أنـواع الـتـكـامـل

التكامل الغير محدود

$\int$ قَ (س) دس

بعد إجراء التكامل للمقدار

١) نلغي التكامل و د س

٢) نضع في النهاية + جـ

حيث

$\int$ ⟵ رمز التكامل

المقدار ⟵ قيمة قَ (س)

دس ⟵ دلالة التكامل (د) الحرف

جـ ⟵ ثابت التكامل

التكامل المحدود على الفترة [أ ، ب]

$\int_{أ}^{ب}$ قَ (س) دس

أ : الحد السفلي للتكامل المحدود

ب : الحد العلوي للتكامل المحدود

بعد إجراء التكامل

١) نضع حدود التكامل في نهاية التكامل

٢) نعوض الحد العلوي مكان كل س في الاقتران

٣) نعوض الحد السفلي مكان كل س في الاقتران

٤) نطرح (العلوي) – (السفلي)

ق (ب) – ق (أ)

ناتج التكامل المحدود دائما رقم

إمتلك مستقبلك

مشتقة التكامل (مفتاح السؤال) فجد ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ، قَ(س)

اشتقاق التكامل الغير محدود

نشتق الطرفين

( ) = ( ) َ

الطرف الذي معه اشارة التكامل و دس ... فإن المشتقة تلغي التكامل و دس

الطرف الذي ليس معه تكامل و دس نشتقه عادي

اشتقاق التكامل المحدود

( ) = ( ) َ

مشتقة التكامل المحدود دائما صفر

القلم
إمتلك مستقبلك

قواعد التكامل غير المحدود (المباشرة)

١) تكامل الثابت (العدد)

$$\int أ \, دس = أ س + جـ$$

٢) تكامل س لها قوة

$$\int أس^{ن} \, دس = \frac{أ س^{ن+١}}{ن + ١} + جـ \quad ، \text{حيث } ن \neq -١ ،$$

ن (موجبة) بتكبر (ن + ١) (بتزيد)

ن (سالبة) بتصغر (– ن + ١) (بتنقص)

$$ن \text{ (كسر)} = \frac{أ}{ب} = \frac{ب}{أ+} \quad س^{\frac{أ+ب}{ب}}$$

٣) تكامل الاقترانات المثلثية

$$\int \text{جا س} \, دس = - \text{جتا س} + جـ$$

$$\int \text{جتا س} \, دس = \text{جا س} + جـ$$

$$\int \text{قا}^{٢} \text{س} \, دس = \text{ظا س} + جـ$$

$$\int \text{جا (أس + ب)} \, دس = \frac{- \text{جتا (أس + ب)}}{أ} + جـ$$

$$\int \text{جتا (أس + ب)} \, دس = \frac{\text{جا (أس + ب)}}{أ} + جـ$$

$$\int \text{قا}^{٢} \text{ (أس + ب)} \, دس = \frac{\text{ظا (أس + ب)}}{أ} + جـ$$

٤) تكامل القوس له قوة وما داخلة خطي

$$\int (أس + ب)^{ن} \, دس = \frac{(أس + ب)^{(ن+١)}}{أ \times (ن + ١)} + جـ$$

حالات لا تكامل مباشرة (محرمات التكامل)

١) (محرمات) تكامل الجدر تحتة س $\sqrt{\text{س}^{\text{الداخل}}_{\text{الخارج}}}$

أ) يحول الجذر إلى قوة كسرية $\text{س}^{\frac{\text{الداخل}}{\text{الخارج}}}$

ب) يكامل كقوة كسريه

ج) يرجع جذر

٢) (محرمات) تكامل الضرب ⟦ سينات × سينات دس

أ) نجري عملية الضرب

ب) نجمع الحدود اذا امكن

ج) نكامل عادي

$(\text{أ} \pm \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} \pm ٢\text{أب} + \text{ب}^{٢}$

٣) (محرمات) تكامل القسمة لها ثلاث أشكال

أ) ⟦ $\frac{\text{أ}}{\text{ب س}^{\text{القوة}}}$ دس ← ترفع س للأعلى وتستبدل إشارة القوة ← نكامل عادي

ب) ⟦ $\frac{\text{معادلة}}{\text{ب س}^{\text{القوة}}}$ دس ← نوزع المقام ← ترفع س للأعلى وتستبدل إشارة القوة ← نكامل عادي

ج) ⟦ $\frac{\text{معادلة}}{\text{أس + ب}}$ دس ← نحلل ← نختصر ← نكامل عادي

د) ⟦ $\frac{\text{أ}}{(\text{أس + ب})^{\text{القوة}}}$ دس ← يرفع القوس للأعلى وتستبدل إشارة القوة ← نكامل عادي

القلم
إمتلك مستقبلك

٤) (محرمات) تكامل الاقترانات المثلثية

أ) $\frac{١}{\text{جتاس}}$ دس ← ترفع جتاس للأعلى وتستبدل بـ قاس

ب) $\frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس ← ترفع جتا^{٢}س للأعلى وتستبدل بـ قا^{٢}س

ج) ظاس دس ← تستبدل بـ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

د) $\frac{١}{\text{قا}^{-٢}\text{س}}$ دس ←ترفع للأعلى وتستبدل بـ قا^{٢}س

هـ) ظتاس دس ← تستبدل بـ $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

ثوابت (مجاهيل) التكامل المحدود

١) المقدار غير معرف

مفتاح السؤال

ب
أ ق (س) دس = صفر

القانون

(العلوي) = (السفلي)

٢) المقدار معرف

مفتاح السؤال

ب
أ المقدار معرف دس = صفر

ب
أ المقدار معرف دس = عدد

القانون

١) نكامل عادي

٢) نعوض الحدود

(العلوي) – (السفلي)

القلم
إمتلك مستقبلك

خصائص التكامل المحدود

١) المعطيات

مفتاح السؤال

أ) إذا كان ما بعدها معطيات

ب) إذا علمت ما بعدها معطيات

الخاصية الخطية

١) $\int_{أ}^{ب} \frac{ل\ ق(س)}{ل}\ دس = \frac{عدد}{ل}$

٢) $\int_{أ}^{ب} \frac{ق(س)}{ل}\ دس = \frac{عدد}{١}$

ملاحظة : في عملية الجمع و الطرح شرط

أن نوزع التكامل و نكامل كل حد لوحدة

٣) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \pm ع(س)\ دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\ دس \pm \int_{أ}^{ب} ع(س)\ دس$

٢) المطلوب

مفتاح السؤال

أ) فجد ما بعدها مطلوب

ب) فإن ما بعدها مطلوب

الخاصية الخطية

الثابت خارج التكامل

١) $\int_{أ}^{ب} ل\ ق(س)\ دس = ل \int_{أ}^{ب} ق(س)\ دس$ ، حيث ل ثابت

٢) $\int_{أ}^{ب} ق(س) \pm ع(س)\ دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\ دس \pm \int_{أ}^{ب} ع(س)\ دس$

إمتلك مستقبلك

خواص التكامل المحدود

٢) الخاصية التشابهية

$$\int_{أ}^{أ} ق(س)\,دس = صفر$$

٣) خاصية قلب الحدود

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = -\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$$

٤) خاصية الإضافة

$$\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$$

تطبيقات التكامل غير المحدود

١) التفسير الهندسي

مفتاح السؤال

أ) إذا كان ميل المماس

ب) إحسب قاعدة الاقتران

ج) جد ق (عدد)

خطوات الحل

ميل المماس = قَ (س)

١) ق (س) = $\int$ قَ (س) دس

٢) نكامل عادي + جـ

٣) التخلص من (جـ) من المساعدة

أ) (أ ، ب)

ب) ق (أ) = ب

أ : قيمة س

ب : الجواب

٢) التفسير الفيزيائي

مفتاح السؤال

تـــــعـــــف

أ) إحسب السرعه

ب) إحسب المسافة

(موقع الجسم)

خطوات الحل

١) ع (ن) = $\int$ ت (ن) دن

٢) ف (ن) = $\int$ ع (ن) دن

٣) نكامل عادي + جـ

٤) التخلص من (جـ) من المساعدة

أ) ع (أ) = ب

ب) ف (أ) = ب

أ : قيمة ن

إمتلك مستقبلك

التكامل بالتعويض

مفتاح السؤال

يستخدم التكامل بالتعويض في عملية ضرب اقترانات

١) ⌊ (اقتران) × (اقتران)$^{\text{قوة}}$ دس

٢) ⌊ $\frac{\text{اقتران}}{(\text{اقتران})^{\text{قوة}}}$ دس

٣) ⌊ (اقتران) × (اقتران دائري) دس

٤) ⌊ (اقتران) × (ق (س$^{\text{قوة}}$)) أو (قَ (س$^{\text{قوة}}$)) دس

خطوات الحل

١) نفرض ص = ما داخل القوس

دس = $\frac{\text{دص}}{\text{مشتقة الفرض (ص)}}$

٢) نشتق

٣) نختصر

٤) إجراء التكامل

٥) إسترجاع الفرض

٦) تعويض الحدود إذا كان محدود

القلم
إمتلك مستقبلك

المساحة

ملاحظة : ١) المساحة دائما موجبة

$$\text{المساحة} = \int_{أ}^{ب} |ق(س)| \, دس$$

٢) المساحة ≠ صفرا

مفتاح السؤال

صيغة السؤال

١) اقتران واحد و فترة

أشكال الفترة

[أ ، ب] ، (س١ = أ ، س٢ = ب)

أ : الحد السفلي

ب : الحد العلوي

٢) اقتران واحد ومحور السينات بدون فترة

١) اقتران واحد و فترة

أشكال الفترة

[أ ، ب] ، (س١ = أ ، س٢ = ب)

أ : الحد السفلي

ب : الحد العلوي

خطوات الحل

١) نرسم خط الاعداد ونضع عليه الفترة

٢) نساوي الاقتران بالصفر لنجد قيم س

٣) قيمة س لها حالتين

لا تقع بالفترة	تقع بالفترة

٤) نكامل عادي

٥) نعوض الحدود (العلوي – السفلي)

إمتلك مستقبلك

٢) اقتران واحد ومحور السينات بدون فترة

خطوات الحل

١) نساوي الاقتران بالصفر و نجد قيم س و تكون هي حدود التكامل

٢) نكامل عادي

٣) نعوض الحدود (العلوي – السفلي)

٣) المساحة من الرسم

خطوات الحل

نحدد مكان المساحة على الرسمة

أ) (فوق محور السينات موجبة)

ب) (تحت محور السينات سالبة)

القلم
إمتلك مستقبلك