم حول أحد ضلعي القائمة بحيث يكون وتر المثلث القائم = ٦ سم.



$٦^٢ = س^٢ + ص^٢$

$٣٦ - س^٢ = ص^٢$

حجم المخروط = $\frac{١}{٣} \pi$ نق^٢ ع

$= \frac{١}{٣} \pi س^٢ ع = \frac{١}{٣} \pi س^٢ \sqrt{٣٦ - س^٢}$

$ع = \frac{١}{٣} \pi \sqrt{٣٦ س^٢ - س^٤}$ ←

$ع' = \frac{١}{٣} \pi \frac{٧٢ س - ٤ س^٣}{٢ \sqrt{٣٦ س^٢ - س^٤}}$

$= \frac{١}{٣} \pi \frac{٧٢ س - ٤ س^٣}{٢ \sqrt{٣٦ س^٢ - س^٤}}$ = صفر

$\therefore ٧٢ س - ٤ س^٣ =$ صفر

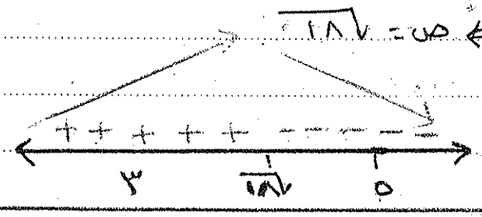
$\therefore ٤ س (١٨ - س^٢) = ٠$

$\therefore س = ٠$ أو $١٨ = س^٢$

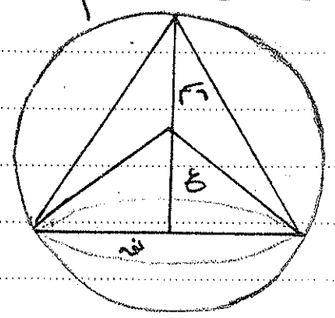
$\therefore س = \sqrt{١٨}$

$ص^٢ = ٣٦ - (\sqrt{١٨})^٢ = ٣٦ - ١٨ = ١٨$

$\therefore ص = \sqrt{١٨}$



● ما حجم أكبر مخروط يُرسم داخل كرة نصف قطرها ٦ سم.



القمة في الرياضيات

subject: Date:

الحجم = $\frac{1}{3}\pi$ نق^2 ع

ع = $\frac{1}{3}\pi$ س^2 ع

ل^2 = ع^2 + نق^2

٣٦ = ع^2 + س^2

٣٦ − س^2 = ع^2

ح = $\frac{1}{3}\pi$ س^2 (٣٦ − س^2)

ح = $\frac{1}{3}\pi$ ٣٦ س^2 − س^4

ح$'$ = $\frac{1}{3}\pi$ ٧٢ س − ٤ س^3

= $\frac{1}{3}\pi$ ٧٢ س − ٤ س^3 = ٠

⇐ ٤ س (١٨ − س^2) = ٠

⇐ س = ٠ أو ⇐ س = ±√١٨

● د(س) = $\frac{1}{4}$ س^4 − ٩ س^2، أوجد فترات التزايد والتناقص وإحداثيات النقط القصوى، ثم إيجاد نوع كل منها.

د$'$(س) = س^3 − ١٨ س ⇐

س^3 − ١٨ س = ٠ ⇐

س (س^2 − ١٨) = ٠

⇐ س = ٠ أو ⇐ س = ±√١٨

− فترات التزايد [−√١٨، صفر]، [√١٨، ∞).

− فترات التناقص (−∞، −√١٨]، [صفر، √١٨].

− القيم القصوى:

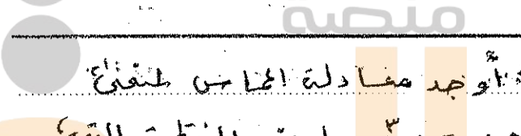
س = −√١٨ ← صغرى
س = صفر ← عظمى
س = √١٨ ← صغرى

} نحصل عليها بالاستعانة بالآلة الحاسبة

د$''$(س) = ٣ س^2 − ١٨ ⇐

٣ س^2 − ١٨ = ٠ ⇐ ٣ س^2 = ١٨ ⇐

س = ±√٦ .



⇐ للأعلى: (−∞، −√٦)، (√٦، ∞).

⇐ للأسفل: (−√٦، √٦).

⇐ نقاط الانعطاف:

(√٦، د(√٦))، (−√٦، د(−√٦)).

⇐ زوايا الانعطاف:

هـ١ حيث ظا هـ١ = د$'$(−√٦).

هـ٢ حيث ظا هـ٢ = د$'$(√٦).

● أوجد معادلة المماس لمنحنى ص = س^3 − ١ عند النقطة التي يقطع فيها المنحنى محور السينات.

ص = ٠ ⇐ س^3 − ١ = ٠ ⇐ س^3 = ١ ⇐ س = ١ (١، ٠)

ص$'$ = ٣ س^2 ، م = ٣.

NOTE BOOK

منصة القلم التعليمية AL-QALLAM EDUCATION

ص − ص١ = م (س − س١)

ص − ٠ = ٣ (س − ١)

← ص = ٣ س − ٣

---

⑤ ص٢ + ٢ س ص = ١٠ ، أوجد هـ(س)؟

$2ص\frac{dص}{dس} + 2س\frac{dص}{dس} + ص \times 2 = ٠$

$2ص\frac{dص}{dس} + 2س\frac{dص}{dس} + 2ص = ٠$

$2ص\frac{dص}{dس} + 2س\frac{dص}{dس} = -2ص$

$\frac{dص}{dس}(2ص + 2س) = -2ص$

$\frac{dص}{dس} = \frac{-2ص}{2ص + 2س}$

$\frac{dص}{dس} = \frac{٠ - 2ص}{2ص + 2س}$

هـ(س) = ٢ س٢ + س + ١

هو وسط التغير = ٤ ،

تغير في س من س١ إلى ٤ س + ١ .

متوسط التغير = $\frac{هـ(س) - هـ(س١)}{س - س١}$

$= \frac{هـ(س + ١) - هـ(س١)}{٤س + ١ - ٤س١}$

$= \frac{٢(س + ١)^2 + (س + ١) - ١ - ٢س١^2 - س١ + ١}{٤}$

$= \frac{٢(س^2 + ٢س + ١) + س + ١ - ١ - ٢س١^2 - س١ + ١}{٤}$

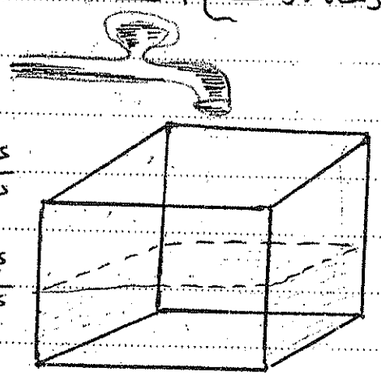
$= \frac{٢س^2 + ٤س + ٢ + س - ٢س١^2 - س١ + ١}{٤}$

$= \frac{٤س + ٣}{٤} \Leftarrow ٤س١ + ٣ = ٤$

$\Leftarrow س١ = \frac{١}{٤}$ ،

---

⑥ حوض سباحة على شكل متوازي مستطيلات بعداً قاعدته ٢٠ م ، ٨ م وعمقه ٢ م ، إذا ضخ الماء في حوضه بمعدل ٥ م٣/ث ، أوجد سرعة ارتفاع الماء.



$\frac{dع}{dن} = ٥$

$\frac{dع}{dس} = ؟؟$

حجم المتوازي = س × ص × ع

ح = ٢٠ × ٨ × ع

ح = ١٦٠ ع

$\frac{dح}{dن} = \frac{dع}{dس} \times 160$

$\frac{dع}{dس} = \frac{dح}{dن} \times \frac{1}{160}$

$\frac{dع}{dس} = 5 \times \frac{1}{160}$

$\frac{dع}{dس} = \frac{5}{160}$ ،

---

⑦ سلم طوله ٣٦ م يرتكز بطرفه العلوي على حائط عمودي ، وبطرفه السفلي على أرض أفقية ، إذا تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل ٩ م/ث ، في لحظة ما كان الطرف السفلي للسلم على بعد ١٨ م من الحائط ،

NOTE BOOK
منصة العلم التعليمية ALOALLAM EDUCATION

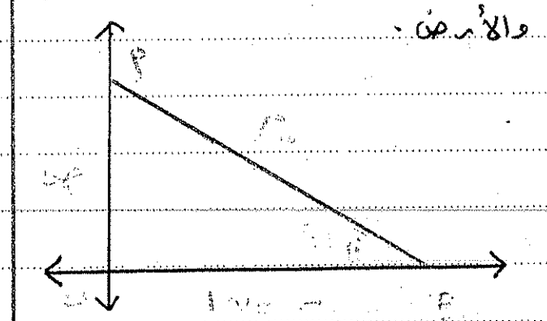
subject: سعد الدين البستنجي Date:

أوجد عند هذه اللحظة:

(أ) سرعة إزلاق الطرف العلوي للسلم

(ب) معدل التغيّر في مساحة المثلث المكونة من السلم والأرض والحائط

(ج) سرعة تغيّر الزاوية بين السلم والأرض.



$\frac{ds}{dt} = 9$

(أ) $\frac{dص}{dt}$ عندما س = ١٨

$(٣٦)^٢ = س^٢ + ص^٢$

$ص^٢ = (٣٦)^٢ - س^٢$

$ص = \sqrt{(٣٦)^٢ - س^٢}$

$\frac{dص}{dt} = \frac{-٢س \frac{ds}{dt}}{٢\sqrt{(٣٦)^٢ - س^٢}}$

$\frac{dص}{dt} = \frac{-١٨ \times ٩}{\sqrt{(٣٦)^٢ - (١٨)^٢}}$

$= \frac{-١٦٢}{٤٤} = -٣,٦$ م/ث.

(ب) مساحة المثلث (سلم، حائط، أرض)، س = ١٨.

م = $\frac{١}{٢}$ × القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٢} \times ١٨ \times ٣١ = ٢٧٩$ م^٢

(ج) جتاه = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{س}{٣٦}$

$\leftarrow$ $\frac{-٢س}{٣٦} = \frac{dه}{dt}$ جاه

$\leftarrow$ $\frac{-٩}{٣٦} = \frac{dه}{dt}$ جاه

$\leftarrow$ $\frac{-١}{٤} = \frac{dه}{dt}$ جاه

جاه = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جاه = $\frac{٦}{٣٧}$

$\frac{-١}{٤} = \frac{dه}{dt}$

$\frac{-١}{٤} = \frac{dه}{dt}$

$= \frac{-٢}{٣٧} \times \frac{١}{٤} = -\frac{١}{٣٧٢}$ راديان/ث

لَيْسَ بِجَمِيلٍ لِلَّهِ
مَعَ خَالِصِ تَمَنَّايَ
لَكَ بِالتَّفَوُّقِ فِي الثَّانَوِيَّةِ
"سعد الدين البستنجي"

٠٧٨/٨٩٨٢٨٦ * ٠٧٩/٥٤٢٠٥٤٤

NOTE BOOK