



# الفتاح



الفصل الأول

## الرياضيات

لطلاب التوجيهي الأدبي والفندقي

(المادة مشروحة بالكامل على منصة القلم التعليمية)

(ينصح بحضور حصص التأسيس قبل البدء بدراسة المادة)

منصة  
الروان ابودية

AL-QALLAM EDUCATION



0797 55 27 27

إحدى إصدارات

مدرسة مروان ابودية الافتراضية

" مشروع تعلم عن بعد "

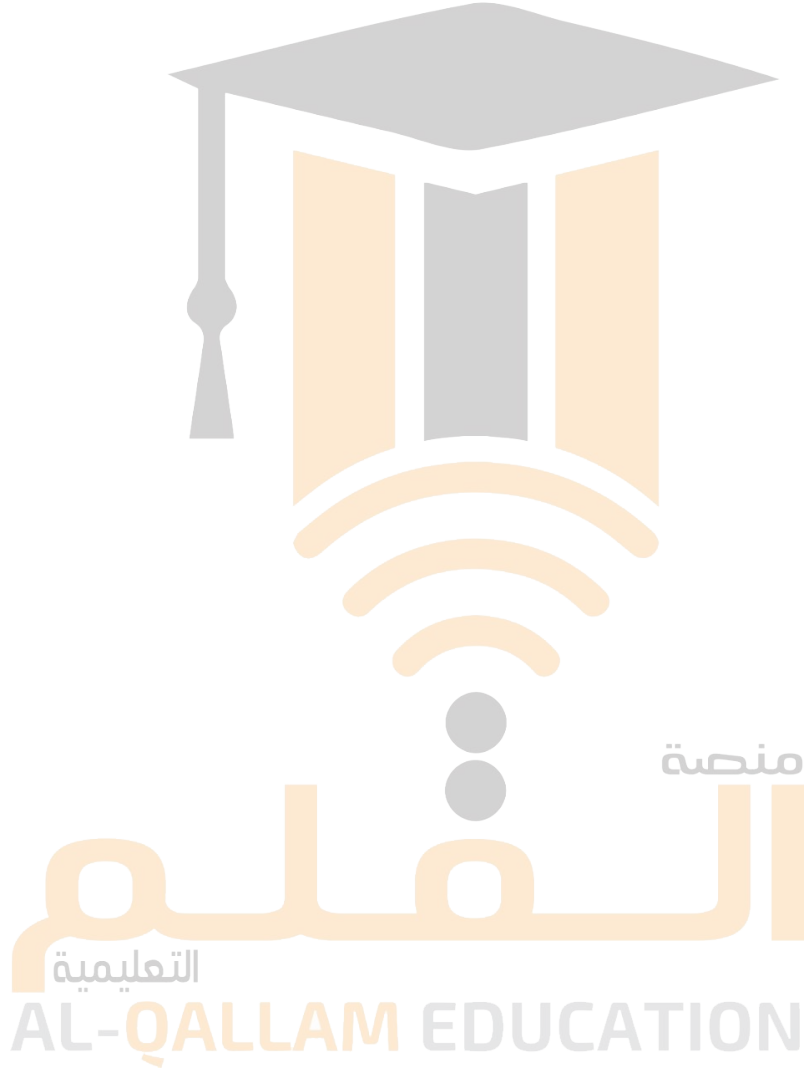
---

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال  
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

---

إعداد/ مروان ابوديه

---



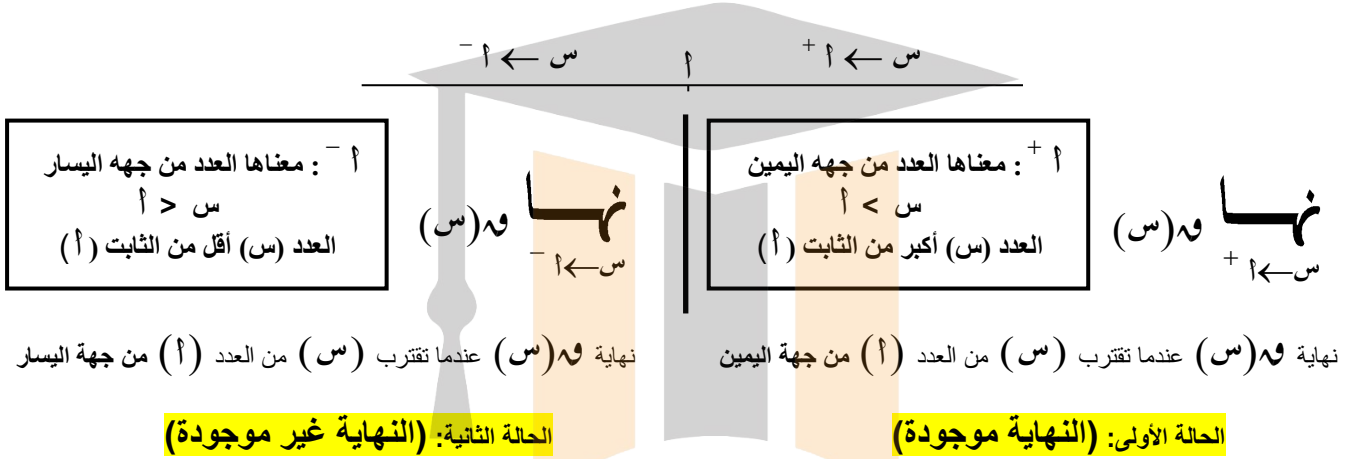
## النهايات والاتصال

**النهاية:** هي دراسة سلوك الاقتران  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  من العدد  $a$  من جهة اليمين  $+$  وجهة اليسار  $-$

ويتم ذلك من خلال **التعويض المباشر** والإجابة على السؤال: هل النهاية (موجودة / غير موجودة) عند  $a$  ؟

ويرمز للنهاية بالرمز:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

وتقرأ نهاية  $f(x)$  عندما تقترب  $x$  (تؤول)  $x$  من العدد  $a$  (حيث  $a$  ثابت موجود على محور السينات)



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ (النهاية غير موجودة)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ (موجودة)}$$

## طرق إيجاد النهايات

- ✓ من خلال الجدول
- ✓ من خلال الرسم
- ✓ من خلال الطرق الجبرية (ناتج خارج قسمة اقترانين)

- التعويض المباشر
- العامل المشترك
- الفرق بين مربعين
- فرق ومجموع مكعبين
- العبارة التربيعية
- توحيد المقامات
- المرافق التربيعي



## إيجاد النهاية من خلال التعويض المباشر

الأصل في النهايات التعويض المباشر.

(١٢) نها $\frac{1+s^2}{s^2}$ س ← ٣	
(١٣) نها $\frac{1+s^2-2s}{s^3-1}$ س ← ١	
(١٤) نها $\frac{1+s^2}{s+8}$ س ← ٠	مثال ١: جد قيمة النهايات التالية:
(١٥) نها $\frac{9-s^2-2s}{s-3}$ س ← ٣	(١) نها (٩) س ← ٥
(١٦) نها $\frac{3-s}{9+s-2}$ س ← ٠	(٢) نها (٣س-٥) س ← ٤
(١٧) نها $\frac{16-2(5-s^2)}{9-s^2}$ س ← ٢	(٣) نها (٢س <sup>٢</sup> -١) س ← ٣
(١٨) نها $\frac{s-2}{9-2(6+s^2)}$ س ← ٢	(٤) نها (٨س <sup>٢</sup> +١) س ← $\frac{1}{4}$
(١٩) نها $\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{s}}{2+s}$ س ← ٢	(٥) نها (٢س <sup>٢</sup> -٦+٦) س ← ٢
(٢٠) نها $\frac{\frac{s}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{8}{4}-\frac{4}{s}}$ س ← ١	(٦) نها (س <sup>٣</sup> +٣س-١) س ← ١
(٢١) نها $\frac{3+\sqrt{s}}{1+s}$ س ← ٤	(٧) نها (٢س+٤) س ← ٢
(٢٢) نها $\frac{2-\sqrt{1+s}}{2-s}$ س ← ٢	(٨) نها (٣+س)(١-س) س ← ٢
(٢٣) نها $\sqrt{s-2}+\frac{2+s^2}{s}$ س ← ٢	(٩) نها (س <sup>٣</sup> -٢س) س ← ١
	(١٠) نها (٢-٣س) س ← ٢
	(١١) نها (٤س-٢س)(٤-س) س ← ٣

## نهايات الجذور

$$\sqrt[n]{s} \text{ (س)}$$

س ← ١

يوجد هناك حالتين للتعامل مع الجذور (الجذور الفردية والجذور الزوجية)

مثال ٢: جد قيمة النهايات التالية:

$$(١) \sqrt[٣]{٧ + س} \text{ (س)}$$

س ← ١

$$(٢) \sqrt[٣]{١ - س} \text{ (س)}$$

س ← ٩

$$(٣) \sqrt[٣]{٩س} \text{ (س)}$$

س ← ٣

$$(٤) \sqrt[٥]{١٠ - س} \text{ (س)}$$

س ← ٥

$$(٥) \sqrt[٣]{١ + س} \text{ (س)}$$

س ← ١

$$(٦) \sqrt[٣]{٢ - ٤س} \text{ (س)}$$

س ← ٣

$$(٧) \sqrt[٦]{٣٧ - ٢س} \text{ (س)}$$

س ← ٦

$$(٨) \sqrt[٤]{(١ + س)} \text{ (س)}$$

س ← ٠

$$(٩) \sqrt[٥]{٥س} \text{ (س)}$$

س ← ٥

$$(١٠) \sqrt[٤]{٤س} \text{ (س)}$$

س ← ٤

$$(١١) \sqrt[٣]{٣س} \text{ (س)}$$

س ← ٣

الحالة الأولى: الجذور الفردية

$$\sqrt[n]{s} \quad \sqrt[n]{s^2} \quad \sqrt[n]{s^3} \quad \sqrt[n]{s^4}$$

يمكن أن يكون ما داخل الجذر الفردي عدد موجب أو سالب أو صفر لذلك نستطيع حساب النهاية بالتعويض المباشر.

✓ وتقبل جميع الاجابات ( وتكون النهاية دائماً موجودة )

أمثلة على الجذور التكعيبية

$$١ = ٣ \quad ١ \pm = \sqrt[٣]{١ \pm}$$

$$٨ = ٢ \quad ٨ \pm = \sqrt[٣]{٨ \pm}$$

$$٢٧ = ٣ \quad ٢٧ \pm = \sqrt[٣]{٢٧ \pm}$$

$$٦٤ = ٤ \quad ٦٤ \pm = \sqrt[٣]{٦٤ \pm}$$

$$١٢٥ = ٥ \quad ١٢٥ \pm = \sqrt[٣]{١٢٥ \pm}$$

$$٢١٦ = ٦ \quad ٢١٦ \pm = \sqrt[٣]{٢١٦ \pm}$$

$$٣٤٣ = ٧ \quad ٣٤٣ \pm = \sqrt[٣]{٣٤٣ \pm}$$

$$٥١٢ = ٨ \quad ٥١٢ \pm = \sqrt[٣]{٥١٢ \pm}$$

$$٧٢٩ = ٩ \quad ٧٢٩ \pm = \sqrt[٣]{٧٢٩ \pm}$$

$$١٠٠٠ = ١٠ \quad ١٠٠٠ \pm = \sqrt[٣]{١٠٠٠ \pm}$$

ملاحظة: يجب حفظ تكعيبات الأعداد من (١-١٠)

## نهايات الجذور

## نهايات الجذور (س)

مثال ٣: جد قيمة النهايات التالية:

(١)  $\lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{2+s}$

(٢)  $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{3+s}$

(٣)  $\lim_{s \rightarrow 6} \sqrt{5-s}$

(٤)  $\lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{4+s}$

(٥)  $\lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{s}$

(٦)  $\lim_{s \rightarrow 1} \sqrt{5-3s}$

(٧)  $\lim_{s \rightarrow 4} \sqrt[2]{4s}$

(٨)  $\lim_{s \rightarrow 7} \sqrt[2]{4s-2}$

(٩)  $\lim_{s \rightarrow 2} \sqrt{s+1}$

(١٠)  $\lim_{s \rightarrow 2} \sqrt{4-1s}$

(١١)  $\lim_{s \rightarrow 4} \sqrt[2]{s}$

(١٢)  $\lim_{s \rightarrow 2} \sqrt[2]{s-1}$

الحالة الثانية: الجذور الزوجية

$$\sqrt[2]{s} \quad \sqrt[2]{s} \quad \sqrt[2]{s} \quad \sqrt[2]{s}$$

يجب أن يكون ما داخل الجذر الزوجي عدد موجب فقط والنهاية تعتمد على ما داخل الجذر، فإن كان الناتج:

(١) موجب: النهاية موجودة. (تقبل جميع الإجابات)

(٢) سالب: النهاية غير موجودة.

أمثلة على الجذور التربيعية

$1 = \sqrt{1}$

$1 = \sqrt{1}$

$2 = \sqrt{4}$

$2 = \sqrt{4}$

$3 = \sqrt{9}$

$3 = \sqrt{9}$

$4 = \sqrt{16}$

$4 = \sqrt{16}$

$5 = \sqrt{25}$

$5 = \sqrt{25}$

$6 = \sqrt{36}$

$6 = \sqrt{36}$

$7 = \sqrt{49}$

$7 = \sqrt{49}$

$8 = \sqrt{64}$

$8 = \sqrt{64}$

$9 = \sqrt{81}$

$9 = \sqrt{81}$

$10 = \sqrt{100}$

$10 = \sqrt{100}$

ملاحظة: يجب حفظ تربيعات الأعداد من (١-١٠)

## إيجاد الثوابت (المجاهيل) من النهايات

مثال ٩: إذا كانت نها  $(3s - 5) = 12$ ، جد (ج)  $s \leftarrow$

لإيجاد قيمة الثوابت من النهايات الموجودة يجب أن نعوض قيمة (س) ثم نحل المعادلة جبرياً ونساوي المقدار بقيمة النهاية (ل)

مثال ٤: إذا كانت نها  $(s^2 - 1) = 5$ ، جد (أ)  $s \leftarrow$

مثال ١٠: إذا كانت نها  $\sqrt{s+2} = 2$ ، جد قيمة (ج)  $s \leftarrow$

مثال ٥: إذا كانت نها  $(s^2 + s - 1) = 9$ ، جد قيمة (أ)  $s \leftarrow$

مثال ٦: إذا كانت نها  $s^2 - 5s = -4$ ، جد الثابت (أ)  $s \leftarrow$

مثال ١١: إذا كانت نها  $(2s^3 + 5) = 11$ ، جد (أ)  $s \leftarrow$

مثال ٧: إذا كانت نها  $\left(\frac{s+3}{s+1}\right) = 4$ ، جد قيمة الثابت (أ)  $s \leftarrow$

مثال ١٢: إذا كان  $(s) = 4s^2 + 2s$ ،

وكانت نها  $(s) = 13$ ، جد قيمة الثابت (أ)  $s \leftarrow$

مثال ٨: إذا كانت نها  $\frac{s+9}{s^2-2} = 12$ ، جد قيمة الثابت (أ)  $s \leftarrow$

## نظريات النهايات

**نظرية النهايات:** النهاية توزع على جميع العمليات الحسابية.

يمكن ايجاد النهاية لأكثر من اقتران مثل:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ ، بشرط أن يكون الاقترانين متصلين.

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c \quad \text{إذا كان}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

**فإن:**

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow a} c \times f(x) = c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (c \times f(x))$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \quad (\text{لا يجوز القسمة على صفر})$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n = \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n$$

$$(6) \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} \quad , \quad \text{بشرط } (n < \infty) \text{، } (n \text{ عدد زوجي})$$



## نظريات النهايات

مثال ٤ : إذا كانت نهايه (س) = ٨

نهايه (س) = ٥

فجد ما يلي:

(١) نهايه (س) + نهايه (س)

(٢) نهايه (س) - نهايه (س)

(٣) نهايه  $\frac{(س)^2}{(س)^3}$

(٤) نهايه  $(س)^3 + ٢(س) - ٥$

(٥) نهايه  $\frac{(س)^3 - ١٢}{(س)^3 - ١٢}$

(٦) نهايه  $\frac{(س) - ٨}{(س)}$

طريقة الحل نعوض (س) بمباشر بقيمة نهايه (س)

ونعوض (س) بمباشر بقيمة نهايه (س)

وإجراء العمليات الحسابية عليها.

مثال ١٣ : إذا كانت نهايه (س) = ٤

نهايه (س) = ٥

جد ما يلي:

(١) نهايه  $(س)^3$

(٢) نهايه  $(س)^2 - ٢$

(٣) نهايه  $(س)^2 - (س) - ٢$

(٤) نهايه  $(س)^2 (س) \times (س) - ٤$

(٥) نهايه  $(س) - ٤ + (س) + (س)$

(٦) نهايه  $(س)^2 - (س)^2$

## نظريات النهايات

مثال ١٥: إذا كانت نهايا  $(س)$  = ٣ ، فجد ما يلي:

$$(١) \text{ نهايا } (س)^2 \text{ (س)}$$

$$(٢) \text{ نهايا } (س^2 - (س) + ٥)$$

$$(٣) \text{ نهايا } (٤س - ٣س + (س) + ١)$$

$$(٤) \text{ نهايا } (س^2 - ٣س + ١)$$

$$(٥) \text{ نهايا } \sqrt[٣]{(س)}$$

$$(٦) \text{ نهايا } \sqrt[٣]{(س) - ١}$$

$$(٧) \text{ نهايا } \left(٤ + \frac{(س)}{٣}\right)$$

$$(٨) \text{ نهايا } \left(\sqrt[٣]{(س)} + (س)\right)$$

مثال ١٦: إذا كانت نهايا  $(س)$  = ٤ ،

$$\text{نهايا } \frac{(س)}{٣} = ١$$

$$\text{فجد نهايا } (س^2 - ٢س + (س) - ٧)$$

مثال ١٧: إذا علمت أن نهايا  $(س)$  = ٣ ، فجد نهايا  $(٦ - ٢س + (س))$  ،

$$\text{فجد نهايا } (س^2 + ٥س - ٢٠)$$

مثال ١٨: إذا كانت نهايا  $(س)$  = ١٦ ،

$$\text{فجد نهايا } (٣ + (س))$$

## نظريات النهايات

مثال ٢٣: إذا كانت نها  $(2s - (s^2 + 3)) = 4$  ،  
فجد نها  $(s)$   $\leftarrow$  س ٣

مثال ١٩: إذا كانت نها  $(2s) = 8$  ،  
فجد نها  $(3s - (s^2 + 1))$   $\leftarrow$  س ٣

مثال ٢٤: إذا كانت نها  $(3s - (s^2 + 4)) = 12$  ،  
فجد نها  $(s)$   $\leftarrow$  س ١

مثال ٢٠: إذا كانت نها  $(3s) = 6$  ،  
فجد نها  $(s^2 + (s - 2))$   $\leftarrow$  س ٢

مثال ٢١: إذا كانت نها  $(\frac{s}{3}) = 2$  ،  
فجد نها  $(s^2 \times (s))$   $\leftarrow$  س ٢

مثال ٢٥: إذا كانت نها  $(3s) = 12$  ،  
فجد نها  $(-2s + (4s - 5))$   $\leftarrow$  س ٢

مثال ٢٢: إذا كانت نها  $(3s) = 5$  ،  
فجد:

(أ) نها  $(s)$   $\leftarrow$  س ٢

(ب) نها  $(2s + (s^2))$   $\leftarrow$  س ٢

## إيجاد النهاية من خلال طرق التحليل (العامل المشترك)

$$(3) \text{ نها } \frac{2س^2 + 3س + 2}{س} \leftarrow 0$$

$$(4) \text{ نها } \frac{س^2 - 2س}{س^2 - 10س} \leftarrow 2$$

$$(5) \text{ نها } \frac{4س - 20}{س - 5} \leftarrow 5$$

$$(6) \text{ نها } \frac{5س^2 - 10س}{س - 2} \leftarrow 2$$

$$(7) \text{ نها } \frac{س^2 - 4س}{8س - 4س} \leftarrow 2$$

$$(8) \text{ نها } \frac{س^2 + 5س}{س^2} \leftarrow 2$$

$$(9) \text{ نها } \frac{س^2 - 4س}{س - 2} \leftarrow 2$$

نأخذ العامل المشترك إذا كان هناك نهاية لكسر يحتوي على كثير حدود مقسوماً على كثير حدود ويوجد عامل مشترك أما في البسط أو في المقام وشرط أساسي ان يكون ناتج التعويض المباشر هو ( ÷ ).

**العامل المشترك:** يمكن أن يكون (عدد أو س أو - )

**مثال ٢٦:** حدد العامل المشترك لكل من المقادير التالية:

المقدار	العامل المشترك	الشكل الجديد
س <sup>٢</sup> - س		
س <sup>٣</sup> - س <sup>٢</sup>		
س <sup>٢</sup> - ٢		
١٥ - س <sup>٣</sup>		
٦ - س <sup>٣</sup>		
س <sup>٣</sup> - ٢س <sup>٢</sup>		
٥س - ٥س <sup>٢</sup>		
س - ٢		
س <sup>٣</sup> + ٢		

**مثال ٢٧:** جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \text{ نها } \frac{س^2 - 2س}{س} \leftarrow 2$$

$$(2) \text{ نها } \frac{س^2 - 12س}{س^2 - 15س} \leftarrow 3$$

## إيجاد النهاية من خلال التحليل (الفرق بين مربعين)

مثال ٣٠: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 1}{s - 1}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^3 - 9s}{s^2 - 9}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 - s - 2}{s^2 - 2s}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 16}{s^2 - 8s}$$

$$(6) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 - 25}{s + 5}$$

مثال ٣١: إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 9} (s^2 - 9) = 0$ ،

$$\text{فجد قيمة النهاية التالي: } \lim_{s \rightarrow 9} \frac{(s^2 - 9)(9)}{s + 3}$$

نحل العبارة ثنائية الحدود باستخدام طريقة الفرق بين مربعين، حيث يجب أن تكون مكتوبة على الصورة  $(s^2 - 2)$

وأن يكون ناتج التعويض المباشر هو  $(\div)$ .

الشكل العام للفرق بين مربعين

$$(s^2 - 2) = (s - 1)(s + 1)$$

خطوات تحليل الفرق بين مربعين

مثال ٢٨: حل العبارة  $s^2 - 9$

(١) نحول العدد الثابت إلى صيغة تربيعية

$$s^2 - 9$$

(٢) نفتح قوسين،

• في القوس الأول نضع  $(s - 3)$

• في القوس الثاني نضع  $(s + 3)$

$$(s - 3)(s + 3)$$

مثال ٢٩: حل العبارات التالية:

العبارة	تحليل العبارة
$s^2 - 1$	
$s^2 - 4$	
$s^2 - 9$	
$s^2 - 16$	
$9 - s^2$	
$s^2 + 1$	
$81 + s^2$	

ملاحظة: لا يوجد شيء اسمه مجموع مربعين في الرياضيات.

## إيجاد النهاية من خلال التحليل (الفرق بين مربعين)

مثال ٣٢: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{(s-2)(s-1)}{s-1}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s-1)(s-4)}{s-3}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s-2)(s-4) - 4}{s-2}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s-2)(s-6)}{s+2}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{(s+2)(s-25)}{s-3}$$

$$(6) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2 + 3s - 4}{(s+2)(s+3) - 25}$$

منصة

التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## إيجاد النهاية من خلال التحليل (فرق أو مجموع مكعبين)

مثال ٣٤: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^3 - 27}{s - 3}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^3 - 64}{s - 4}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^3 - 27}{s^2 - 3s}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 5} \frac{s^3 - 125}{s^2 - 25}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 - 8}{s^2 - 4}$$

مثال ٣٥: إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 3} f(s) = 3$ ،

$$\text{فجد } \lim_{s \rightarrow 2} \frac{f(s) - f(2)}{s - 2}$$

نحلل العبارة ثنائية الحدود باستخدام طريقة فرق أو مجموع مكعبين، حيث يجب أن يكون مكتوب بإحدى الأشكال التالية:

$$(s^3 - 3^3) \quad (s^3 + 3^3)$$

وأن يكون ناتج التعويض المباشر هو  $(\div)$ .

الشكل العام للفرق بين مكعبين

$$(s^3 - 3^3) = (s - 3)(s^2 + 3s + 9)$$

الأول تكعيب - الثاني تكعيب = (الأول - الثاني) (الأول تربيع + الأول × الثاني + الثاني تربيع)

الشكل العام لمجموع مكعبين

$$(s^3 + 3^3) = (s + 3)(s^2 - 3s + 9)$$

الأول تكعيب + الثاني تكعيب = (الأول + الثاني) (الأول تربيع - الأول × الثاني + الثاني تربيع)

مثال ٣٣: حلل العبارات التالية:

العبارة	تحليل العبارة
$s^3 - 1$	
$s^3 + 1$	
$s^3 - 8$	
$s^3 - 27$	
$s^3 + 125$	
$s^3 - 64$	
$s^3 + 216$	
$s^3 - 8$	
$s^3 - 27$	

ملاحظة: القوس الكبير في تحليل فرق ومجموع مكعبين لا يحل.

## إيجاد النهاية من خلال التحليل (العبرة التربيعية)

مثال ٣٧: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 5s + 6}{s - 2}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^2 - 3s + 2}{s - 2}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 6} \frac{s^2 + 2s - 24}{s + 6}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 - 2s - 12}{s - 4}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 + 5s + 6}{s - 2}$$

$$(6) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 - 3s - 4}{s - 12}$$

$$(7) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 6s + 9}{s - 2}$$

نحلل العبرة الثلاثية باستخدام تحليل العبرة التربيعية، حيث يجب أن تكون مكتوبة على الصيغة التالية:  $أس^٢ + بس + ج$

وأن يكون ناتج التعويض المباشر هو  $(\div)$ .

الشكل العام للعبرة التربيعية  $(أس^٢ + بس + ج)$

$$أس^٢ + بس + ج$$

خطوات تحليل العبرة التربيعية

مثال ٣٦: حلل العبرة  $أس^٢ - ٢س - ٨$

(١) نفتح قوسين، وفي كل قوس نضع  $س$

$$(س) (س)$$

(٢) نضع الإشارات على النحو التالي:

• في القوس الأول إشارة الحد الأوسط.

• في القوس الثاني نضع حاصل ضرب الاشارتين.

$$(س - ) (س + )$$

(٣) نبحث عن عددين يكون حاصل ضربهم الحد الأخير.

وحاصل جمعهم الحد الأوسط.

$$(س - ٤) (س + ٢)$$

(٤) نتأكد من الحل من خلال جمع العددين.

حيث يجب أن يكون حاصل جمعهم هو نفسه الحد الأوسط.

ملاحظة:

• يمكن الاستفادة من ذيل النهاية عند تحليل العبرة التربيعية.

• يوجد طريقة أخرى لتحليل العبرة التربيعية إذا كان معامل

$(س^٢)$  أكبر من واحد.



## إيجاد النهاية من خلال التحليل (العبرة التربيعية)

مثال ٣٨: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 + s - 20}{s^2 - 4s}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 - 6s}{s^2 - 2s - 3}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 + 3s - 4}{s^2 + 12}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 + 3s^2}{s^2 - 2s - 3}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 2s - 22}{s^2 - 6}$$

$$(6) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^3 - 2s - 5}{s^2 + 2}$$

مثال ٣٩: جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{s^2 + 3s - 18}{s^2 + s - 12}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{s^3 + 4s - 20}{s^2 + 3s - 22}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 - 5s - 60}{s^3 + 10s - 88}$$

منصة

التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

## ما المقصود بالمرافق

$$س^2 - 1 = (س - 1)(س + 1)$$

الحدين  $(س + 1)(س - 1)$  كل حد منهما هو مرافق للآخر.

مثال ٤٠: حدد المرافق وحاصل الضرب لكل من المقادير التالية:

$$\text{مثال ٤١: جد نهايتها} \frac{3 - \sqrt{5س - 1}}{س - 2}$$

(١) نعوض مباشرة للتأكد بان الناتج هو  $(\frac{\div}{\div})$ .

(٢) نضرب النهاية بالـ (المرافق): للتخلص من الجذور واختصار

العامل الصفري، وهو نفس المقدار الذي يحتوي على الجذر سواء كان في المقام أو في البسط بدون تغيير إشارة ما بداخل الجذر ولكن بعكس إشارة السالب الموجودة خارج الجذر ولا تنسى أن تقسم على المقدار نفسه.

$$\frac{3 + \sqrt{5س - 1}}{س + 2} \times \frac{3 - \sqrt{5س - 1}}{س - 2}$$

(٣) نكتب ما بداخل الجذر كما هو ونطرح منه مربع العدد الموجود خارج الجذر ونقسم على مقام الأول والمقام الثاني.

$$\frac{9 - 1 - 5س}{(س + 3)(س - 2)}$$

(٤) نبسط المقدار (جمع وطرح الحدود المتشابهة)، قد نلجأ للتحليل.

$$\frac{8 - 5س}{(س + 3)(س - 2)}$$

(٥) اختصار الحدود المتشابهة.

$$\frac{8 - 5س}{(س + 3)(س - 2)}$$

(٦) نعوض بقيمة (س).

$$\frac{8}{6} = \frac{8}{(3 + 3)} = \frac{8}{(3 + 9)}$$

المقدار	المرافق	ناتج الضرب
$(س + ٥)$		
$(س - ٣)$		
$٢ - \sqrt{س}$		
$\sqrt{س} - ٣$		
$٣ - 1 + \sqrt{س}$		
$٢ + \sqrt{س} - ٣$		
$1 - \sqrt{س} + ٥$		
$٢ - 2 + 3\sqrt{س}$		
$٢ - 1 + 3\sqrt{س}$		
$1 + \sqrt{س} - 1$		
$1 + 3\sqrt{س} - ٤$		

## إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

مثال ٢٤: جد قيمة النهاية التالية:

$$(1) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s}$$

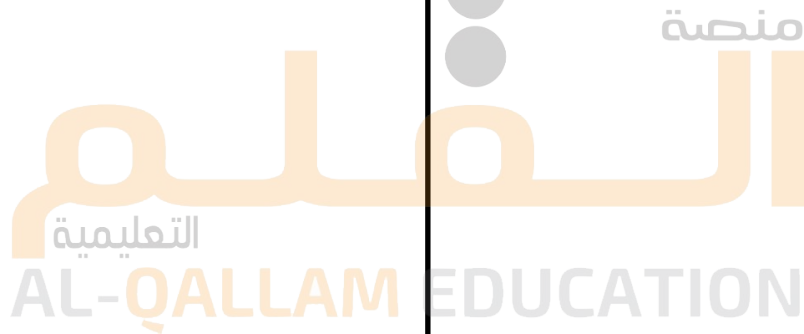
$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow 4} \frac{\sqrt{s} - 2}{s - 4}$$

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{s} - 1}{s}$$

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\sqrt{s} - 2}{s - 3}$$

$$(5) \quad \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{s}}{1 - s^2}$$

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 7} \frac{5 - \sqrt{s} + 3s}{s^2 - 49}$$



## إيجاد النهاية من خلال الضرب بالمرافق

مثال ٣: جد قيمة النهاية التالية:

$$(1) \quad \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\sqrt{s+3} - \sqrt{s-7}}{s-8}$$

$$(5) \quad \lim_{s \rightarrow 8} \frac{\sqrt{s+3} - 1}{s-8}$$

$$(6) \quad \lim_{s \rightarrow 7} \frac{s+7}{\sqrt{s+16} - 3}$$

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow 9} \frac{s-9}{\sqrt{s}-3}$$

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow 5} \frac{\sqrt{s+9} - 2}{s+5}$$

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 6} \frac{\sqrt{s+3} - 3}{s-6}$$

$$(8) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\sqrt{s+1} - 5}{s-3}$$

$$(4) \quad \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\sqrt{s+6} + 3}{s-3}$$

## إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال ٥ : جد قيمة النهايات التالية:

$$(1) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}}{s - 2}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{4}}{s - 4}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{s} - \frac{1}{3}}{s - 3}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 5} \frac{\frac{2}{s} - \frac{2}{5}}{s - 5}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 1} \frac{\frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+1}}{s - 1}$$

نقوم بتوحيد المقامات إذا كان هناك كسور في البسط أو المقام  
وشرط أساسي ان يكون ناتج التعويض المباشر هو  $(\frac{0}{0})$ .

خطوات إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

$$\text{مثال ٤ : } \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{s} - \frac{s}{s+1}}{s - 2}$$

(1) نعوض مباشرة للتأكد بان الناتج هو  $(\frac{0}{0})$ .

(2) نضع كل المقامات في مقام واحد.

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s(2 - s)}{(s - 2)(s + 1)(s - 3)}$$

(3) نضرب الكسرين ضرب تبادلي

نضع البسط كما هو ولكن كل بسط في قوس  
وبجانب كل بسط قوس آخر للمقام.

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(1 + s)(2) - (3)(s)}{(3)(1 + s)(2 - s)}$$

(4) نفي أقواس البسط فقط.

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{2 - s^2 - 3s}{(3)(1 + s)(2 - s)}$$

(5) نبسط المقدار (جمع وطرح الحدود المتشابهة).

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{s - 2}{(3)(1 + s)(2 - s)}$$

(6) اختصار الحدود المتشابهة.

$$\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{(3)(1 + s)}$$

(7) نعوض بقيمة (س).

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{(3)(1 + 2)} =$$

## إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال ٦ : جد قيمة النهايات التالية:

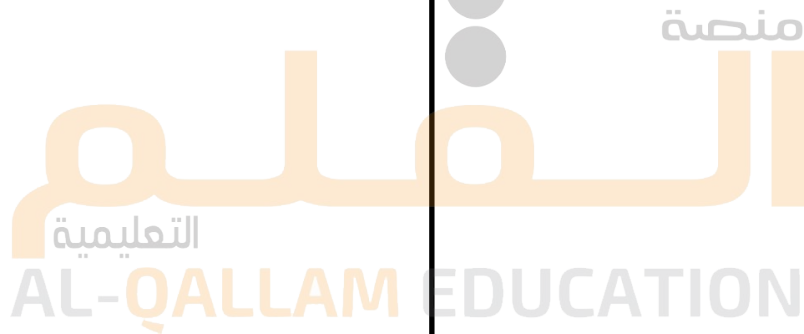
$$(1) \lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{5}{4} - \frac{2}{s}}{s - 2}$$

$$(4) \lim_{s \rightarrow 7} \frac{s - 7}{\frac{7}{s} - \frac{s}{3}}$$

$$(2) \lim_{s \rightarrow 6} \frac{\frac{4}{6+s} - \frac{2}{3+s}}{s}$$

$$(5) \lim_{s \rightarrow 3} \frac{\frac{4}{5} - \frac{4}{2+s}}{9 - s^2}$$

$$(3) \lim_{s \rightarrow 4} \frac{s^2 - 2s}{\frac{1}{s} - \frac{1}{2}}$$



## إيجاد النهاية من خلال توحيد المقامات

مثال ٤٧: جد قيمة النهايات التالية:

(١)  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{s+1}}{s - 2}$

(٥)  $\lim_{s \rightarrow 7} \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{s-2}}{s - 2}$

(٦)  $\lim_{s \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{5} - \frac{2}{s+2}}{s - 9}$

(٢)  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{s}}{s - 4}$

(٧)  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{3} + \frac{s-1}{s}}{s + 2}$

(٣)  $\lim_{s \rightarrow 4} \frac{s - 8}{\frac{1}{s} - \frac{1}{s-2}}$

منصة

التعليمية

مثال ٤٨: إذا كان  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{2}$ ،  
فجد  $\lim_{s \rightarrow 2} \frac{(s+2) - (s-2)}{s}$

(٤)  $\lim_{s \rightarrow 8} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{s}}{s - 8}$

## إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} 3 < s \text{ ، } 1 + s^2 \\ 3 \geq s \text{ ، } 2 - s \end{array} \right\} = \text{مثال ٥٠: إذا كان } s \text{ و (س)}$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٤

$$(2) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ١

$$(3) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٣

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← +٣

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← -٣

$$(4) \text{ و (3)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 < s \text{ ، } 3 + s^3 \\ 1 > s \text{ ، } s^2 \end{array} \right\} = \text{مثال ٥١: إذا كان } s \text{ و (س)}$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٢

$$(2) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٠

$$(3) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ١

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← +١

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← -١

$$(4) \text{ و (1)}$$

$$(5) \text{ و (3)}$$

$$(6) \text{ و (2-)}$$

$$(7) \text{ و (}\frac{1}{3}\text{)}$$

**الاقتران المتشعب:** هو اقتران  $s$  و (س) له أكثر من قاعدة وكل قاعدة لها فترة، المطلوب إيجاد النهاية أو الصورة عند العدد (١).

## (١) إذا كان المطلوب (نهاية)

- إذا كان (١) ليست نقطة تشعب (نعوض مباشرة)
- إذا كان (١) نقطة تشعب (نجد النهاية من اليمين واليسار) وإذا كانت النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار تكون (النهاية موجودة) وغير ذلك (النهاية غير موجودة)

## (٢) إذا كان المطلوب (صورة)

- إذا كان (١) ليست نقطة تشعب (نعوض مباشرة)
- إذا كان (١) نقطة تشعب (نعوض عند إشارة المساواة) وإذا لم يكن هناك إشارة مساواة تكون الصورة (غير معرفه)

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s \text{ ، } 3 + s^2 \\ 2 > s \text{ ، } 1 - s \end{array} \right\} = \text{مثال ٤٩: إذا كان } s \text{ و (س)}$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٥

$$(2) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٠

$$(3) \text{ نهاية (س)}$$

س ← ٢

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← +٢

$$\text{نهاية (س)}$$

س ← -٢

$$(4) \text{ و (3)}$$

$$(5) \text{ و (1)}$$

$$(6) \text{ و (2)}$$

$$(7) \text{ و (0)}$$

$$(8) \text{ و (2-)}$$

$$(9) \text{ و (}\frac{1}{3}\text{)}$$



## إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s \text{ ، } s^2 \\ 2 > s \text{ ، } 2s \\ 2 = s \text{ ، } 5 \end{array} \right\} = \text{مثال ٥٤: إذا كان } f(s) = (s)$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(2) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(3) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$\text{نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$\text{نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$(4) \text{ و } (2)$$

$$(5) \text{ و } (5-)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 < s \text{ ، } 6 + 5s \\ 2 > s \text{ ، } 1 + 7s \\ 2 = s \text{ ، } 10 + 2s \end{array} \right\} = \text{مثال ٥٥: إذا كان } f(s) = (s)$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 1$$

$$(2) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(3) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$\text{نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$\text{نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$(4) \text{ و } (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \neq s \text{ ، } \frac{9-s^2}{3-s} \\ 3 = s \text{ ، } 3 \end{array} \right\} = \text{مثال ٥٢: إذا كان } f(s) = (s)$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(2) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 4$$

$$(3) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(4) \text{ و } (3)$$

$$(5) \text{ و } (0)$$

$$(6) \text{ و } (1-)$$

$$(7) \text{ و } (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \neq s \text{ ، } \frac{4-s^2}{2-s} \\ 2 = s \text{ ، } 4 \end{array} \right\} = \text{مثال ٥٣: إذا كان } f(s) = (s)$$

جد كلاً من:

$$(1) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$(2) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 3$$

$$(3) \text{ نهاية } f(s) \text{ من } s \leftarrow 2$$

$$(4) \text{ و } (2)$$

$$(5) \text{ و } (0)$$

$$(6) \text{ و } (3)$$

$$(7) \text{ و } (2-)$$

$$(8) \text{ و } (\frac{1}{2})$$

## إيجاد النهاية من الاقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٥٧: إذا كان } (س) = س + ٧, س \in \mathbb{R} \\ \text{مثال ٥٦: إذا كان } (س) = س + ٣, س \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

حيث (ص) تمثل مجموعة الأعداد الصحيحة.

جد كلاً من:

$$(١) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٢) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٣) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٤) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٥) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٦) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٧) \text{ و } (٨)$$

$$(٨) \text{ و } (\frac{1}{3})$$

$$(٩) \text{ و } (٠)$$

$$(١٠) \text{ و } (\frac{1}{2})$$

ملاحظة:

- ✓ عند إيجاد النهاية تذكر أن الأعداد تقترب من العدد (أ) ولا يساويه.
- ✓ عند إيجاد الصورة تذكر أن العدد الصحيح يعوض بقاعدة (س ∈ ℝ).

مثال ٥٦: إذا كان

$$\left. \begin{array}{l} (س) = س + ٥, س > ٣ \\ (س) = ١٧, ٣ ≤ س ≤ ٦ \\ (س) = ١ - س, س < ٦ \end{array} \right\}$$

جد كلاً من:

$$(١) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$\text{نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$\text{نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٢) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$\text{نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$\text{نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٣) \text{ و } (٣)$$

$$(٤) \text{ و } (٦)$$

$$(٥) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٦) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٧) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٨) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

$$(٩) \text{ نهاية } (س) \\ \leftarrow س$$

منصة

القلم التعليمي  
AL-QALLAM EDUCATION

## إيجاد الثوابت من الإقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} 5s - 2l \\ 2 + s \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان } (s) \text{ موجوداً}$$

جد قيمة (ل) والتي تجعل نهايه (س) موجودة.

يمكن إيجاد الثوابت من خلال النهايات الموجودة.

$$\left. \begin{array}{l} 2s \\ 2s \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان } (s) \text{ موجوداً}$$

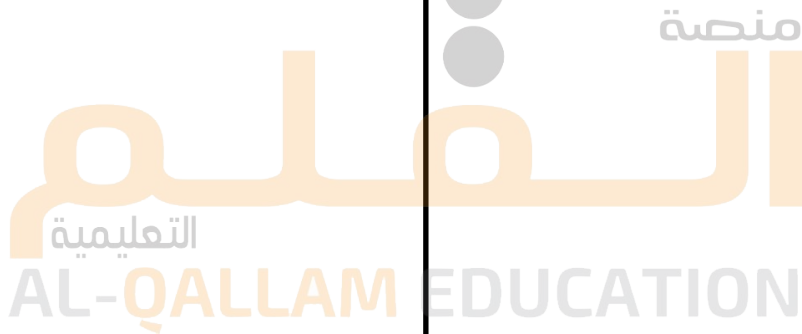
جد قيمة (أ) والتي تجعل نهايه (س) موجودة.

$$\left. \begin{array}{l} 1 - a \\ 3 - as \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان } (s) \text{ موجوداً}$$

وكانت نهايه (س) موجودة، فما قيمة الثابت (أ).

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 9s \\ 3 - as \\ 2 = s \end{array} \right\} = (s) \text{ إذا كان } (s) \text{ موجوداً}$$

جد قيمة (أ) والتي تجعل نهايه (س) موجودة.



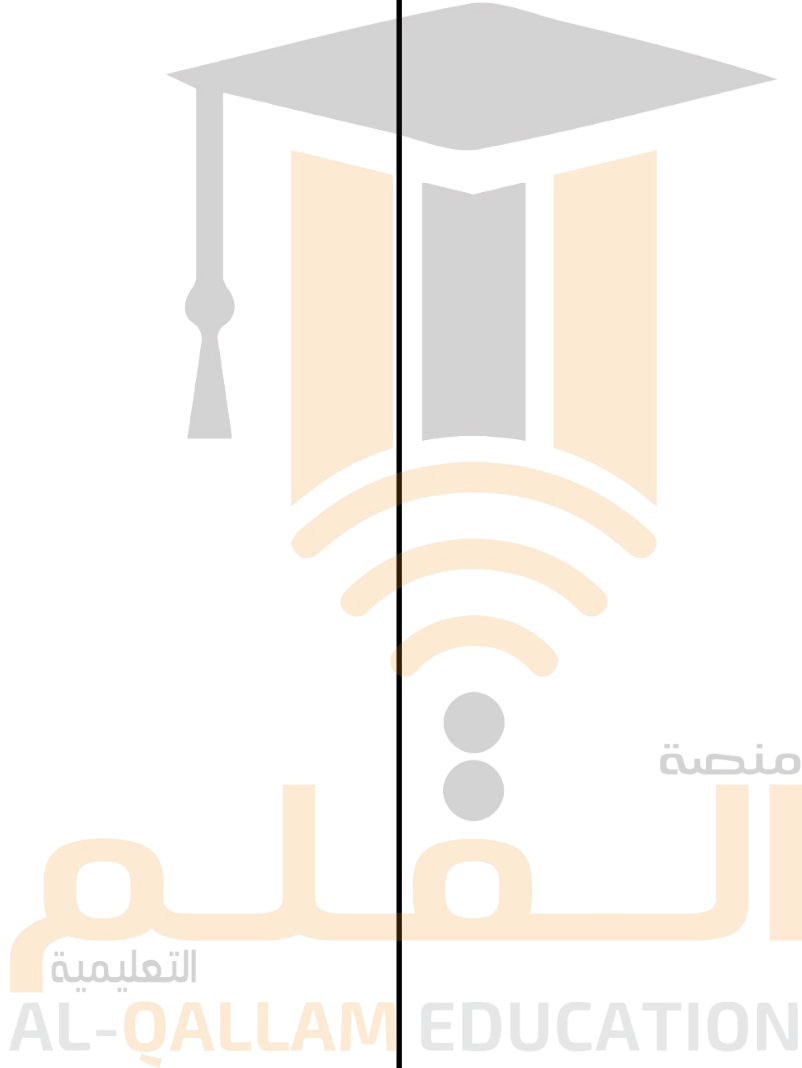
## إيجاد الثوابت من الإقتران المتشعب

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٦٣: إذا كان } (س) \text{ و} \\ \text{وكانت نهاؤه (س) = ٦٤، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مثال ٦٣: إذا كان } (س) \text{ و} \\ \text{وكانت نهاؤه (س) = ٦٤، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)} \end{array}$$

س ← ٢

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٦٢: إذا كان } (س) \text{ و} \\ \text{وكانت نهاؤه (س) = ١٤، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{مثال ٦٢: إذا كان } (س) \text{ و} \\ \text{وكانت نهاؤه (س) = ١٤، جد قيمة الثوابت (أ) و (ب)} \end{array}$$

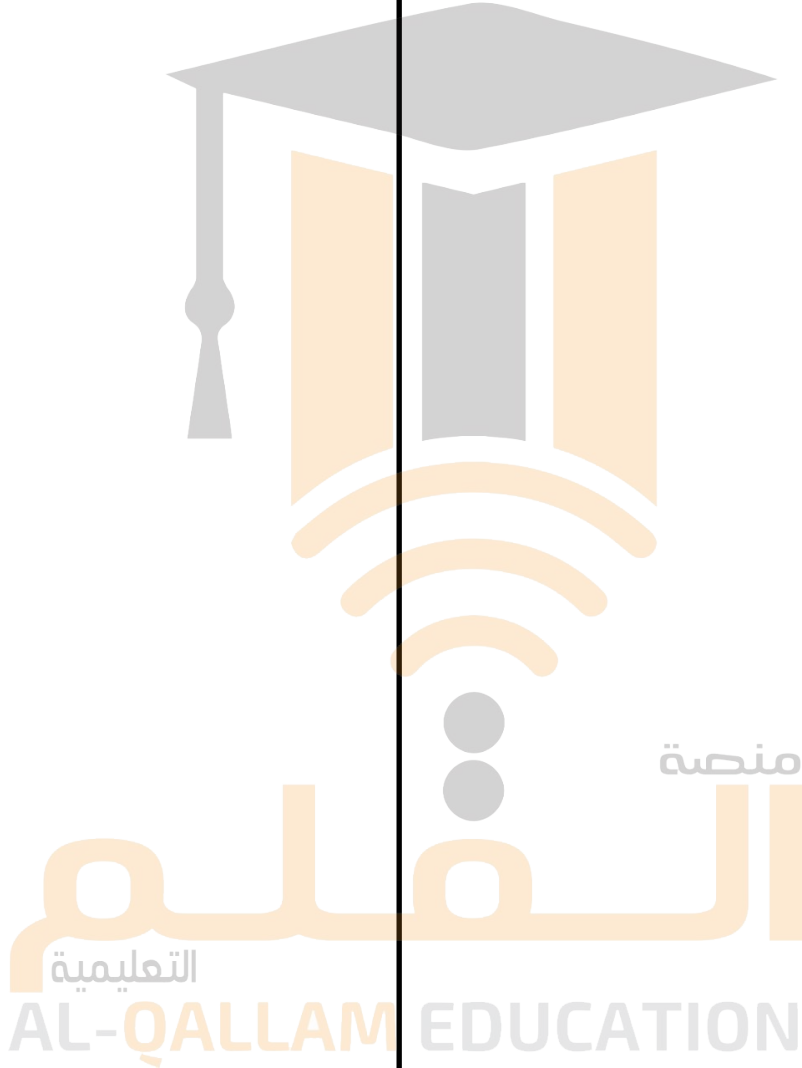
س ← ٣



## إيجاد الثوابت من الإقتران المتشعب

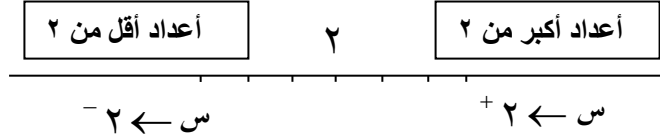
$$\left. \begin{array}{l} ١ > س ، ١ - س \\ ١ \leq س ، ٧ + ٢ س \end{array} \right\} = (س) \text{ إذا كان } (س) \text{ نهياً}$$

وكانت نهياً  $(س) = ١٦$  ، نهياً  $(س)$  موجودة ،  
س ← ١ س ← ٣  
 فما قيمة كلاً من الثابتين (أ) و (ب)

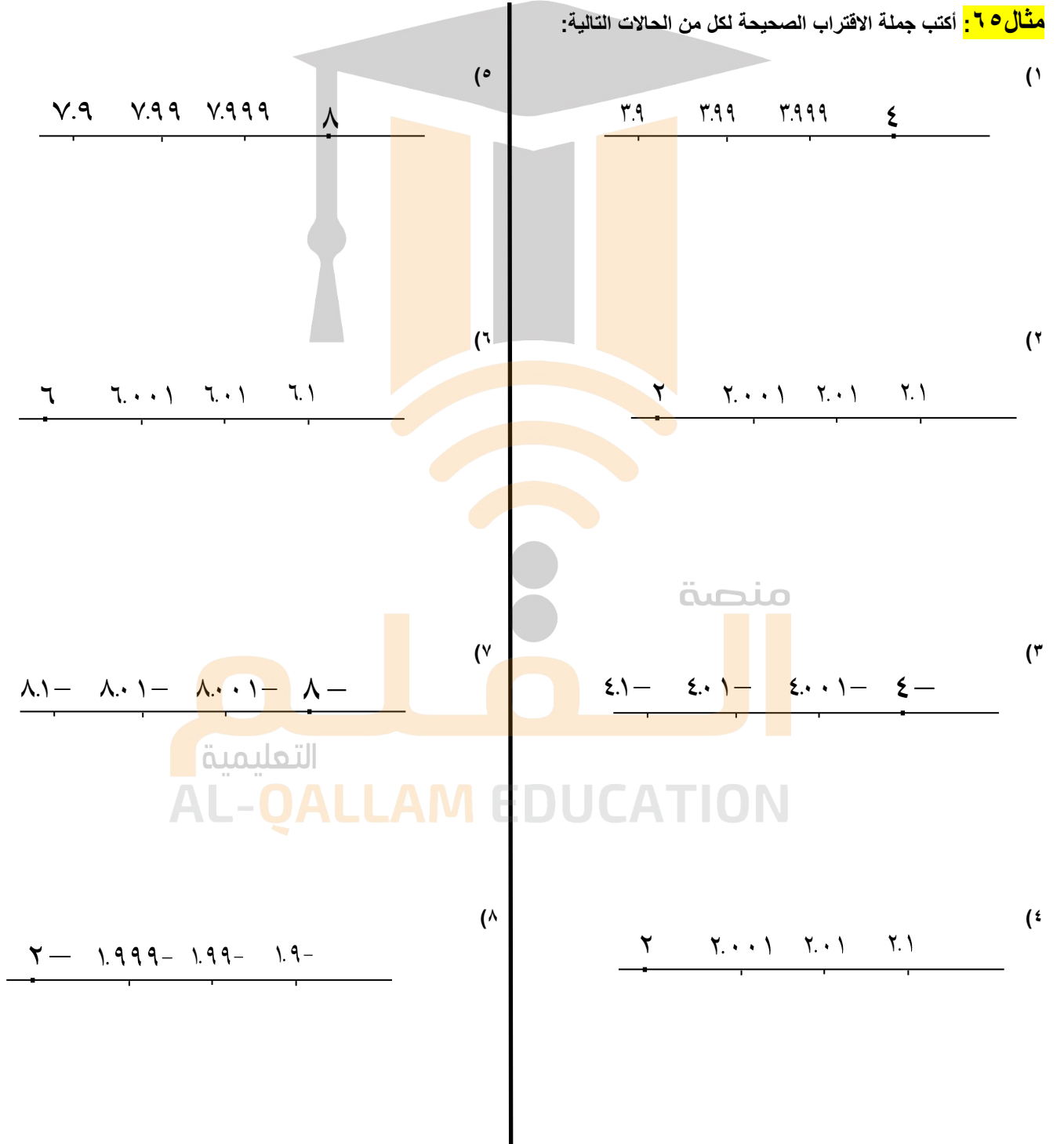


## توضيح معنى الاقتراب

س ← ٢ ( العدد س يقترب من ٢ شيئاً فشيئاً ولا يساويها ) ، الاقتراب لا يعني المساواة



مثال ٥: أكتب جملة الاقتراب الصحيحة لكل من الحالات التالية:



## إيجاد النهاية من خلال الجدول

## إيجاد النهاية من الجدول مباشرة

مثال ٧٠: بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,١	٤,١١	٤,١١١
ق(س)	٦,٩	٦,٩٩	٦,٩٩٩	٥	٥,١	٥,١١	٥,١١١

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٤$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٤$$

$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٤$$

$$(٤) \text{ نهاية (٤)}$$

## إيجاد النهاية بعد تكوين جدول

مثال ٧١: كون الجدول التالي،

من خلال الاقتران  $(س) = س + ١$ ، ثم جد نهاية (س)

س	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢	١,٩	١,٨	١,٧
ق(س)							

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

مثال ٧٢: كون الجدول التالي، من خلال الاقتران  $(س)$ ، علماً أن

$$(س) = \left. \begin{array}{l} ٢ \leq س \\ ٢ > س \end{array} \right\}$$

س	١,٠٣	١,٠٢	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩٨	٠,٩٧
ق(س)							

ثم جد:

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

$$\text{نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

$$\text{نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

$$(٢) \text{ نهاية (١)}$$

## إيجاد النهاية من الجدول مباشرة

مثال ٦٦: بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٥,١	٥,٠١	٥,٠٠١	٥	٤,٩٩٩	٤,٩٩	٤,٩
ق(س)	٧,١	٧,٠١	٧,٠٠١	٧	٦,٩٩٩	٦,٩٩	٦,٩

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٥$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٥$$

$$(٤) \text{ نهاية (٥)}$$

$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٥$$

مثال ٦٧: بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	١,١	١,٠١	١,٠٠١	١	٠,٩٩٩	٠,٩٩	٠,٩
ق(س)	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

$$(٤) \text{ نهاية (١)}$$

$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ١$$

مثال ٦٨: بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	٣,١	٣,٠١	٣,٠٠١	٣	٢,٩٩٩	٢,٩٩	٢,٩
ق(س)	٧,١	٧,٠١	٧,٠٠١	٧	٦,٩٩٩	٦,٩٩	٦,٩

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٣$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٣$$

$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٣$$

$$(٤) \text{ نهاية (٣)}$$

مثال ٦٩: بالاعتماد على الجدول التالي، جد ما يلي:

س	-١,٧	-١,٨	-١,٩	-٢	-٢,١	-٢,٢	-٢,٣
ق(س)	٣,٣	٣,٢	٣,١	٥	١,٩	١,٨	١,٧

$$(٢) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

$$(١) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

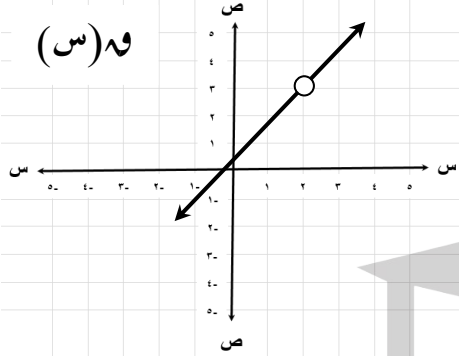
$$(٣) \text{ نهاية (س)}$$

$$\text{س} \leftarrow ٢$$

$$(٤) \text{ نهاية (٢-)}$$

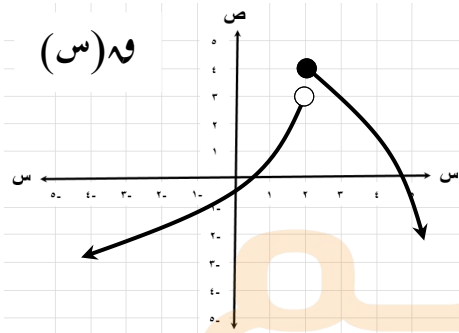
## إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ٧٣: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



- (١) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢+
- (٢) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢-
- (٣) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢
- (٤) نهاية (٢)

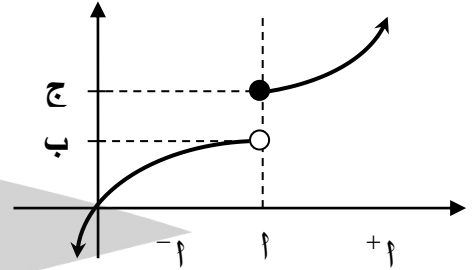
مثال ٧٤: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



- (١) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢+
- (٢) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢-
- (٣) نهاية (س)  $\leftarrow$  ٢
- (٤) نهاية (٢)

(٥) ماهي قيم (١) التي تجعل من النهاية غير موجودة.

لإيجاد النهاية من خلال الرسم نقوم برسم خط منقطع عمودي على محور السينات عند (س = ١) يوازي محور الصادات.



- (النهاية من اليمين) إذا لمس الخط المتقطع الاقتران من جهة اليمين نأخذ الجواب من محور الصادات.

$$\text{نهاية (س) = ج} \leftarrow$$

- (النهاية من اليسار) إذا لمس الخط المتقطع الاقتران من جهة اليسار نأخذ الجواب من محور الصادات.

$$\text{نهاية (س) = ب} \leftarrow$$

- (الصورة) الدائرة المغلقة أو الخط المتصل

تمثل صورة العدد (١) وتكتب على الشكل نهاية (١) = ج وفي حال عدم وجود دائرة مغلقة تكون الصورة غير معرفة وتكتب على الشكل نهاية (١) = غير معرفة

وبذلك يكون الحل على الشكل التالي:

$$\text{نهاية (س) = ج} \leftarrow$$

$$\text{نهاية (س) = ب} \leftarrow$$

$$\text{نهاية (س) = غير موجودة} \leftarrow$$

$$\text{نهاية (١) = ج}$$

ملاحظة:

- النهاية موجودة (إذا كانت النهاية من جهة اليمين = النهاية من جهة اليسار) وتساوي نفس الجواب.

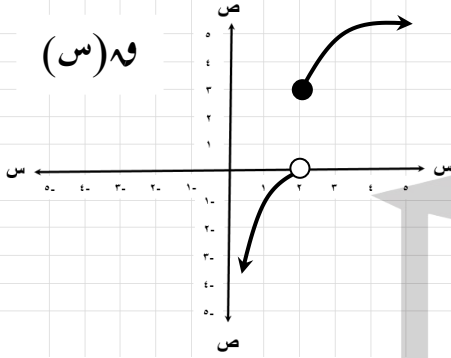
- النهاية غير موجودة (إذا وجد قفزة أو انقطاع في الاقتران)



## إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ٧٧: يمثل الشكل منحنى  $f(x)$ ،

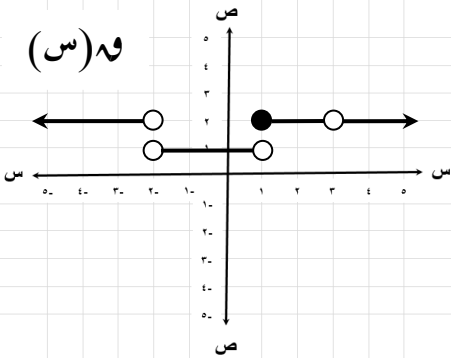
إذا كانت نهاية  $f(x)$  غير موجودة، جد قيم  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$



وه  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

مثال ٧٨: من الشكل التالي، ما قيم  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

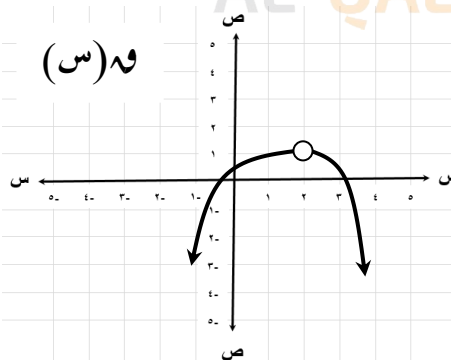
حيث يكون عندها نهاية  $f(x)$  غير موجودة



وه  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

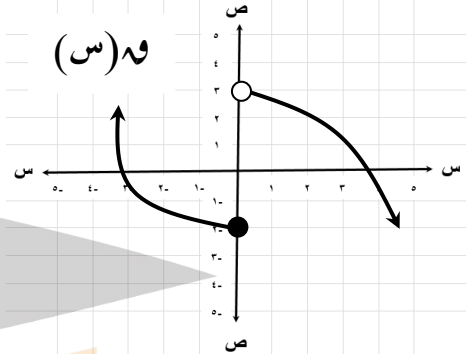
مثال ٧٩: مستعيناً بالرسم التالي للاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$ ، جد قيم  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

التي تجعل النهاية غير موجودة على الفترة  $[3, 6]$



وه  $(\lim_{x \rightarrow 2} f(x))$

مثال ٧٥: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



وه  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

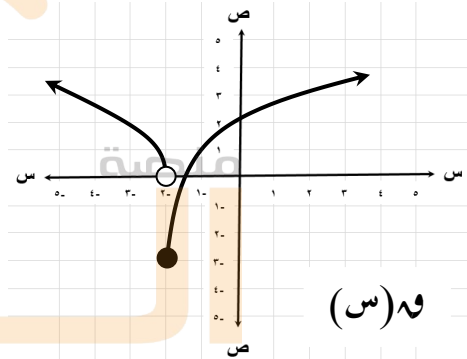
(١) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(٢) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

(٣) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

(٤)  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = 0$

مثال ٧٦: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



وه  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$

(١) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(٢) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

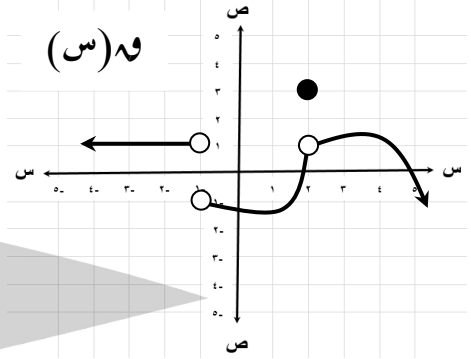
(٣) نهاية  $f(x)$   $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

(٤)  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = 2$

(٥) قيمة الثابت  $(\lim_{x \rightarrow 1} f(x)) = 0$ ، حيث نهاية  $f(x) = 0$

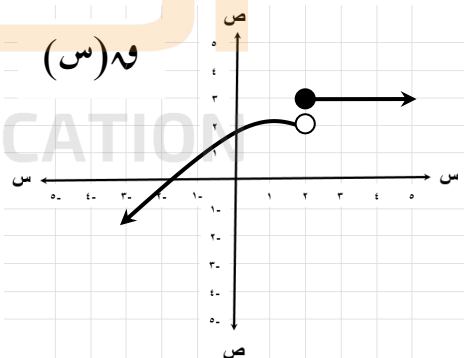
## إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ٨٠: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



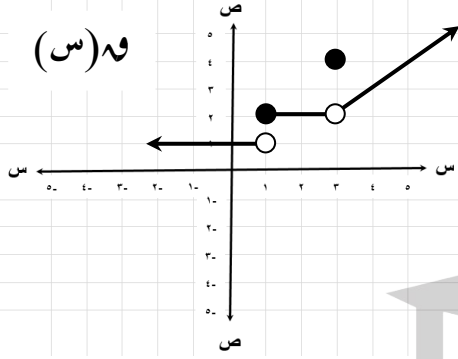
- (١) نهاية (س)  $\leftarrow +2$
- (٢) نهاية (س)  $\leftarrow -2$
- (٣) نهاية (س)  $\leftarrow 2$
- (٤) نهاية (س)  $\leftarrow +1$
- (٥) نهاية (س)  $\leftarrow -1$
- (٦) نهاية (س)  $\leftarrow 1$
- (٧) نهاية (س)  $\leftarrow (1-)$
- (٨) نهاية (س)  $\leftarrow (2)$

مثال ٨١: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



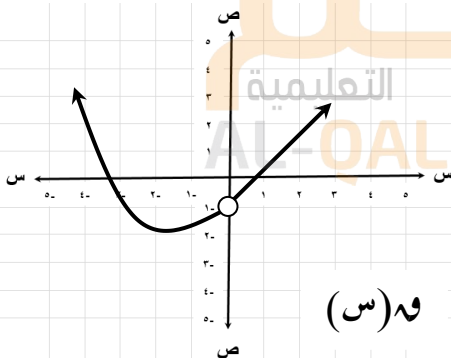
- (١) نهاية (س)  $\leftarrow 2$
- (٢) نهاية (س)  $\leftarrow (2)$

مثال ٨٢: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



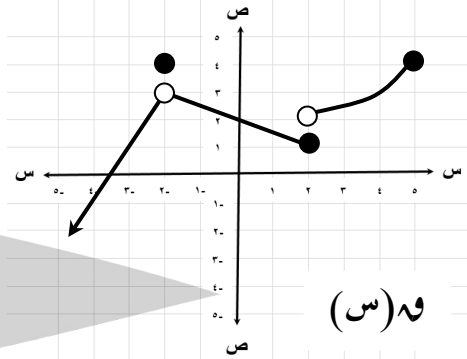
- (١) نهاية (س)  $\leftarrow +1$
- (٢) نهاية (س)  $\leftarrow -1$
- (٣) نهاية (س)  $\leftarrow 1$
- (٤) نهاية (س)  $\leftarrow +3$
- (٥) نهاية (س)  $\leftarrow 0$
- (٦) نهاية (س)  $\leftarrow (1)$
- (٧) نهاية (س)  $\leftarrow (3)$
- (٨) نهاية (س)  $\leftarrow (0)$

مثال ٨٣: بالاعتماد على الشكل التالي،

جد قيمة الثابت (ب)، حيث نهاية (س) = ٠  $\leftarrow ب$

## إيجاد النهاية من خلال الرسم

مثال ٨٤: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



وهـ (س)

(١) نهاية (س)  
س ← ٤(٢) نهاية (س)  
س ← ٤ +(٣) نهاية (س)  
س ← ٤ -(٤) نهاية (س)  
س ← ٢ -(٥) نهاية (س)  
س ← ٢ +(٦) نهاية (س)  
س ← ٢ -(٧) نهاية (س)  
س ← ٢(٨) نهاية (س)  
س ← ٢ +(٩) نهاية (س)  
س ← ٢ -(١٠) نهاية (س)  
س ← ٥(١١) نهاية (س)  
س ← ٣ -

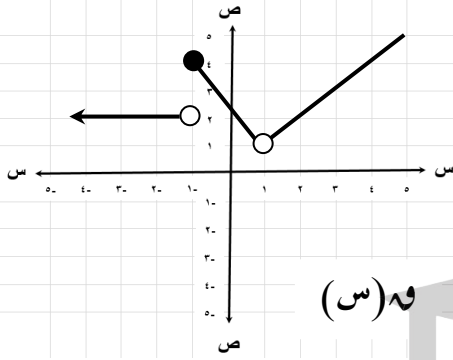
(١٢) وهـ (٢-)

(١٣) وهـ (٢)

(١٤) وهـ (٥)

(١٥) ماهي قيم (١) التي تجعل من النهاية غير موجودة.

مثال ٨٥: بالاعتماد على الشكل التالي، جد



وهـ (س)

(١) نهاية (س)  
س ← ١(٢) نهاية (س)  
س ← ١ +(٣) نهاية (س)  
س ← ١ -(٤) نهاية (س)  
س ← ٠(٥) نهاية (س)  
س ← ١ -(٦) نهاية (س)  
س ← ١ +(٧) نهاية (س)  
س ← ١ -(٨) نهاية (س)  
س ← ٣ +(٩) نهاية (س)  
س ← ٣ -(١٠) نهاية (س)  
س ← ٥ +(١١) نهاية (س + ٢)  
س ← ٤ -(١٢) نهاية (س + ٢) - (٢ + س) - ٢ س + ٥  
س ← ٤ -

(١٣) وهـ (١)

(١٤) وهـ (١-)

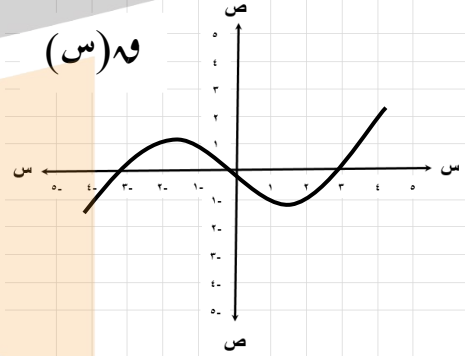
## الاتصال

### الاتصال من خلال الرسم

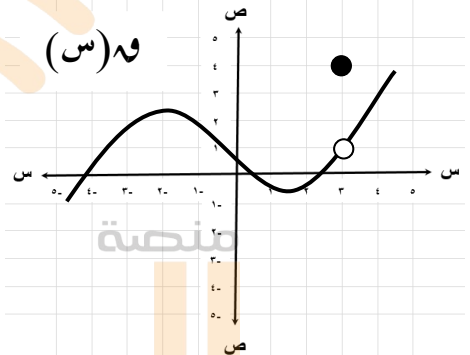
يكون الاقتران  $f(x)$  متصل إذا كان المنحنى  $f(x)$  مرسوم بدون قفزات أو انقطاع بالرسم أو نقطة مفتوحة.

مثال ٨٦: جد قيم  $x$  التي يكون عندها منحنى الاقتران  $f(x)$  غير متصل.

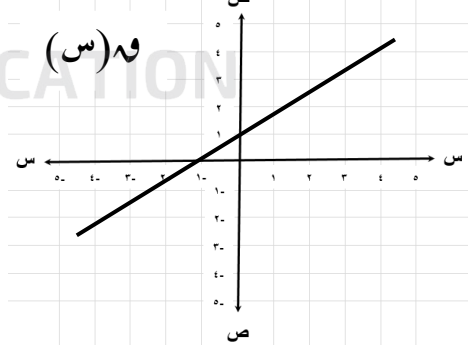
(١)



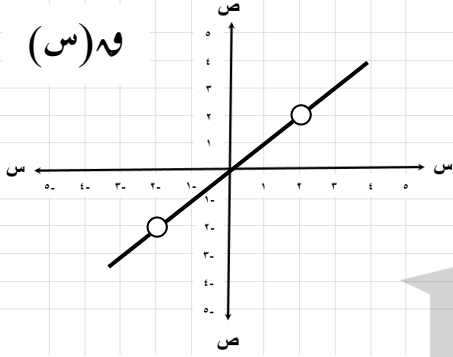
(٢)



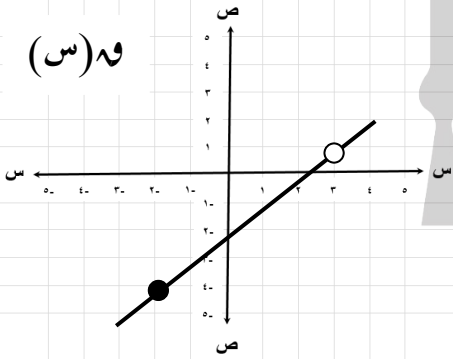
(٣)



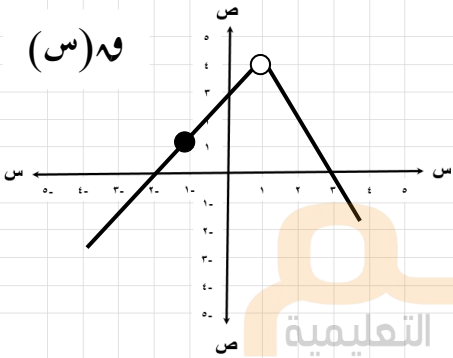
(٤)



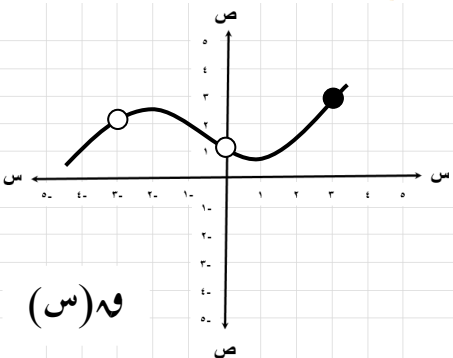
(٥)



(٦)



(٧)



## إيجاد الاتصال عند نقطة

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٠: إذا كان } f(s) = \begin{cases} s^2 + 1, & s \leq 2 \\ s^3 - 3, & s > 2 \end{cases} \\ \text{ابحث في اتصال } f(s) \text{ عند } (s = 2) \end{array} \right\}$$

يكون الاقتران  $f(s)$  متصلًا عند النقطة  $(s = 1)$  إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية معاً:

$$(1) \quad f(s) \text{ معرف عند } (s = 1)$$

$$f(1) = \text{عدد حقيقي (يوجد صورة)}$$

$$(2) \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = f(1) \text{ موجودة، إذا كان}$$

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} f(s) = \lim_{s \rightarrow 1^+} f(s) = f(1)$$

$$(3) \quad \lim_{s \rightarrow 1} f(s) = f(1) \text{ (النهاية = الصورة)}$$

**ملاحظة:** إذا اختلف شرط واحد من الشروط السابقة نتوقف ويكون الاقتران غير متصل عند  $(s = 1)$

**نظرية:** إذا كان  $f(s)$  اقتران كثير حدود، فإن  $f(s)$  متصل دائماً على جميع قيم  $(s)$  الحقيقية.

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩١: إذا كان } f(s) = \begin{cases} 5s + 5, & s \leq 1 \\ 1 + 3s, & s > 1 \end{cases} \\ \text{ابحث في اتصال } f(s) \text{ عند النقطة } (s = 1) \end{array} \right\}$$

$$\text{مثال ٨٧: إذا كان } f(s) = \begin{cases} s^3 + 1, & s \leq 3 \\ s^3 - 3, & s > 3 \end{cases}$$

$$\text{ابحث في اتصال } f(s) \text{ عند } (s = 3)$$

منصة

$$\text{مثال ٨٨: إذا كان } f(s) = \begin{cases} s^2 - 4, & s \leq 2 \\ s^2 - 2, & s > 2 \end{cases}$$

$$\text{ابحث في اتصال } f(s) \text{ عند } (s = 2)$$

$$\text{مثال ٨٩: إذا كان } f(s) = \begin{cases} 5 - \frac{1}{s}, & s \leq 0 \\ s^2, & s > 0 \end{cases}$$

$$\text{ابحث في اتصال } f(s) \text{ عند } (s = 0)$$

## إيجاد الاتصال عند نقطة

مثال ٩٤:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٤:} \\ \text{إذا كان } s \text{ و} (s) = \frac{s^2 - 2s}{s - 5} \text{ ، } s \neq 5 \\ \text{ } s = 5 \text{ ، } s^3 - 5 \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال  $s$  و  $(s)$  عند  $(s = 5)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٢:} \\ \text{إذا كان } s \text{ و} (s) = \left. \begin{array}{l} s^3 + 1 \text{ ، } s < 3 \\ s^4 - 2 \text{ ، } s = 3 \\ s^5 - 5 \text{ ، } s > 3 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال  $s$  و  $(s)$  عند  $(s = 3)$

مثال ٩٥:

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٥:} \\ \text{إذا كان } s \text{ و} (s) = \frac{s^2 - 2s}{s - 2} \text{ ، } s \neq 2 \\ \text{ } s = 2 \text{ ، } 4 \end{array} \right\}$$

فابحث اتصال الاقتران  $s$  و  $(s)$  عندما  $(s = 2)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٣:} \\ \text{إذا كان } s \text{ و} (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 8 \text{ ، } s > 4 \\ s^3 + 3 \text{ ، } s = 4 \\ s^2 \text{ ، } s < 4 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال  $s$  و  $(s)$  عند  $(s = 4)$

منصة  
التعليم  
AL-QALLAM EDUCATION

$$\left. \begin{array}{l} \text{مثال ٩٦:} \\ \text{إذا كان } s \text{ و} (s) = \left. \begin{array}{l} s^2 + 1 \text{ ، } s < 1 \\ s + 1 \text{ ، } s > 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\}$$

ابحث في اتصال الاقتران  $s$  و  $(s)$  عند  $(s = 1)$

## إيجاد الاتصال عند نقطة

$$\left. \begin{array}{l} s \leq 3 \\ 0 < s < 3 \\ s \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s^2 \\ s \\ s^3 \end{array} = \text{مثال ٩٩: إذا كان } s \text{ و} (s) \text{ و} (s)$$

ابحث في اتصال و (س)

عند (س = ٢) و (س = ٣) و (س = ٠)

مثال ٩٧: إذا كان

$$\left. \begin{array}{l} s \neq 2 \\ s = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{s^2 - 3s + 2}{1 - s} \\ 7 \end{array} = (s) \text{ و} (s)$$

ابحث في اتصال و (س) عند (س = ٢)

$$\left. \begin{array}{l} 1 < s \\ 1 = s \\ 1 > s \end{array} \right\} \begin{array}{l} 1 - s \\ 5 \\ s - 1 \end{array} = (s) \text{ و} (s) \text{ و} (s)$$

ابحث في اتصال و (س) عند (س = ١)

منصة

القلم  
التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## إيجاد الثوابت لإقتران متصل عند نقطة

مثال ١٠٣:

$$\left. \begin{array}{l} 1 > s \text{ ، } 3 + s \\ 1 = s \text{ ، } 7 \\ 1 < s \text{ ، } s - b \end{array} \right\} = \text{إذا كان } (s) \text{ متصل عند } (s)$$

وكان  $(s)$  متصلاً عندما  $(s = 1)$ ،  
فجد قيمة كل من الثابتين  $(a, b)$

$$\left. \begin{array}{l} 3 < s \text{ ، } 2s \\ 3 \geq s \text{ ، } 1 - 2s \end{array} \right\} = \text{مثال ١٠٠: إذا كان } (s) \text{ متصل عند } (s = 3) \text{، فجد قيمة الثابت } (a)$$

وكان  $(s)$  متصلاً عند  $(s = 3)$ ، فجد قيمة الثابت  $(a)$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \leq s \text{ ، } 1 + 2s \\ 2 > s \text{ ، } 3s \end{array} \right\} = \text{مثال ١٠١: إذا كان } (s) \text{ متصل عند } (s = 2) \text{، فجد الثابت } (a)$$

وكان  $(s)$  متصلاً عند  $(s = 2)$ ، فجد الثابت  $(a)$

مثال ١٠٤:

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \text{ ، } 2 + b \\ 2 = s \text{ ، } 16 \\ 2 < s \text{ ، } 1 + 3s \end{array} \right\} = \text{إذا كان } (s) \text{ متصل عند } (s)$$

وكان  $(s)$  متصلاً عند  $(s = 2)$ ، فجد  $(a, b)$

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \text{ ، } 4 + 2s \\ 2 \leq s \text{ ، } 6 + s \end{array} \right\} = \text{مثال ١٠٢: إذا كان } (s) \text{ متصل عند } (s = 2) \text{، فجد قيمة الثابت } (a)$$

وكان الإقتران متصلاً عندما  $(s = 2)$ ، فجد قيمة الثابت  $(a)$

منصة

التعليمية

AL-QALLAM EDUCATION



## إيجاد الثوابت لإقتران متصل عند نقطة

مثال ١٠٧:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 1 \text{ ، } \text{س} > 2 \\ \text{س} = 2 \text{ ، } 8 \\ \text{س} + 6 \text{ ، } \text{س} < 2 \end{array} \right\} = \text{إذا كان هـ (س)}$$

وكان الاقتران هـ (س) متصلاً عندما (س = 2)،  
فجد قيمة كل من الثابتين (أ، ب)

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} \neq 3 \text{ ، } \frac{\text{س} - 3}{\text{س} - 3} \\ \text{س} = 3 \text{ ، } 2 + \text{س}^2 \end{array} \right\} = \text{مثال ١٠٥: إذا كان وهـ (س)}$$

وكان الاقتران وهـ (س) متصلاً عندما (س = 3)،  
فجد قيمة الثابت (٢)

مثال ١٠٦:

$$\left. \begin{array}{l} 2\text{س}^2 + 2 \text{ ، } \text{س} > 1 \\ 7 \text{ ، } \text{س} = 1 \\ \text{س}^2 - 6\text{س} - 6 \text{ ، } \text{س} < 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان وهـ (س)}$$

وكان الاقتران وهـ (س) متصلاً عندما (س = 1)،  
فجد قيمة كل من الثابتين (أ، ب)

مثال ١٠٨:

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - \text{ب} \text{ ، } \text{س} > 1 \\ 4 \text{ ، } \text{س} = 1 \\ \text{س}^3 + \text{ب} + 2 \text{ ، } \text{س} < 1 \end{array} \right\} = \text{إذا كان لـ (س)}$$

وكان الاقتران لـ (س) متصلاً عندما (س = 1)،  
فجد قيمة كل من الثابتين (أ، ب)

AL-QALLAM EDUCATION

## نظريات الاتصال

مثال ١١٠: إذا كان  $(س) \rightarrow (س)$  ،  $(س) \rightarrow (س)$  ،  $(س) \rightarrow (س)$

$$\left. \begin{array}{l} ١ + س < ٢ \\ ٣ + س = ٢ \\ ١٠ - س > ١٩ \end{array} \right\} \text{ وكان } (س) \text{ هـ}$$

وكان ل  $(س) = ١ + س$

ابحث في اتصال  $(س) \rightarrow (س)$  عند  $(س = ٢)$

إذا كان الاقترانين  $(س) \rightarrow (س)$  و  $(س) \rightarrow (س)$  متصلاً عند  $(س = ١)$  فإن:

$$١) (س) \rightarrow (س) + (س) \rightarrow (س) \text{ متصل عند } (س = ١)$$

$$٢) (س) \rightarrow (س) - (س) \rightarrow (س) \text{ متصل عند } (س = ١)$$

$$٣) (س) \rightarrow (س) \times (س) \rightarrow (س) \text{ متصل عند } (س = ١)$$

$$٤) \frac{(س)}{(س)} \text{ متصل عند } (س = ١) ، \text{ بحيث } (س \neq ٠)$$

مثال ١٠٩: إذا كان  $(س) \rightarrow (س)$  ،  $(س) \rightarrow (س)$  ،

$$\left. \begin{array}{l} ٣ \leq س \\ ٣ > س \end{array} \right\} \text{ هـ}$$

وكان ل  $(س) = (س) - (س)$

ابحث في اتصال ل  $(س)$  عند  $(س = ٣)$

منصة

القلم  
التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## نظريات الاتصال

مثال ١١١: إذا كان  $h(s) = s^2 \times h(s)$ 

$$\left. \begin{array}{l} s^2 + 1, \\ s^5, \\ s^2 \end{array} \right\} = (s) \text{ وكان } h(s)$$

وكان  $h(s) = 2s - 6$ ابحث في اتصال  $h(s)$  عند  $(s = 3)$ مثال ١١٢: إذا كان  $h(s) = s^2 - 9$ 

$$\left. \begin{array}{l} s, \\ s^3, \\ s - s \end{array} \right\} = (s) \text{ وكان } h(s)$$

وكان  $l(s) = h(s) \times h(s)$ فبين أن  $l(s)$  متصل عند  $(s = 3)$ 

## نظريات الاتصال

مثال ١١٣: إذا كان  $ه(س) = س^٣ + ٥س$ ،

$$ه(س) = \left. \begin{array}{l} ٥س + ٤ \\ ٨س + ٢ \end{array} \right\} \begin{array}{l} س \geq ١ \\ س < ١ \end{array}$$

وكان ل  $ه(س) = (ه + ٩)$  (س)

فابحث اتصال الاقتران ل (س) عندما (س = ١)

مثال ١١٤: إذا كان  $ه(س) = ٥س^٢ + ٥س - ١$ ،

$$ه(س) = \left. \begin{array}{l} ٩ + س \\ ١ + ٥س \end{array} \right\} \begin{array}{l} س \geq ٢ \\ س < ٢ \end{array}$$

وكان ل  $ه(س) = ٢٩ + ه(س)$ 

فابحث في اتصال الاقتران ل (س) عندما (س = ٢)



## نظريات الاتصال

## مثال ١١٥:

إذا كان  $(هـ + س)$  متصلاً عندما  $(س = ١)$ ،  
فهل نستنتج أن كلاً من  $(س)$ ،  $هـ$  متصل  
عندما  $(س = ١)$ ، برر إجابتك.

## الحل:

لا، ليس بالضرورة، لأن حاصل جمع الاقترانين غير متصلين  
قد يكون لدينا اقتران جديد متصل.

## التوضيح:

$$\left. \begin{array}{l} ٥ - س > ١ \\ ٤ - س = ١ \\ ١ - س < ١ \end{array} \right\} = (س) هـ$$

(اقتران غير متصل)

$$\left. \begin{array}{l} ٧ - س > ١ \\ ٢ - س = ١ \\ ١ - س < ١ \end{array} \right\} = (س) هـ$$

(اقتران غير متصل)

$$\left. \begin{array}{l} ٢ - س > ١ \\ ٢ - س = ١ \\ ٢ - س < ١ \end{array} \right\} = (س) هـ + (س) هـ$$

منصبة  
(اقتران متصل)

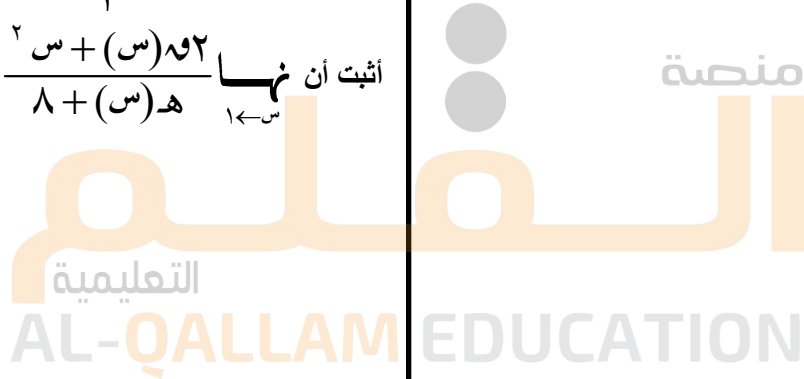
## إيجاد الثوابت (نظريات الاتصال)

مثال ١١٦: إذا كان الاقتران  $f$  متصلاً عند  $(s = 7)$ ، وكانت  $f(7) = 11$ ، فما قيمة  $f(7)$ ؟

مثال ١١٨: إذا كان  $f$ ، ه اقترانين متصلين عند  $(s = 7)$  وكان  $f(7) = 12$ ، ه  $f(7) = 3$ ، أثبت أن  $f(7) = 1$

مثال ١١٧: إذا كان الاقتران  $f$  متصلاً عندما  $(s = 2)$ ، وكانت  $f(2) = 6$ ، فجد قيمة  $f(2)$ .

مثال ١١٩: إذا كان  $f$ ، ه اقترانين متصلين عند  $(s = 1)$  وكان  $f(1) = 6$ ، ه  $f(1) = \frac{1}{3}$ ، أثبت أن  $f(1) = 1$



## إيجاد الثوابت ( نظريات الاتصال )

مثال ١٢١: إذا كان  $h$ ،  $h$  كثيري حدود

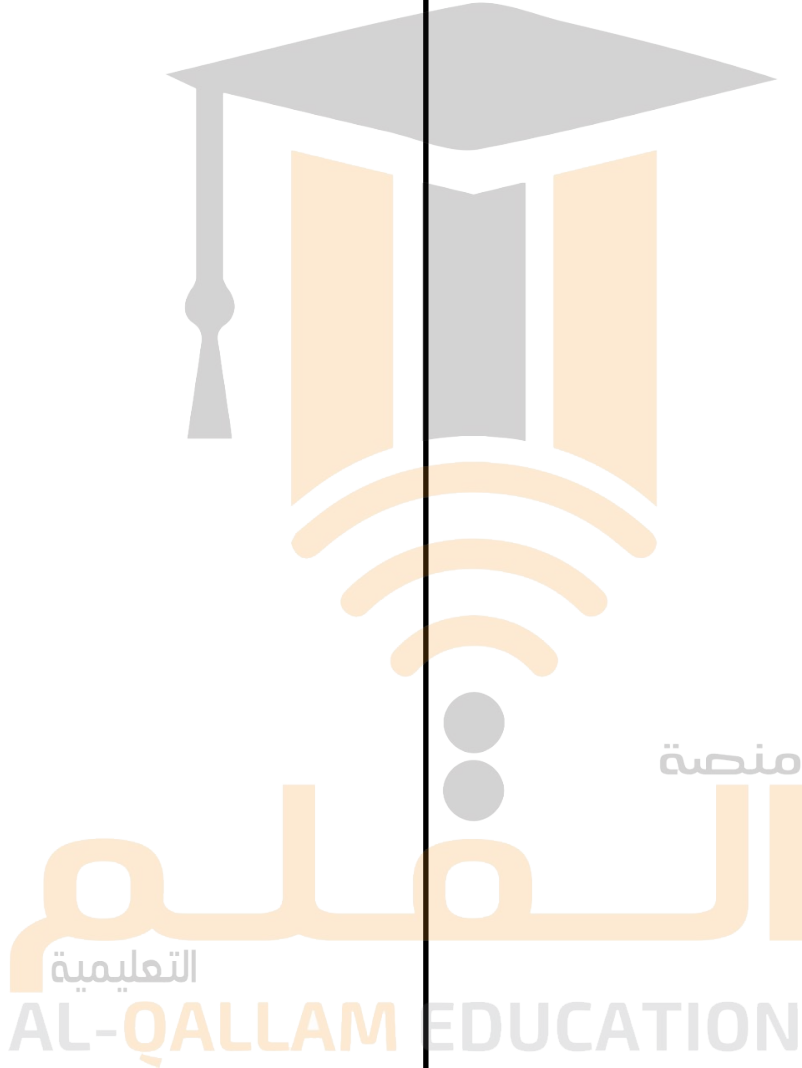
$$\text{وكان } h = \frac{9 + (s)}{2 - (s)} \text{، } 6 = \frac{9 + (s)}{2 - (s)} \text{، } 3 = \frac{9 + (s)}{2 - (s)}$$

فجد  $h$  (١)

مثال ١٢٠: إذا كان  $h$ ،  $h$  اقترانيين متصلين عند  $(s = 3)$

$$\text{وكان } h = (3) \text{، } 1 = (3) \text{، } 1 = (3) \text{، } 1 = (3)$$

التي تجعل  $h = \frac{(s) - (s)}{3} = \frac{(s) - (s)}{3}$



## إيجاد نقاط عدم الاتصال

نقاط عدم الاتصال: هي جميع النقاط الحرجة التي عندها تكون النهاية لا تساوي الصورة  $\lim_{s \rightarrow a} f(s) \neq f(a)$ .

## أنواع الاقترانات

## الاقتران المتشعب

متصلة فقط عندما تكون  
النهاية تساوي الصورة  
ونقاط عدم الاتصال هي نقاط التشعب  
عندما النهاية لا تساوي الصورة

$$\left. \begin{array}{l} s \leq 2 \\ s > 2 \end{array} \right\} = f(s)$$

## الاقتران النسبي

متصلة ماعدا أصفار المقام  
أصفار المقام هي نقاط عدم الاتصال

$$f(s) = \frac{s^2 - 12}{s + 1}$$

## اقتران كثير الحدود

كثيرات الحدود دائماً متصلة  
ولا يوجد نقاط عدم اتصال

$$f(s) = s^3 - 2s + 12$$

$$\left. \begin{array}{l} s > 2 \\ s \leq 2 \end{array} \right\} = f(s) \quad \text{مثال ١٢٧: إذا كان } f(s) = s^3 + 3 - s^2$$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران  $f(s)$

$$\text{مثال ١٢٢: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران } f(s) = s^3 - 2s^2 + 3$$

$$\text{مثال ١٢٣: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران } f(s) = s^3 - 2s + 9$$

$$\text{مثال ١٢٤: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران } f(s) = s^2$$

$$\text{مثال ١٢٥: جد نقاط عدم الاتصال للاقتران } f(s) = s - 2$$

$$\left. \begin{array}{l} s < 2 \\ s > 2 \end{array} \right\} = f(s) \quad \text{مثال ١٢٨: إذا كان } f(s) = s^2$$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران  $f(s)$

$$\left. \begin{array}{l} s \leq 1 \\ s > 1 \end{array} \right\} = f(s) \quad \text{مثال ١٢٦: إذا كان } f(s) = s - 1$$

جد نقاط عدم الاتصال للاقتران  $f(s)$



## إيجاد نقاط عدم الاتصال

$$(٧) \quad \frac{س + ٤}{(س + ٢)(س - ٣)} = (س)$$

$$(٨) \quad \frac{٤}{س} + \frac{١}{٢(س - ٢)} = (س)$$

$$(٩) \quad \frac{١}{س - ٣} + \frac{س٣}{٣(س - ٢٧)} = (س)$$

$$(١٠) \quad \frac{٢}{س} + \frac{١}{٤ - ٢س} = (س)$$

$$(١١) \quad \frac{١ - س٣}{٢ + س٣} = (س)$$

$$(١٢) \quad \frac{٦ - س - ٢س}{٥} = (س)$$

مثال ١٢٩: جد قيم (س) التي يكون عندها كل اقتران مما يأتي غير متصل

$$(١) \quad \frac{٩ - ٢س}{٨ - س٢} = (س)$$

$$(٢) \quad \frac{٣ - ٢س}{٢ - س٣} = (س)$$

$$(٣) \quad \frac{٢}{١ - ٢س} = (س)$$

$$(٤) \quad \frac{س٢}{٤ + ٢س} = (س)$$

$$(٥) \quad \frac{٣ + س}{س٢ - ٢س} = (س)$$

$$(٦) \quad \frac{١ + س - ٢س٣}{س} = (س)$$

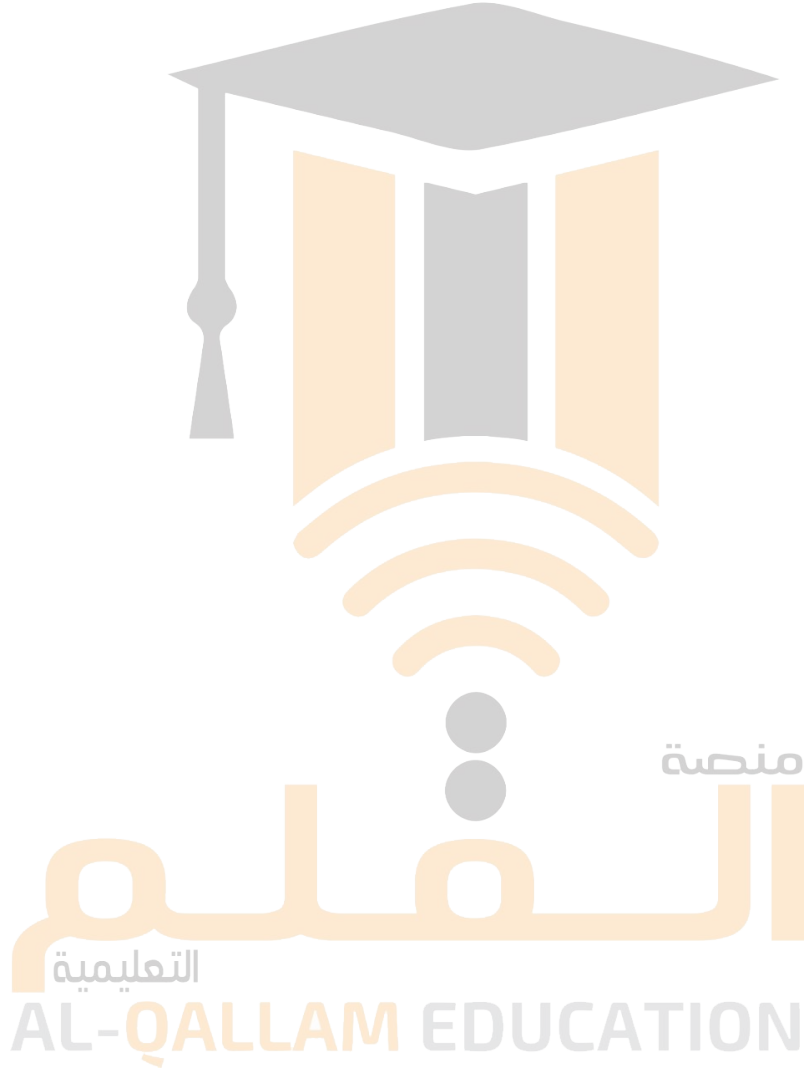
---

الوحدة الثانية: التفاضل  
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

---

إعداد/ مروان ابوديه

---



## مقدار التغير ومعدل التغير

• مقدار التغير في (س): ورمزه ( $\Delta$  س) - وتقرأ دلتا س

$$\Delta س = س_2 - س_1, س_1 \neq س_2 \quad \text{(مقدار التغير في (س), حيث قيمة س لا تساوي صفر)}$$

• مقدار التغير في (ص): ورمزه ( $\Delta$  ص) - وتقرأ دلتا ص

$$\Delta ص = ص_2 - ص_1 \quad \text{(يستخدم القانون إذا ذكر قيم ص)}$$

$$\Delta ص = (س_2) و(ص) - (س_1) و(ص) \quad \text{(يستخدم القانون إذا لم يذكر قيم ص), يسمى أيضاً بقانون مقدار التغير في الاقتران}$$

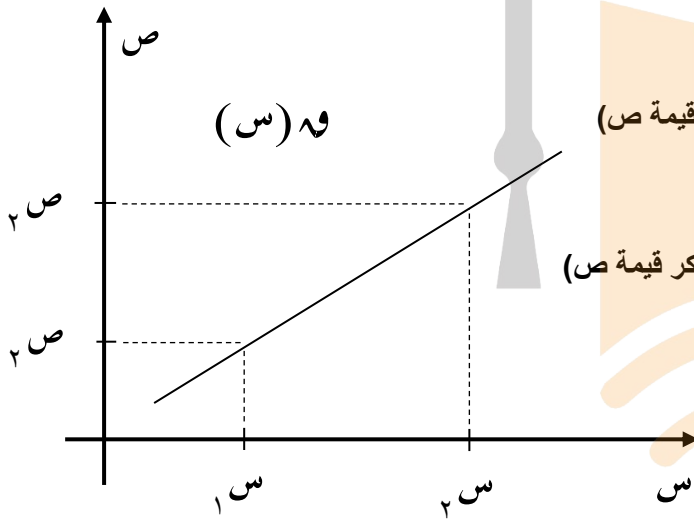
• معدل التغير في الاقتران

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{(س_2) و(ص) - (س_1) و(ص)}{س_2 - س_1}$$

• مسميات أخرى لمعدل التغير:

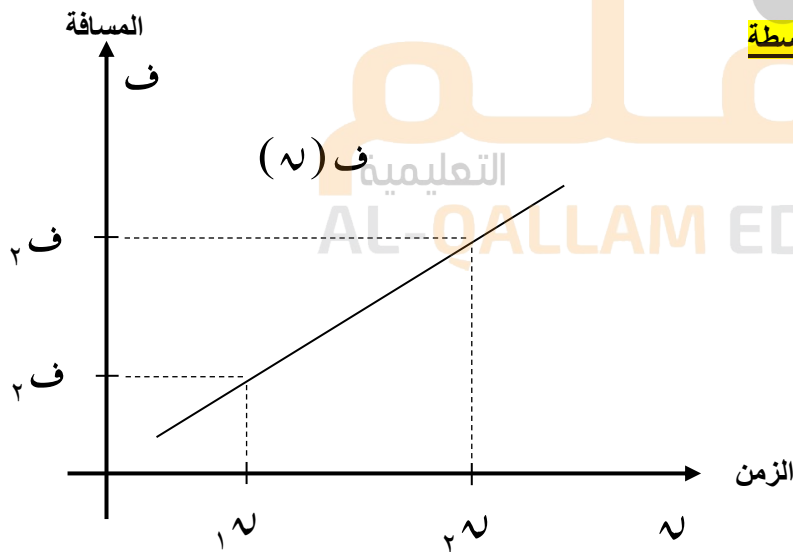
- ١) المشتقة الأولى.
- ٢) الميل.
- ٣) ميل الخط المستقيم.
- ٤) ميل المماس.
- ٥) ميل القاطع.



• يمكن من خلال قانون معدل التغير حساب السرعة المتوسطة

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف_2 - ف_1}{ن_2 - ن_1}$$

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{(ن_2) ف(ن) - (ن_1) ف(ن)}{ن_2 - ن_1}$$



## مقدار التغير في (س)

مثال ١: جد مقدار التغير في (س) لكل من الحالات التالية:

(١)  $s_1 = 4$  ،  $s_2 = 6$

(٢)  $s_1 = 5$  ،  $s_2 = 2$

(٣)  $s_1 = 3$  ،  $s_2 = 10$

(٤)  $s_1 = -4$  ،  $s_2 = -3$

(٥) في الفترة  $[-1, 3]$

(٦)  $s_1 = \text{صفر}$  ،  $s_2 = \frac{1}{4}$

(٧)  $s_1 = \frac{1}{4}$  ،  $s_2 = \frac{3}{4}$

(٨)  $s_1 = \frac{1}{4}$  ،  $s_2 = \frac{3}{4}$  منصبة

مثال ٢: إذا كانت  $(s_1 = 3)$  و  $(s_2 = 5)$ ، جد  $(s_2)$ .مثال ٧: إذا علمت أن  $s_1 = 3 - 4$ ،

وتغيرت قيمة (س) من (٣) إلى (٥)،

جد مقدار  $(\Delta s)$ .مثال ٣: إذا كانت  $(s_1 = 2)$  و  $(s_2 = 4)$ ، جد  $(s_1)$ .مثال ٤: إذا تغيرت (س) على الفترة  $[2, 1]$ ،

وكان مقدار التغير في (س) يساوي ١٦، جد قيمة (١).

مثال ٥: إذا تغيرت (س) من (١) إلى ١٣،

وكان مقدار التغير في (س) يساوي ٩، جد قيمة (١).

مثال ٦: إذا تغيرت (س) على الفترة  $[3, 2]$ ،

وكان مقدار التغير في (س) يساوي ٣-، جد قيمة (ب).

## مقدار التغير في (ص)

مثال ١٢: إذا كان  $v = (s)$  و  $s = 3 - 2$ ،  
وتغيرت (س) من (٢) إلى (٧)، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال ٨: إذا كانت  $(v = 5)$  و  $(\Delta v = 2)$ ، جد  $(v = 2)$

مثال ١٣: إذا كانت  $v = (s)$  و  $v = \sqrt{3s + 1}$ ،  
وتغيرت (س) من (١) إلى (٥)، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال ٩: إذا كان  $v = (s)$  و  $s = 3 - s^2$ ، حيث  $(s = 2)$   
و  $(\Delta s = 1)$ ، جد مقدار التغير في الاقتران.

مثال ١٤: إذا كان  $v = (s)$  و  $s = 1 - s^3$ ،  
جد مقدار التغير في الاقتران على الفترة  $[-1, 2]$ .

مثال ١٠: ما قيمة تغير الاقتران  $v = 3s^3$ ، عندما تتغير  
(س) من  $(s = 2)$  بمقدار  $(\Delta s = 1)$ .

مثال ١٥: إذا كان  $v = (s)$  و  $s = 2$ ، وتغيرت قيمة (س)  
من  $(s = 2)$  إلى  $(s = 4)$ ، جد مقدار التغير في (ص).

مثال ١١: مكعب معدني تعرض للحرارة بحيث تغير طول ضلعه  
من (١) سم إلى (٣) سم، جد مقدار التغير في حجم هذا المكعب.  
✓ ملاحظة: حجم المكعب  $(s^3)$

## معدل التغير

مثال ١٦: إذا كان  $و(س) = س^٢ + س$ ، وتغيرت (س) من (٢) الى (٤)، جد معدل التغير في الاقتران  $و(س)$ .

مثال ١٩: إذا كان  $و(س) = \begin{cases} ٣س + ١ & ، س \leq ٣ \\ ٣س + ٢ & ، س > ٣ \end{cases}$ ،  
جد معدل التغير للاقتران  $و(س)$ ،  
عندما تتغير (س) من (٢) إلى (٥).

مثال ١٧: إذا كان  $و(س) = \frac{٢٠}{١ + س}$  وتغيرت (س) على الفترة  $[١, ٤]$ ، جد معدل التغير في الاقتران  $و(س)$ .

مثال ٢٠: إذا كان

$و(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، ٠ \leq س \leq ٣ \\ ٣س + ١ & ، ٣ > س \geq ٧ \end{cases}$ ،  
فجد معدل تغير الاقتران  $و(س)$ ،  
عندما تتغير (س) من (١) إلى (٥).

مثال ١٨: إذا علمت أن  $و(٢) = ٧$ ، قيمة

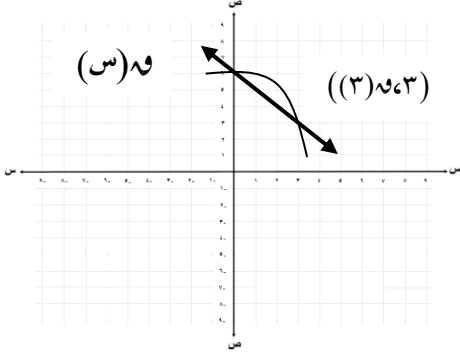
وتغيرت (س) من (٢) الى (٤)،  
وكان معدل التغير للاقتران يساوي (٥)، جد قيمة  $و(٤)$ .

التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

مثال ٢١: إذا كان  $و(س) = ٢ - س$  وتغيرت (س) من (١) الى (٦)، جد معدل التغير في الاقتران  $و(س)$ .

## معدل التغير

**مثال ٢٥:** إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران  $v(s)$  في الشكل التالي يساوي  $(-1)$ ، فجد قيمة  $v(3)$ .



**مثال ٢٢:** في عام  $(2005)$  بلغت أرباح شركة أجهزة كهربائية  $(2000)$  دينار، وفي عام  $(2012)$  م حققت الشركة أرباحاً قدرها  $(34000)$  دينار، ما قيمة التغير في ربح الشركة في أثناء هذه المدة؟ وما معدل التغير السنوي في أرباحها؟

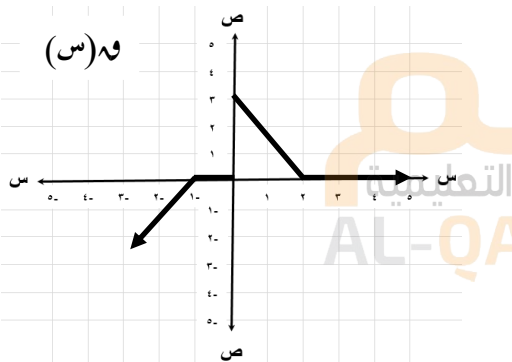
**مثال ٢٣:** إذا كان

$$\left. \begin{array}{l} 3 \geq s \geq 1, \quad s^3 \\ 5 \geq s > 3, \quad s^4 \end{array} \right\} = v(s)$$

وكان معدل تغير الاقتران  $v(s)$  عندما تتغير  $(s)$  من  $(2)$  إلى  $(5)$  يساوي  $(4)$ ، فجد قيمة الثابت  $(1)$ .

**مثال ٢٦:** اعتماداً على الشكل التالي الذي يمثل منحنى  $v(s)$ ، جد كلاً مما يأتي:

- (أ) قيم  $(s)$  التي تجعل الاقتران  $v(s)$  غير متصل.  
(ب) معدل التغير للاقتران  $v(s)$  في الفترة  $[2, 4]$ .



**مثال ٢٤:** إذا كان  $v(s) = \frac{1}{s+2}$ ،

وكان معدل تغير الاقتران  $v(s)$  يساوي  $(-1)$ ، عندما تتغير  $(s)$  من  $(0)$  إلى  $(3)$ ، فجد قيمة الثابت  $(1)$ .

## معدل التغير ومتوسط السرعة

**مثال ٣٠:** يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة  
 $f(t) = 3t^2$ ، حيث  $t$  الزمن بالثواني،  $f$  المسافة  
 بالأمتار، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية  
 $[1, 3]$ .

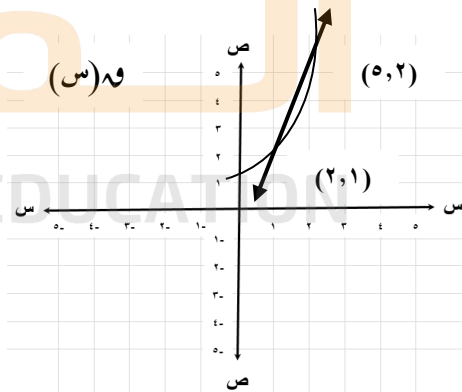
**مثال ٢٧:** إذا كان  $v(t) = t^2 + 2t$ ، جد ميل القاطع  
 لمنحنى الاقتران  $v(t)$ ، والمار بالنقطتين  $(1, 3)$ ،  $(4, 2)$ .

**مثال ٣١:** يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران  
 $f(t) = 4t^2 + 2t$ ، حيث  $f$  المسافة المقطوعة  
 بالأمتار،  $t$  الزمن بالثواني، جد السرعة المتوسطة للجسيم في  
 الفترة الزمنية  $[1, 2]$ .

**مثال ٢٨:** إذا كان  $v(t) = t + t^2$ ،  
 جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران  $v(t)$ ، والمار بالنقطتين  
 $(2, 2)$ ،  $(3, 3)$ .

**مثال ٣٢:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه  
 رأسياً إلى الأسفل تعطى بالعلاقة  $f(t) = 5t^2 - 10t$ ،  
 حيث  $f$  المسافة المقطوعة بالأمتار،  $t$  الزمن بالثواني،  
 فأحسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية  $[1, 3]$ .

**مثال ٢٩:** معتمداً الشكل المجاور،  
 ما معدل التغير للاقتران  $v(t)$  في الفترة  $[1, 4]$ .





## معدل التغير

**مثال ٣٥:** إذا كان  $٢ (س) = ١ + ٢ (س) - ١ (س)$ ،  
وتغيرت (س) على الفترة  $[٢, ٥]$ ، وكان متوسط التغير  
للاقتران  $١ (س)$  يساوي (٤)،  
جد معدل تغير الاقتران  $٢ (س)$  على هذه الفترة.

**مثال ٣٣:** إذا كان  $١ (س) = ٢ (س) + ٢ (س)$ ، وتغيرت (س)  
من (١) الى (٣)، وكان متوسط تغير الاقتران  $٢ (س)$  يساوي  
(٦)، جد معدل التغير للاقتران  $١ (س)$  على نفس هذه الفترة.

**مثال ٣٦:** إذا كان معدل التغير في الاقتران  $١ (س)$   
في الفترة  $[١, ٢٤]$  يساوي  $(٣ -)$ ،  
وكان  $٢ (س) = ٥ (س) + ٥ (س)$ ،  
فجد معدل التغير للاقتران  $٢ (س)$  في الفترة  $[١, ٢٤]$ .

**مثال ٣٤:** إذا كان معدل التغير في الاقتران  $١ (س)$  في الفترة  
 $[١, ٣٤]$  يساوي (٤)، وكان  $١ (س) = ٢ (س) - ٣ (س)$ ،  
فجد معدل التغير للاقتران  $٢ (س)$  في الفترة  $[١, ٣٤]$ .



## التعريف العام للمشتقة

مثال ٣٧: جد المشتقة الأولى للاقتران  $٨$ ،  
حيث  $٨(س) = ٣س$ ، باستخدام التعريف العام للمشتقة.

مثال ٣٨: باستخدام التعريف العام للمشتقة،  
جد المشتقة الأولى للاقتران  $٨(س) = ٧س - ٢$

مثال ٣٩: إذا كان  $٨(س) = ٣ - ٢س$ ، فجد  $٨'(٣)$   
باستخدام التعريف العام للمشتقة.

مثال ٤٠: باستخدام تعريف المشتقة،  
جد المشتقة الأولى للاقتران  $٨(س) = ٦$

المشتقة الأولى تعني نهاية معدل التغير عندما يقترب التغير من الصفر.

✓ لو ذكر في السؤال اقتران، فإن المشتقة الأولى هي النهاية.  
وتحسب من خلال القانون العام للمشتقة.

## المشتقة الأولى للاقتران (٨)

المشتقة الأولى للاقتران  $ص = ٨(س)$  المعرف على الفترة

[أ، ب] هو اقتران آخر نرمز إليه بالرمز  $٨'(س)$ ، ويقراً  
(٨ فتحة ل س)، حيث:

$$٨'(س) = \frac{٨(س) - ٨(هـ)}{س - هـ}$$

✓ يستخدم هذا القانون غالباً في الأسئلة الموضوعية (ضع دائرة).  
ويمكن وضع  $ع = (س + هـ)$ ، والتعبير عن المشتقة الأولى،  
باستخدام التعريف التالي:

$$٨'(س) = \frac{٨(ع) - ٨(س)}{ع - س}$$

✓ يستخدم هذا القانون دائماً في أسئلة الحل.

من رموز المشتقة الأولى  $٨'(س)$ ،  $\frac{د٨}{دس}$ ،  $ص'$ .

## خطوات حل السؤال باستخدام التعريف العام للمشتقة

- كتابة القانون العام.
- كتابة الاقتران الاصلي بدلالة (ع).
- ننسخ  $٨(س)$  كما هو داخل قوس مضروب بـ سالِب.
- ن فك الأقواس، وأحياناً نجري عمليات التحليل.
- اختصار المقادير المتشابهة.
- نعوض (ع) بـ (س).

ملاحظة: يمكن التحقق من الحل من خلال استخدام قواعد الاشتقاق.

## التعريف العام للمشتقة

مثال ٤٤ : باستخدام تعريف المشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = s^3$

مثال ٤١ : باستخدام تعريف المشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = s^2$

مثال ٤٥ : باستخدام تعريف المشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = s^3 + s^3$

مثال ٤٢ : باستخدام التعريف العام للمشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = s^3 + 1$

مثال ٤٦ : باستخدام تعريف المشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = \sqrt{s}$

منصة

مثال ٤٣ : باستخدام التعريف العام للمشتقة،  
جد  $y'$  و  $y''$  للاقتران  $y = s - 1$

التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## التعريف العام للمشتقة

مثال ٤٩: باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى

$$\text{للافتران } (س) \text{ و } (س) \text{ ، } \frac{3}{2+س} = (س) \text{ ، } (س \neq 2)$$

مثال ٤٧: باستخدام التعريف العام للمشتقة،

$$\text{جد } (س) \text{ و } (س) \text{ للافتران } (س) \text{ و } (س) \text{ ، } \sqrt{3+س}$$

مثال ٥٠: باستخدام تعريف المشتقة، جد  $(س)$  للافتران

$$\text{و } (س) \text{ ، } \frac{5}{س^3+4} = (س) \text{ ، } (س \neq \frac{4}{3})$$

مثال ٤٨: باستخدام التعريف العام للمشتقة، جد  $(س)$  للافتران

$$\text{و } (س) \text{ ، } \sqrt{3-س} = (س) \text{ ، } (س \leq \frac{3}{2})$$



## التعريف العام للمشتقة

**مثال ٥٣:** إذا كان  $v = f(s)$ ، وكان مقدار تغير الاقتران  $f(s)$  هو  $(s^2 - 2s^2)$ ، فجد  $f'(s)$ .

**مثال ٥١:** باستخدام تعريف المشتقة، جد  $f'(3)$  للاقتران  $f(s) = s^2 - 4s$

**مثال ٥٤:** إذا كان  $v = f(s)$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران  $f(s)$  عندما تتغير  $(s)$  من  $(s_1)$  إلى  $(s_1 + h)$  هو  $\Delta v = 4s^2 + 2h^2$ ، فجد  $f'(s)$ .

**مثال ٥٢:** باستخدام تعريف المشتقة، جد  $f'(0)$  للاقتران  $f(s) = 5s^2 - 3s + 4$

**مثال ٥٥:** إذا كان  $v = f(s)$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران  $f(s)$  عندما تتغير  $(s)$  من  $(s)$  إلى  $(s + h)$  هو  $\Delta v = 5s^2 + 8s^2 + 2h^2$ ، فجد  $f'(s)$ .

منصة

AL-QALLAM EDUCATION

## قواعد الاشتقاق

## القاعدة الأولى: مشتقة الثابت

- إذا كان  $u = (s)$  ، حيث  $(1)$  عدد ثابت فإن  $u' = (s)' = \text{صفر}$

مثال ٥٦: جد المشتقة الأولى لكل مما يلي:

$$(1) \quad u = (s) = 3$$

$$(2) \quad \text{ص} = -5$$

$$(3) \quad u^2 = (s) = \frac{22}{7}$$

$$(4) \quad \text{ص} = \pi 2$$

$$(5) \quad \sqrt{12} = \text{ه}$$

$$(6) \quad 2^3 = \text{ع}$$

## القاعدة الثانية: مشتقة الافتراضات الخطية

- إذا كان  $u = (s)$  ، حيث  $(1)$  عدد ثابت فإن  $u' = (s)' = 1$

مثال ٥٧: جد  $u' = (s)'$  لكل مما يلي:

$$(1) \quad u = (s) = 7$$

$$(2) \quad \text{ص} = -5 = s$$

$$(3) \quad u^2 = (s) = 6 + s$$

$$(4) \quad \text{ه} = (s) = 9 - 7$$

$$(5) \quad u = (s) = \frac{3s}{2}$$

$$(6) \quad u = (s) = \sqrt[3]{3 - s}$$

## القاعدة الثالثة: مشتقة الافتراضات الغير خطية

- إذا كان  $u = (s)$  ، فإن  $u' = (s)' = 1 \times s^{1-n} = s^{1-n}$

مثال ٥٨: جد المشتقة الأولى لكل مما يلي:

$$(1) \quad u = (s) = s^2$$

$$(2) \quad \text{ص} = s^5$$

$$(3) \quad u = (s) = s^{-4}$$

$$(4) \quad \text{ص} = s^2 - s^3$$

$$(5) \quad u = (s) = s^4 - s^2 + s^3 - 8s - 7$$

$$(6) \quad u = (s) = s^2 - s^3 - 5s + 6$$

$$(7) \quad u = (s) = \frac{1}{4}s^2 - \frac{1}{3}s^3 - 10$$

$$(8) \quad \text{ص} = \frac{1}{4}s^4 + \frac{1}{3}s^3 - s^2 + 8$$

$$(9) \quad u = (s) = \frac{1}{3}s^3 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s$$

مثال ٥٩:  $u = (s) = \frac{1}{4}s^3 + s^2$  ، فجد  $u'(1)$

## قواعد الاشتقاق

مثال ٦٥: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(١) \quad v = (٧ + ٣س^٢)(٣ + ٥س)$$

$$(٢) \quad v = (٥ - ٣س^٣)(١ + ٤س^٣),$$

عندما  $(س = ١)$

$$(٣) \quad v = (٤ - ٣س^٢)(١ - ٢س)$$

مثال ٦٦: إذا كان  $v = (٧)'$  ،  $٣ = (٧)'$  ،  $٥ = (٧)'$  ،  $٤ - = (٧)'$  ،  $٢ = (٧)'$  هـ

فجد كلاً من:

$$(١) \quad (٧)'(هـ \times و)$$

$$(٢) \quad (٧)'(هـ + و)$$

$$(٣) \quad (٧)'(هـ \times و)'$$

القاعدة الرابعة: مشتقة ضرب اقترانيين

$$\bullet \quad \text{إذا كان } و = و(س) \text{ و } ل = ل(س) \text{ فإن}$$

$$و' = و'(س) + و(س) \times ل'(س)$$

الأول  $\times$  مشتقة الثاني + الثاني  $\times$  مشتقة الأول

مثال ٦٠: إذا كان  $و = و(س) = (٥ - ٢س^٢)$  ، جد  $و'(٢)$ .

مثال ٦١: إذا كان  $و = و(س) = (١ + ٢س)(٣س - ٣)$  ،

فجد  $و'(١)$ .

مثال ٦٢: إذا كان  $و = و(س) = ٣ - ٥س$  ،

هـ  $= و(س) = ٢س + س$  ، جد  $و'(٢)$ .

مثال ٦٣: إذا كان  $و = و(س) = (٣س - ٢)^٢$  ،

فجد  $و'(١-)$ .

مثال ٦٤: إذا كان هـ  $= و(س) = ٣س$  ،

وكان  $و = و(٢) = ٨$  ،  $و'(٢) = ٣$  ، فجد هـ  $(٢)'$

## قواعد الاشتقاق

## القاعدة الخامسة: مشتقة قسمة اقرانين

$$\bullet \text{ إذا كان } u = \frac{b(s)}{c(s)}, \text{ حيث } c(s) \neq 0$$

$$\text{فإن } u' = \frac{c(s)^2 \times b'(s) - b(s) \times c'(s)}{c(s)^2}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } u = \frac{f}{g} = (s) \text{ حيث } f \text{ ثابت}$$

$$\text{فإن } u' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

$$\bullet \text{ إذا كان } u = \frac{b(s)}{a} \text{ ، } (a \neq 0)$$

$$\text{فإن } u' = \frac{b'(s)}{a}$$

$$\text{مثال ٦٧: إذا كان } u = \frac{s^2 + 5}{s^3 - 6} \text{ ، جد } u'(s).$$

$$\text{مثال ٦٨: إذا كان } u = \frac{s^2 + 5}{s^3 - 6} \text{ ، جد } \frac{du}{ds}$$

$$\text{مثال ٦٩: إذا كان } u = \frac{s^3}{s^2 - 2} \text{ ، جد } u'(2).$$

$$\text{مثال ٧٠: إذا كان } u = s^3 + s \text{ ،}$$

$$\text{جد } u' \left( \frac{1}{h} \right)$$

$$\text{مثال ٧١: إذا كان } u = \frac{s^3 - 1}{2} \text{ ، جد } u'(1).$$

$$\text{مثال ٧٢: إذا كان } v = \frac{1}{s^3 + 6} \text{ ، جد المشتقة الأولى}$$

$$\text{مثال ٧٣: إذا كان } v = \frac{3}{s - 2} \text{ ، جد } v'$$

عندما  $(s = 2)$

$$\text{مثال ٧٤: إذا كان } u = (v) \text{ ، } 3 = (v) \text{ ، } 5 = (v)'$$

$$\text{جد } u'(2) \text{ ، } 2 = (v) \text{ ، } 4 = (v)'$$

$$\text{جد } u' \left( \frac{2}{h} \right)$$

$$\text{مثال ٧٥: إذا كان الاقتران } (h) \text{ اقتراناً قابلاً للاشتقاق،}$$

$$\text{عندما } (s = 2) \text{ ، وكان } h = (2) \text{ ، } 1 = (2) \text{ ، } 2 = (2)'$$

$$\text{فجد } u' \text{ للاقتران } (2) \text{ ، } h = (s) \text{ ، } h = \frac{h(s)}{s}$$



## قواعد الاشتقاق

## القاعدة السابعة: مشتقة الجذر التكعيبي

$$\bullet \text{ إذا كان } \sqrt[3]{s} = (s) \text{ فإن } \frac{d(\sqrt[3]{s})}{ds} = \frac{1}{3\sqrt[3]{s^2}}$$

مثال ٨١: إذا كان  $\sqrt[3]{s} = (s)$ ، جد  $(-1)'$ .

مثال ٨٢: إذا كان  $\sqrt[3]{s-1} = (s)$ ، جد  $\frac{ds}{ds}$ .

مثال ٨٣: إذا كان  $\sqrt[3]{s-2} = (s)$ ، جد  $(-6)'$ .

مثال ٨٤: إذا كان  $\sqrt[3]{s-1} = (s)$ ، جد  $(0)'$ .

مثال ٨٥: إذا كان  $\sqrt[3]{s-2} = (s)$ ، جد  $(2)'$ .

## القاعدة السادسة: مشتقة الجذر التربيعي

$$\bullet \text{ إذا كان } \sqrt{s} = (s) \text{ فإن } \frac{d(\sqrt{s})}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{s}}$$

مثال ٧٦: إذا كان  $\sqrt{s} = (s)$ ، جد  $(9)'$ .

مثال ٧٧: إذا كان  $\sqrt{s^2+1} = (s)$ ، جد  $(s)'$ .

مثال ٧٨: إذا كان  $\sqrt{s^2-s+3} = (s)$ ، جد  $\frac{ds}{ds}$ .

مثال ٧٩: إذا كان  $\sqrt[3]{s-2} = (s)$ ، جد  $(s)'$ .

مثال ٨٠: إذا كان الاقتران (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،

عندما  $(s = 2)$ ، وكان  $هـ = (2-)$ ،  $١ = (2-)$ ،  $٢ = (2-)$ ،

فجد  $(2-)$  للاقتران  $\sqrt{s+6} \times هـ (s)$

## قواعد الاشتقاق

## القاعدة الثامنة: مشتقة القوس

• إذا كان  $u = f(x)$  فإن

$$u' = f'(x) \times \frac{dx}{dx}$$

مثال ٨٦: إذا كان  $u = (x^2 - 5x + 1)^4$ ،  
جد  $u'$

مثال ٨٧: إذا كان  $u = (x^2 - x)^3$ ، جد  $u'$

مثال ٨٨: إذا كان  $u = (2x^3 + 6)^3$ ، جد  $u'$

مثال ٨٩: إذا كان  $u = (2x^2 - 6)^2$ ، جد  $u'$

مثال ٩٠: إذا كان  $u = (3x^2 + 5)^{\frac{1}{2}}$ ، جد  $u'$

مثال ٩١: إذا كان  $v = (5 + 4x + x^2)^{-2}$ ، جد  $\frac{dv}{dx}$

مثال ٩٢: إذا كان  $u = (3x^2 + 5)^{-5}$ ، جد  $\frac{du}{dx}$

مثال ٩٣: إذا كان  $u = \sqrt{x^2}$ ، جد  $u'(1)$ .

مثال ٩٤: إذا كان  $u = \sqrt{5x - 6}$ ، جد  $u'(x)$ .

مثال ٩٥: إذا كان  $u = \sqrt{(x^2 + 2)^2}$ ،  
جد  $u'(x)$ .

مثال ٩٦: إذا كان  $u = \sqrt{(2x - 1)^2}$ ،  
جد  $u'(x)$

مثال ٩٧: إذا كان  $u = \frac{1}{\sqrt{(3x^2 - 2)^2}}$ ،  
جد  $u'(x)$

## قواعد الاشتقاق

## القاعدة التاسعة: مشتقة الاقترانات الدائرية

- $\sin(\sin) = \cos$  ومشتقته  $\sin' = -\cos$
- $\cos(\sin) = -\sin$  ومشتقته  $\cos' = \sin$
- $\sin(\cos) = -\cos$  ومشتقته  $\sin' = \cos$
- $\cos(\cos) = \sin$  ومشتقته  $\cos' = -\sin$

مثال ٩٨: جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:

$$(1) \sin(\sin + \cos) = \cos - \sin$$

$$(2) \cos(3\sin) = 3\cos$$

$$(3) \sin(\sin + 5) = \cos$$

$$(4) \cos(\sin) = -\sin$$

$$(5) \cos\left(\frac{\sin}{3}\right) = -\frac{1}{3}\sin$$

$$(6) \sin\left(\frac{3}{\sin}\right) = -\frac{3}{\sin^2}$$

$$(7) \cos(\sin^2) = -2\sin \cos$$

## مشتقة الاقترانات الدائرية (معادلة)

- $\sin(\sin) = \cos$  (المعادلة)
- $\cos(\sin) = -\sin$  (مشتقة المعادلة)  $\times$
- $\sin(\cos) = -\cos$  (المعادلة)
- $\cos(\cos) = \sin$  (مشتقة المعادلة)  $\times$
- $\sin(\sin^2) = 2\sin \cos$  (المعادلة)
- $\cos(\sin^2) = -2\sin \cos$  (مشتقة المعادلة)  $\times$

مثال ٩٩: جد المشتقة الأولى لكل من الاقترانات التالية:

$$(1) \sin(4\sin) = 4\cos$$

$$(2) \cos(2\sin) = 2\sin$$

$$(3) \sin(\sin^2) = 2\sin \cos$$

$$(4) \cos(\sin^3) = -3\sin^2 \cos$$

$$(5) \sin(\sin^2 - 1) = 2\sin \cos$$

$$(6) \cos(\sin^3 - 6) = -3\sin^2 \cos$$

## قواعد الاشتقاق

مثال ١٠٠: جد  $\left(\frac{ص}{س}\right)$  لكل من الاقتترانات التالية:

(١)  $وه(س) = جا^٢س$

(٢)  $وه(س) = جتا^٣س$

(٣)  $وه(س) = ظا^٣(س)$

(٤)  $وه(س) = ظا^٣(س٥)$

(٥)  $ص = جا^٣(س٤)$

(٦)  $ه(س) = س٤ جتا^٣س$

(٧)  $ص = جا^٢س(١ - جتا٣س)$

مثال ١٠١: جد  $\frac{وه(س + ه) - وه(س)}{ه}$ 

لكل من الاقتترانات التالية:

(١)  $وه(س) = ٢جتا٤س + جا^٢س - ظا(س + ١)$

(٢)  $وه(س) = \frac{جاس}{١ + جتا٣س}$

(٣)  $وه(س) = س٥ س٢ جتا٣س - ظاس$

(٤)  $وه(س) = س٣ ظاس + (س٢ + ١)٢$

(٥)  $وه(س) = (جاس - جتا٣س)٢$

## مجموعة أسئلة على الاشتقاق

مثال ١٠٦: إذا كان  $و(س) = (س٢ - ٦)٣$ ،  
جد نها  $\frac{(س + ه) - و(س)}{ه}$

مثال ١٠٢: جد نها  $\frac{٣(س + ه)٣ - ٤س٣}{ه}$

مثال ١٠٣: إذا كان  $و(س) = س٣ + ٢س$ ،  
جد نها  $\frac{و(٢) - و(ه + ٢)}{ه}$

مثال ١٠٧: إذا كان  $و(س) = \frac{٣}{س}$ ،  
جد نها  $\frac{و(١ - ه) - و(١)}{ه}$

مثال ١٠٤: إذا كان  $و(س) = ٥س٢ - س$ ،  
جد نها  $\frac{و(٣ - ه) - و(٣)}{ه}$

مثال ١٠٨: إذا كان  $و(س) = س٣ + ٨$ ،  
جد نها  $\frac{و(٢ + ه) - و(٢)}{ه}$

مثال ١٠٥: جد نها  $\frac{\frac{٣}{س} - \frac{٣}{ع}}{ع - س}$

مثال ١٠٩: إذا كان  $و(س) = جا٣س$ ،  
جد نها  $\frac{و(ع) - و(س)}{ع - س}$

## إيجاد الثوابت (المجاهيل)

مثال ١١٣: إذا كان

$$و(س) = ٣س^٢ - ٩س + ٣س + ١٥$$

وكان  $و'(س) = ٠$ ، جد قيمة الثابت (ب).

**إيجاد الثوابت:** يمكن حساب قيمة الثوابت من خلال الاشتقاق أولاً، ثم تعويض قيمة (س = ١) ونساوي المقدار النهائي بالنتيجة.

مثال ١١٠: إذا كان  $و(س) = ٣س + ١س - ١$ ،وكان  $و'(٢) = ١٥$ ، جد قيمة (أ).مثال ١١١: إذا كان  $و(س) = ٣س + ٣س^٢ - ٥$ ،وكان  $و'(١) = ١٥$ ، جد قيمة (أ).مثال ١١٤: إذا كان  $و(س) = (س - ٣)^٤$ ،وكان  $و'(س) = ٣٢$ ، جد قيمة (س).مثال ١١٢: إذا كان  $و(س) = ٣س + ٢س - س$ ،وكان  $و'(٢) = ١٦$ ، جد قيمة (أ).

منصة

AL-QALLAM EDUCATION

## قاعدة السلسلة

مثال ١١٦: إذا كانت  $v = e^s$ ،  $e = 3s^2 - s$ ،  
جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١١٧: إذا كانت  $v = e^3$ ،  $e = s^2 + 1$ ،  
جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١١٨: إذا كانت  $v = e^{2e}$ ،  $e = \sqrt{s}$ ،  
جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١١٩: إذا كانت  $v = 2 - 3e + e^2$ ،  $e = s^2$ ،  
جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$ ، عندما  $(s = 2)$ .

## القاعدة (١): قاعدة السلسلة

إذا كان  $v = f(e)$ ،  $e = g(s)$ ،  $v$  قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى  $(e)$ ،  $e$  قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى  $(s)$ ، فإن:

$$\frac{dv}{ds} \times \frac{de}{ds} = \frac{dv}{de}$$

حيث:

- $\left(\frac{dv}{de}\right)$ : مشتقة الاقتران  $(v)$  بدلالة  $(e)$
- $\left(\frac{de}{ds}\right)$ : مشتقة الاقتران  $(e)$  بدلالة  $(s)$

## القاعدة (٢): قاعدة السلسلة

إذا كان  $v = f(h(s))$ ،  $h$  عدداً حقيقياً،  
 $h$  اقتراناً قابلاً للاشتقاق، فإن:

$$\frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dh} \times h'(s)$$

## خطوات حل سؤال المشتقة باستخدام قاعدة السلسلة

- (١) كتابة القانون العام.
  - (٢) إيجاد مشتقة الاقتران الأول  $\left(\frac{dv}{de}\right)$
  - (٣) إيجاد مشتقة الاقتران الثاني  $\left(\frac{de}{ds}\right)$
  - (٤) ضرب المشتقتين معاً.
  - (٥) تعويض قيمة  $(e)$  بالاقتران الأصلي.
  - (٦) المقدار النهائي يجب أن يكون بدلالة  $(s)$  فقط.
  - (٧) إذا طلب في السؤال، جد  $\frac{dv}{ds}$  عند  $(s = 1)$
- نعوض بدل  $(s)$  بقيمة  $(1)$ ، ثم إيجاد الناتج النهائي.

مثال ١١٥: إذا كانت  $v = e^2$ ،  $e = 3s$ ، جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

## قاعدة السلسلة

مثال ١٢٤: إذا كانت  $v = 1 + e^3$ ،  $e = (2 - s)^0$ ،

جد  $\frac{dv}{ds}$  |  $s=1$

مثال ١٢٠: إذا كانت  $v = 2e^3$ ،  $e = 3s$ ، جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١٢١: إذا كانت  $v = e + e^3$ ،  $s = 1 + 2$ ،

جد  $\frac{dv}{ds}$  |  $s=1$

مثال ١٢٥: إذا كانت  $v = e^3$ ،  $e = \frac{1}{s+2}$ ، جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١٢٢: إذا كانت  $v = \sqrt{e}$ ،  $e = 3 + 2s^3$ ،

جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$

مثال ١٢٦: إذا كانت  $v = \frac{e}{1-e}$ ،  $e = 2 - s^2$ ،

جد  $\frac{dv}{ds}$  |  $s=0$

مثال ١٢٣: إذا كانت  $v = \frac{1}{e}$ ،  $e = s^2 + 2s + 4$ ،

جد  $\left(\frac{dv}{ds}\right)$



## قاعدة السلسلة

يمكن حل الأمثلة التالية على استخدام القاعدة الثانية لقاعدة السلسلة

مثال ١٣١: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

$$(1) \quad y = (s^2 + 3)^{-3}$$

مثال ١٢٧: إذا كانت  $v = \sqrt{1 + \epsilon}$ ،  $\epsilon = 2 - s$ ،  
جد  $\left(\frac{v}{s}\right)$ ، حيث  $(\epsilon \leq 1)$ .

$$(2) \quad y = (s + 1)^3$$

مثال ١٢٨: إذا كانت  $v = \sqrt{5 + 2\epsilon}$ ،  $\epsilon = 9 - s^3$ ،  
جد  $\left(\frac{v}{s}\right)$

$$(3) \quad v = \sqrt{5 + s^3} \quad (s = 0)$$

مثال ١٢٩: إذا كانت  $v = l^3$ ،  $l = 8 - s$ ، جد  $\left(\frac{v}{s}\right)$   
عندما  $(s = \frac{1}{4})$ .

$$(4) \quad v = 5 - (1 - s^3)^{-2} \quad (s = 1)$$

مثال ١٣٠: إذا كانت  $v = 3m^3 - 2m + 1$ ،  
 $2 + s = 3$ ، جد  $\left(\frac{v}{s}\right)$ ، عندما  $(s = 0)$ .

---

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل  
لطلاب التخصص الأدبي والفنقي

---

إعداد/ مروان ابويه

---



## التفسير الهندسي

## مسميات أخرى للميل

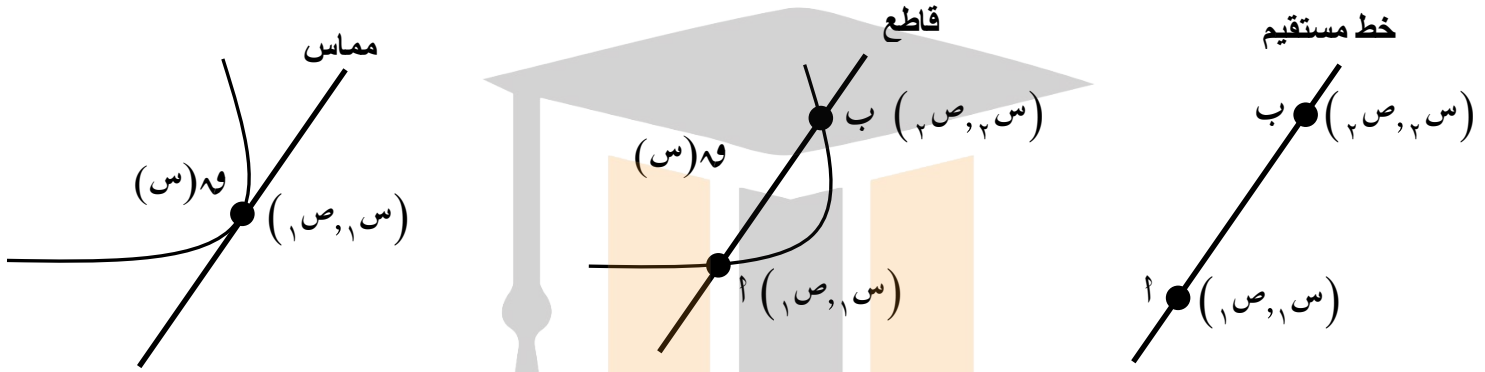
- ميل الخط المستقيم، نحتاج نقطتين (ص<sub>١</sub>، س<sub>١</sub>)، (ص<sub>٢</sub>، س<sub>٢</sub>)
- ميل القاطع، نحتاج نقطتين (ص<sub>١</sub>، س<sub>١</sub>)، (ص<sub>٢</sub>، س<sub>٢</sub>)
- ميل المماس، نحتاج قيمة (س) أو نقطة المماس (ص<sub>١</sub>، س<sub>١</sub>)

المشتقة هندسياً تعني (الميل)، ويرمز لها بالرمز (م)

وهو ميل المماس لمنحنى (س) عند (س = ١)

ويحسب على الشكل التالي: م = (١)'

- نجد المشتقة ونعوض قيمة (س)



## خطوات إيجاد معادلة المماس (معادلة الخط المستقيم)

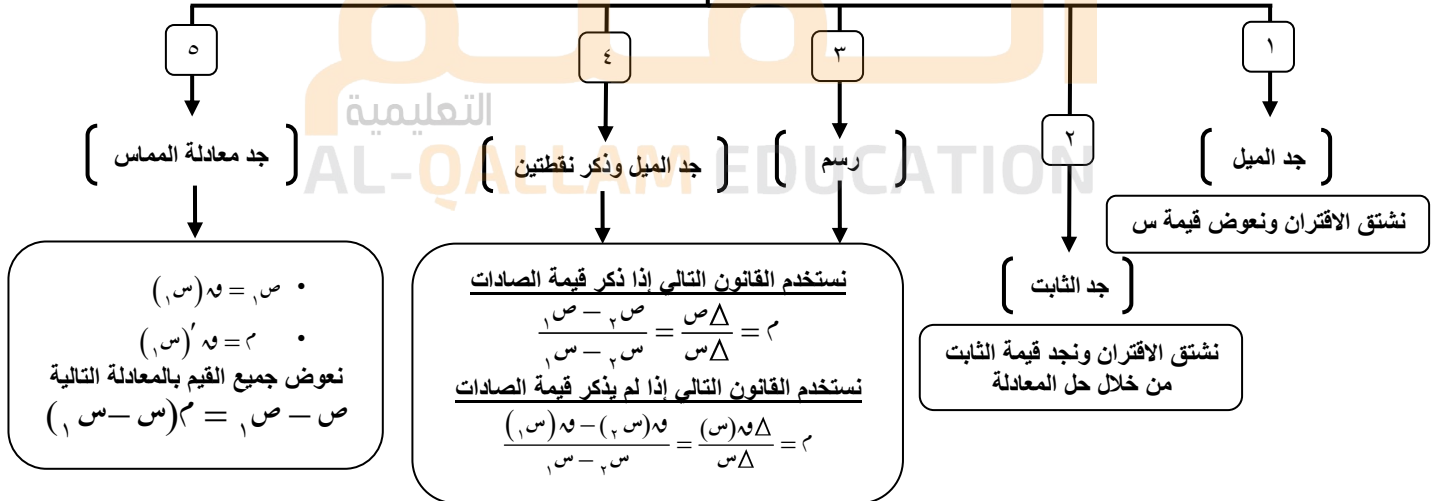
- نحدد قيمة (س<sub>١</sub>)، وتعطى دائماً في السؤال (هي نفسها س).
- نجد قيمة (ص<sub>١</sub>)، من خلال تعويض (س<sub>١</sub>) في الاقتران الأصلي.
- وأحياناً تعطى (ص<sub>١</sub>، س<sub>١</sub>) في نص السؤال على شكل نقطة.
- نجد مشتقة الاقتران، ثم نعوض فيها قيمة (س<sub>١</sub>).
- نكتب معادلة المماس، ونستبدل (ص<sub>١</sub>، س<sub>١</sub>)، (ص<sub>٢</sub>، س<sub>٢</sub>)، بالقيم الجديدة.

## معادلة المماس (معادلة الخط المستقيم)

- معادلة المماس هي: ص - ص<sub>١</sub> = م(س - س<sub>١</sub>)

## أنواع الأسئلة

منصة



ملاحظة: ( معدل التغير = الميل = ميل القاطع = ميل المماس )

## التفسير الهندسي

مثال ١: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = s^3 - 3s^2 + 1, \text{ عند } (s = 2)$$

مثال ٢: إذا  $f(s) = s^2 - 3s$ ،فجد ميل المماس لمنحنى الاقتران  $f(s)$  عند النقطة  $(2, -2)$ 

مثال ٣: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = -s^3 + 7s, \text{ عند } (s = 8)$$

مثال ٤: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = \frac{s-6}{s}, \text{ عند } (s = 0)$$

مثال ٥: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = \frac{2}{s} + 3s^2, \text{ عند } (s = -1)$$

مثال ٦: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = (3 - 2s^2)^3, \text{ عند } (s = 1)$$

مثال ٧: ما ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = \frac{s^3 + 3}{1 + s^2}, \text{ عند } (s = -2)$$

مثال ٨: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = (1 - 2s^2)(4s + 5), \text{ عند } (s = -1)$$

مثال ٩: جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = \sqrt[3]{4s}, \text{ عند } (s = -2)$$

مثال ١٠: ما ميل المماس لمنحنى الاقتران

$$f(s) = \frac{2s^2 - s^3}{6}, \text{ عند } (s = 2)$$

مثال ١١: إذا  $f(s) = s^5 + 4s^2$ ،فجد ميل المماس للاقتران  $f(s)$  عندما  $(s = 1)$

## التفسير الهندسي

مثال ١٢: ما قيمة (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران  
 $و(س) = س^2 - ٦س + ١$  يساوي (٢).

مثال ١٥: جد قيمة / قيم (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى  
 الاقتران  $و(س) = \frac{1}{3}س^3 - ٢س^2 + ٤س$  يساوي (صفر).

مثال ١٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران  
 $و(س) = س^3 - ٢س^2 + ٥س + ١$   
 عند النقطة (س = ٢) يساوي ١، جد قيمة الثابت (١)

مثال ١٦: جد قيم (س) التي تجعل ميل المماس لمنحنى الاقتران  
 $و(س) = س^3 - ٣س^2 + ٩س$  يساوي (صفر).

مثال ١٧: إذا كان ميل المماس للاقتران  $ص = (س - ٢)^4$   
 عند النقطة (س<sub>١</sub>، ص<sub>١</sub>)، يساوي (٤)، فجد قيمة (س<sub>١</sub>).

مثال ١٤: إذا كان  $و(س) = (س^3 - ٤)^3$ ،  
 فجد قيمة (س) التي تجعل  $و'(س) = ٣٦$

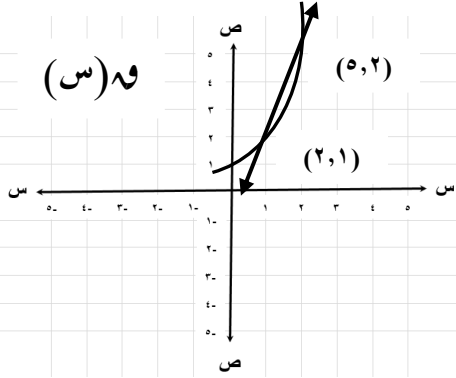
مثال ١٨: إذا كان  $و(س) = ٣س^2 + ٤س - ٣$ ،  
 حيث (١) ثابت، وكان ميل المنحنى عندما (س = ٣)  
 يساوي (٢٢)، فجد قيمة الثابت (١).

منصة

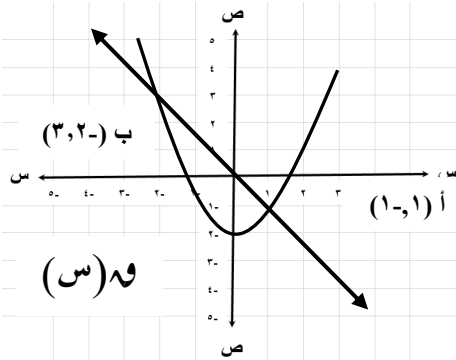
التعليمية  
AL-QADAM EDUCATION

## التفسير الهندسي

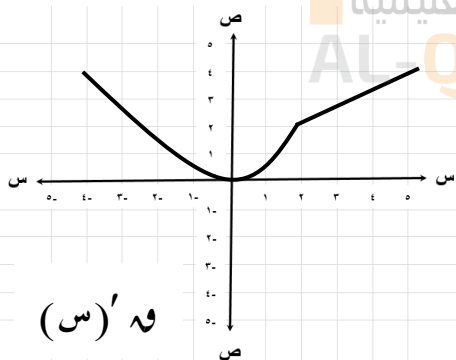
مثال ٢٣: معتمداً الشكل المجاور، ما معدل التغير للاقتران  $g$  و  $f$  في الفترة  $[2, 5]$ .



مثال ٢٤: معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران  $g$  و  $f$ ، ما ميل القاطع المار بالنقطتين (أ) و (ب)؟



مثال ٢٥: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران  $g$  و  $f$ ، جد ميل المماس المرسوم لمنحنى الاقتران  $g$  و  $f$  عندما  $g = 5$ .



مثال ١٩: إذا كان  $g = 2s^2$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين  $(2, 1)$ ،  $(3, 18)$ .

مثال ٢٠: إذا كان  $g = s^2 + 2s$ ، جد ميل القاطع لمنحنى الاقتران  $g$  و  $f$  والمار بالنقطتين  $(1, 3)$ ،  $(4, 24)$ .

مثال ٢١: إذا كان  $g = 3s$ ، جد ميل القاطع المار بالنقطتين  $(0, 0)$ ،  $(3, 9)$ .

مثال ٢٢: إذا كان  $g = s + s^2$ ، جد الميل لمنحنى الاقتران  $g$  و  $f$  والمار بالنقطتين  $(2, 2)$ ،  $(3, 3)$ .

## التفسير الهندسي

مثال ٢٨: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
 $w(s) = s^3 - 2$ ، عند  $(s = 2)$

مثال ٢٦: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
 $w(s) = s^2 + s$ ، عند  $(s = 3)$

مثال ٢٩: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
 $w(s) = (s^2 - 1)^3$ ، عند  $(s = 1)$

مثال ٢٧: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
 $w(s) = 3s + 5$ ، عند  $(s = 2)$



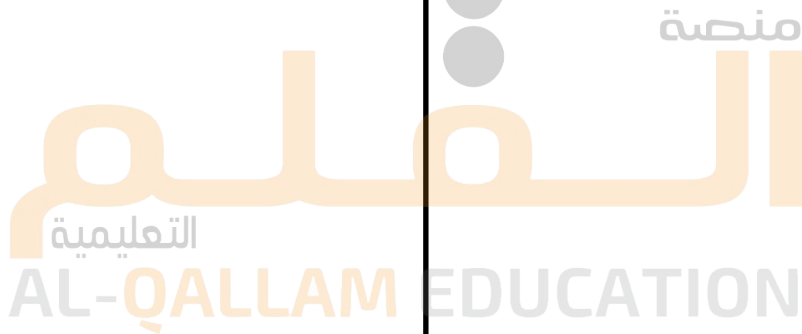
## التفسير الهندسي

مثال ٣٢: ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
وه (س) =  $\frac{6}{1+s^2}$  ، عند (س = ١)

مثال ٣٠: ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
وه (س) =  $(3+s)(2-s)^2$  ، عند (س = ١)

مثال ٣٣: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
وه (س) =  $\sqrt{s}$  ، عند (س = ١)

مثال ٣١: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  
وه (س) =  $\sqrt{1+s^2}$  ، عند (س = ٤)





## التفسير الهندسي

مثال ٣٦: ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$و(س) = \frac{س^٢ + ٢}{س + ٢} ، \text{ عند } (س = ١)$$

مثال ٣٤: جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$و(س) = س(س٣ - ١) ، \text{ عند } (س = ١)$$

مثال ٣٥: ما معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$$و(س) = (س٢ - ٤)(س + ١) ، \text{ عند } (س = ٠)$$

مثال ٣٧: إذا كان  $و(س) = (س٣ - ٢)٤$  ، فجد معادلة

المماس لمنحنى الاقتران  $و(س)$  عند النقطة  $(١-، ١-)$

منصة

القلم  
التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## التفسير الهندسي

مثال ٢٤ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران  
 $v = w(س) = س^٢ - ٣س + ٥$  ،  
 عند نقطة تقاطعه مع محور الصادات.

مثال ٣٣ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى الاقتران  
 $v = w(س) = س^٣ - ٢٧$  ،  
 عند نقطة تقاطعه مع محور السينات.

مثال ٣٨ : أوجد معادلة المماس المرسوم لمنحنى  $v = w(س)$   
 عند نقطة التماس  $(٥,٢)$  ، حيث  $w'(٢) = ٤$ .

مثال ٣٩ : إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى  $v = w(س)$   
 عند نقطة  $(١٥,٣)$  هي  $v = ٢س + ٩$  ،  
 فما قيمة  $w'(٣)$ .

مثال ٤٠ : إذا كانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى  $v = w(س)$   
 عند نقطة  $(٨,٣)$  هي  $v = ٢س - ١٣$  ، جد  $w'(٣)$ .

مثال ٤٤ : إذا كان  $v = w(س) = س^٢ + ٦س$  ،  
 فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران  $v = w(س)$  عند النقطة  $(٧,٤)$ .

مثال ٤١ : إذا كانت معادلة المماس للاقتران  $v = w(س)$  ،  
 عند النقطة  $(٣,٢)$  هي  $v = ٢س + ٦ - ٢٢ = ٠$   
 جد ميل المماس.

## التفسير الفيزيائي



المسافة (م) | المسافة دائماً موجبة، لا يوجد مسافة سالبة

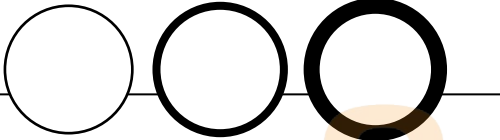
السرعة (م/ث) | السرعة الموجبة (الجسيم يسير إلى الأمام/ الأعلى)  
السرعة السالبة (الجسيم يسير إلى الخلف/ الأسفل)التسارع (م/ث<sup>2</sup>) | التسارع الموجب (الجسيم في حالة تسارع)  
التسارع السالب (الجسيم في حالة تباطؤ)

الزمن (ث) | الزمن دائماً موجبة، لا يوجد زمن سالب

## هام جداً قبل حل السؤال على التفسير الفيزيائي

يجب تحديد الافتترانات الثلاثة قبل حل السؤال (صندوق ف ع ت)

ف (ن) ع (ن) ت (ن)



$$\frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

ونعوض الزمن الأول والثاني للحصول على النتيجة

حدد زمنين (ن<sub>1</sub>، ن<sub>2</sub>)  
وطلب السرعة المتوسطة

٤

حدد زمن واحد  
وطلب جد الثابتنعوض الزمن (ن) في الافتتران المناسب  
ثم نجد الثابت من خلال حل المعادلة

## أنواع الأسئلة

[ حدد زمن واحد ]

١ تعويض الزمن (ن)  
في الافتتران المناسب

[ لم يحدد في السؤال الزمن ]

٢ نحدد الزمن (ن) من خلال المعطيات  
نجد المطلوب بتعويض الزمن (ن)

[ حدد زمن واحد ]

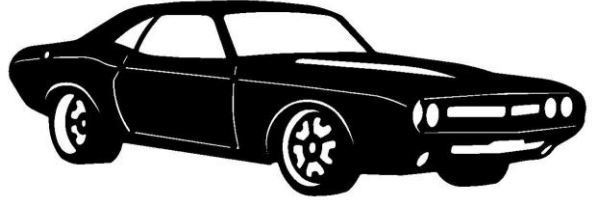
[ لم يحدد في السؤال الزمن ]

[ حدد زمن واحد ]

[ لم يحدد في السؤال الزمن ]

[ حدد زمن واحد ]

[ لم يحدد في السؤال الزمن ]



عند حركة أي جسيم في الطبيعة يتولد منه ثلاث افتترانات مهمة، وهي:

- المسافة ف (ن)، وتقاس بوحدة المتر ( م )
- السرعة ع (ن)، وتقاس بوحدة المتر/ الثانية ( م / ث )
- التسارع ت (ن)، وتقاس بوحدة المتر/ الثانية<sup>2</sup> ( م / ث<sup>2</sup> )
- حيث (ن) يمثل الزمن، ويقاس بوحدة الثانية.

سلوك المشتقة فيزيائياً يتلخص بـ (مسافة، سرعة، تسارع)  
حيث أن المسافة معلومة بنص السؤال ويرمز بـ ف (ن)

يكون الاشتقاق بدلالة (ن)

ويمكن الحصول على السرعة والتسارع من اشتقاق المسافة

- السرعة اللحظية = مشتقة المسافة ع (ن) = ف (ن)'
- التسارع اللحظي = مشتقة السرعة ت (ن) = ع (ن)'

معلومات مهمة تفيد في حل الأسئلة

- انعدام التسارع
- انعدام السرعة
- وصول الجسيم لأقصى ارتفاع
- المسافة، السرعة، التسارع | الابتدائي (ن = ٠)
- التسارع = ٨ م/ث<sup>2</sup>
- السرعة = ١٣ م/ث
- ت (ن) = ٨
- ع (ن) = ١٣

## التفسير الفيزيائي

**مثال ٧ : ٤** يتحرك جسيم مبتعداً عن نقطة الأصل وفق العلاقة التالية:

$$f(s) = 2s^3 - 3s^2 + 1$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتر، ( s ) الزمن بالثواني، جد ما يلي:

- ( أ ) المسافة المقطوعة بعد مرور (نصف ثانية).  
( ب ) التسارع بعد مرور (نصف دقيقة).

**مثال ٥ : ٤** يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة التالية:

$$f(s) = 3s^3 + 2s - 3$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتر، ( s ) الزمن بالثواني،  
جد سرعة وتسارع الجسيم بعد مرور ( ٢ ) ثانية من بدء الحركة.

**مثال ٦ : ٤** يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية:

$$f(s) = 3s^3 - 2s^2 + 5s$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتر، ( s ) الزمن بالثواني، جد ما يلي:

- ( أ ) المسافة المقطوعة بعد مرور ( ٣ ) ثواني.  
( ب ) التسارع الابتدائي.  
( ج ) على ماذا تدل ناتج التسارع.

**مثال ٨ : ٤** انطلق صاروخ العاب نارية إلى السماء مبتعداً عن سطح

$$f(s) = (3s^3 - 2s^2)$$

الأرض حسب العلاقة التالية: ( f ) المسافة بالأمتر، ( s ) الزمن بالثواني،  
جد تسارع الصاروخ بعد مرور ( ١ ) ثانية.

## التفسير الفيزيائي

مثال ٥١: يتحرك جسيم وفق العلاقة:

$$f(v) = v^3 + 2v^2 - 5$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني،  
جد سرعة هذا الجسيم عندما يصبح تسارعه (٦ ١) م/ث<sup>٢</sup>.

مثال ٤٩: يتحرك جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة التالية:

$$f(v) = v^3 - 3v^2 + 5v$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني،  
جد سرعة الجسيم لحظة انعدام التسارع.

مثال ٥٠: يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق العلاقة التالية:

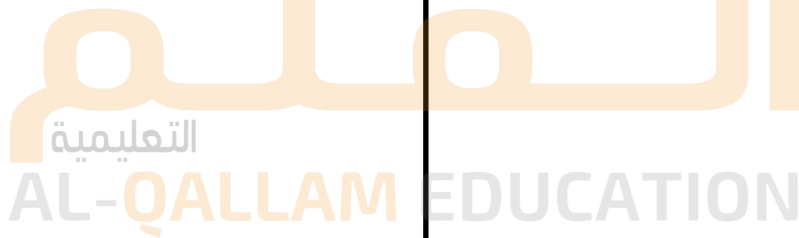
$$f(v) = v^3 - 2v^2 + 8$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني،  
جد تسارع هذا الجسيم لحظة انعدام السرعة.

مثال ٥٢: تتحرك سيارة وفق المعادلة التالية:

$$f(v) = v^3 - 5v + 11$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني،  
جد تسارع الجسيم عندما تصبح سرعته (٢ ٢) م/ث.



## التفسير الفيزيائي

**مثال ٥٥:** يتحرك جسيم وفق العلاقة:

$$f(v) = v^3 - v^2 - 5v - 4, \quad (v \geq 1)$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتار، ( v ) الزمن بالثواني،  
جد الزمن لحظة انعدام السرعة.

**مثال ٥٣:** انطلق جسيم إلى الأعلى وفق العلاقة:

$$f(v) = v^2 - v + 8$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتار، ( v ) الزمن بالثواني،  
جد تسارع هذا الجسيم عندما يصل لأقصى إرتفاع.

**مثال ٥٦:** إذا كان  $f(v) = v^3 - 9v^2 + 5v - 1$ ، (  $v < 1$  )

هو اقتران المسافة التي يقطعها الجسيم، حيث ( f ) المسافة  
بالأمتار، ( v ) الزمن بالثواني،  
جد تسارع الجسيم في لحظة انعدام السرعة.

**مثال ٥٤:** تتحرك دراجة هوائية وفق المعادلة التالية:

$$f(v) = \frac{v^3}{3} - v^2 + 9$$

حيث ( f ) المسافة بالأمتار، ( v ) الزمن بالثواني،  
احسب تسارع الدراجة عندما تكون سرعتها ( ٢ ) م/ث.

منصة

القلم  
التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

## التفسير الفيزيائي

**مثال ٥٩:** إذا كان  $f(v) = v^3 - 3v^2 + 6v + 5$ ،  
 هو اقتران المسافة التي تقطعها السيارة، حيث  $f$  المسافة بالأمتار،  
 $v$  الزمن بالثواني، جد بعد الجسم عن نقطة الأصل عندما تنعدم  
 السرعة.

**مثال ٥٧:** إذا كان  $f(v) = v^3 - 3v^2 + 5$ ،  $(v \leq 0)$   
 هو اقتران المسافة التي تقطعها السيارة، حيث  $f$  المسافة  
 بالأمتار،  $v$  الزمن بالثواني،  
 جد تسارع السيارة عندما تنعدم السرعة.

**مثال ٦٠:** إذا كان  $f(v) = v^3 - 9v^2 + 5v + 1$ ،  $(v < 1)$   
 هو اقتران المسافة التي يقطعها الجسم، حيث  $f$  المسافة بالأمتار،  
 $v$  الزمن بالثواني، جد تسارع الجسم في لحظة انعدام السرعة.

**مثال ٥٨:** يتحرك جسم وفقاً للعلاقة التالية:  
 $f(v) = v^3 - 2v^2$ ، حيث  $f$  المسافة بالأمتار،  
 $v$  الزمن بالثواني، احسب سرعة الجسم عندما ينعدم التسارع.

القلم  
 التعليمية  
 AL-QALLAM EDUCATION

## السرعة المتوسطة

**مثال ٦٤:** يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية:

$$f(s) = s^3 + 1,$$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (س) الزمن بالثواني،

جد السرعة المتوسطة لهذا الجسيم في الفترة الزمنية [٣،١].

**مثال ٦١:** يتحرك جسيم حسب العلاقة التالية:  $f(s) = s^3 - 2s^2$ ،

حيث (س) الزمن بالثواني، (ف) المسافة بالأمتار،

احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٣،١].

**مثال ٦٢:** يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران التالي:

$$f(s) = 4s^2 + 2s,$$

حيث (ف) المسافة المقطوعة

بالأمتار، (س) الزمن بالثواني،

جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٢،١].

**مثال ٦٥:** يتحرك جسيم حسب العلاقة:  $f(s) = s^2 + 2s$

حيث (ف) المسافة بالأمتار، (س) الزمن بالثواني، جد سرعة

الجسيم المتوسطة عندما تتغير (س) من (٠) إلى (٣).

**مثال ٦٦:** يتحرك جسيم على خط مستقيم وفقاً للاقتران:

$$f(s) = 6s^2 + 2s,$$

حيث (ف) المسافة المقطوعة بالأمتار، (س) الزمن بالثواني،

جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٣،٢].

**مثال ٦٣:** إذا كانت المسافة التي يقطعها جسيم أثناء سقوطه

$$f(s) = s^2 - s,$$

حيث (ف) المسافة المقطوعة بالأمتار، (س) الزمن بالثواني،

جد السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٤،١].

منصة

التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION



## إيجاد الثوابت (المجاهيل)

**مثال ٦٩:** يتحرك جسيم وفق العلاقة:  $f(v) = v^3 - 2v^2 - 3v$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني، إذا كانت سرعة الجسيم المقطوعة بعد ثانيتين من بدء الحركة تساوي (٤٢) م/ث، فجد قيمة الثابت (أ).

**مثال ٦٧:** يتحرك جسيم وفق المعادلة التالية:  
 $f(v) = v^3 - 2v^2 - 5v$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني، أوجد قيمة (أ) التي تجعل تسارع الجسيم يساوي (٣٠) م/ث<sup>٢</sup>، بعد مرور (٣) ثواني من بدء الحركة.

**مثال ٧٠:** يتحرك جسيم وفق العلاقة:  $f(v) = (1 - v^2)^2$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني، أوجد قيمة (أ) التي تجعل من سرعة الجسيم بعد مرور (٣) ثواني تساوي (٣٦) م/ث.

**مثال ٦٨:** يتحرك جسيم وفق المعادلة التالية:  
 $f(v) = v^3 - 2v^2 + 2v$ ، حيث (ف) المسافة بالأمتار، (v) الزمن بالثواني، أوجد قيمة (أ) التي تجعل تسارع الجسيم يساوي (١٨) م/ث<sup>٢</sup>، بعد مرور ثانية من بدء الحركة.

AL-QALLAM EDUCATION  
 منصة  
 التعليم

## القيم الحرجة والتزايد والتناقص والقيم القصوى

من أهم التطبيقات على التفاضل هو اختبار المشتقات والتي تستخدم في العديد من التطبيقات الفيزيائية والهندسية والاقتصادية، حيث تعطي هذه الاختبارات دلالات واضحة لطبيعة وسلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص والقيم القصوى.

القيم الحرجة: هي اصفار المشتقة الأولى، أي هي القيم التي تجعل من المشتقة تساوي صفر.

وقد يتغير سلوك الاقتران من حيث التزايد والتناقص عند نقاط محددة وتسمى بـ النقاط الحرجة.

- ✓ القيمة الحرجة هي القيمة التي تفصل بين التزايد والتناقص.
- ✓ القيمة الحرجة هي التي تحدد القيم العظمى والصغرى (القيم المحلية القصوى).

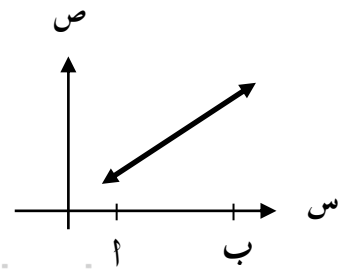
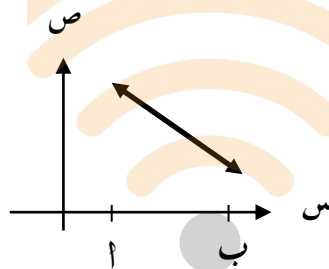
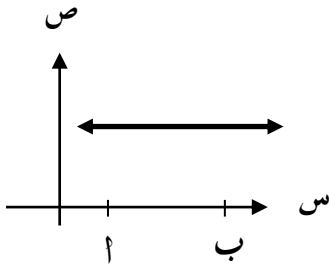
### تعريف النقاط الحرجة

يطلق على الأعداد  $(ج)$  الواقعة في مجال الاقتران  $و(س)$ ، التي يكون عندها  $و'(ج) = 0$ ، اسم النقاط الحرجة للاقتران  $و(س)$ ، وتسمى النقط  $(ج، و(ج))$  الواقعة على منحنى الاقتران  $و(س)$  نقطاً حرجة.

### تعريف التزايد والتناقص

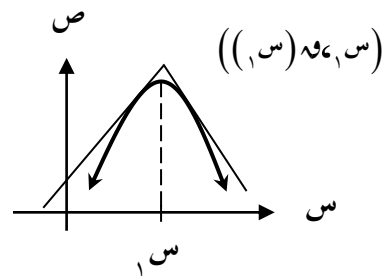
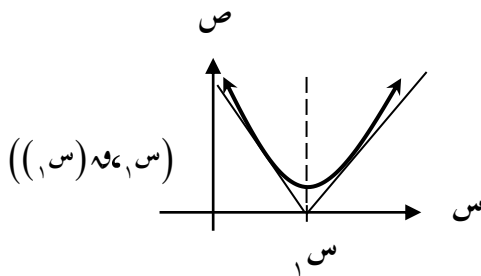
إذا كان الاقتران  $و(س)$  معرّفًا على الفترة  $[أ، ب]$ ، وكان  $س_1، س_2 \in [أ، ب]$ ، فإن:

- ١) الاقتران  $و(س)$  يكون متزايداً في الفترة  $[أ، ب]$  إذا كان  $و(ب) < و(أ)$  عندما  $(ب < أ)$
- ٢) الاقتران  $و(س)$  يكون متناقصاً في الفترة  $[أ، ب]$  إذا كان  $و(ب) > و(أ)$  عندما  $(ب < أ)$
- ٣) الاقتران  $و(س)$  يكون ثابتاً في الفترة  $[أ، ب]$  إذا كان  $و(ب) = و(أ)$  عندما  $(ب = أ)$



### تعريف القيم المحلية القصوى

- ١) يكون للاقتران  $و(س)$  قيمة عظمى محلية، عندما  $(س_1 = ج)$ ، حيث إن  $و(ج) < و(س)$ ، وتكون القيمة العظمى هي  $و(ج)$
- ٢) يكون للاقتران  $و(س)$  قيمة صغرى محلية، عندما  $(س_1 = ج)$ ، حيث إن  $و(ج) > و(س)$ ، وتكون القيمة الصغرى هي  $و(ج)$



## القيم الحرجة

مثال ٧٦: إذا كان للاقتران  $٧ = (س) = س^٢ + ١س + ٧$ ،  
قيم حرجة عند  $(س = ٣)$ ، جد  $(١)$ .

مثال ٧١: جد القيم الحرجة للاقتران  $١ + س = (س) = ٢س^٢ - ٨س + ١$

مثال ٧٧: إذا كان للاقتران  $٢ + ١س = (س) = ٢س^٢ + ١س$ ،  
قيم حرجة عند  $(س = ٢)$ ، جد  $(١)$ .

مثال ٧٢: جد القيم الحرجة للاقتران  $٢ - ٣س = (س) = ٢س^٣ - ١س$

مثال ٧٨: إذا كان للاقتران  $٦ - ١س = (س) = ٢س^٢ - ١س - ٦$ ،  
قيم حرجة عند  $(س = ١)$ ، جد  $(١)$ .

مثال ٧٣: جد النقاط الحرجة لـ  $٨ + ٢س = (س) = ٣س^٣ - ٦س^٢ + ٨$

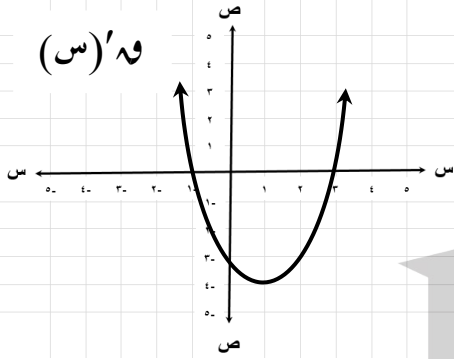
مثال ٧٩: إذا كان للاقتران  $١ + ٤س = (س) = ٢س^٢ - ٤س + ١$ ،  
قيمة حرجة عند النقطة  $(٨, ٣)$ ، فما قيمة الثابت  $(ب)$

مثال ٧٤: جد القيم الحرجة للاقتران  $٦(٦ - س) = (س) = ٣س^٣ - ٦س^٢ + ٦$

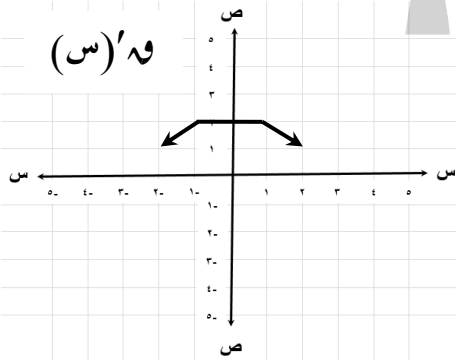
مثال ٧٥: جد القيم الحرجة للاقتران  $٧ - ٩س = (س) = ٩س - ٧$

## القيم الحرجة

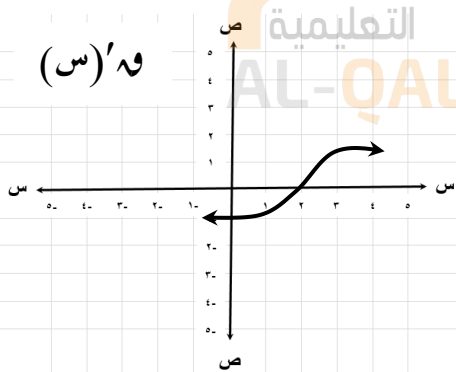
**مثال ٨٣:** معتمداً الشكل الذي يمثل منحى المشتقة الأولى للاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$ ، جد النقاط الحرجة.



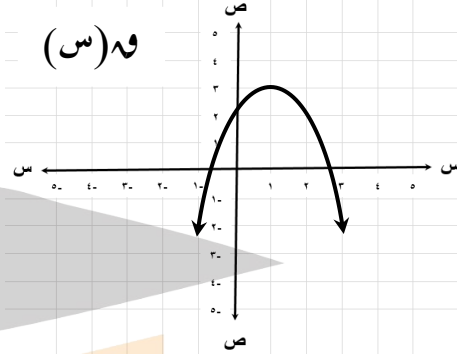
**مثال ٨٤:** معتمداً الشكل الذي يمثل منحى الاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$  المعروف على الفترة  $[-2, 2]$ ، جد النقاط الحرجة.



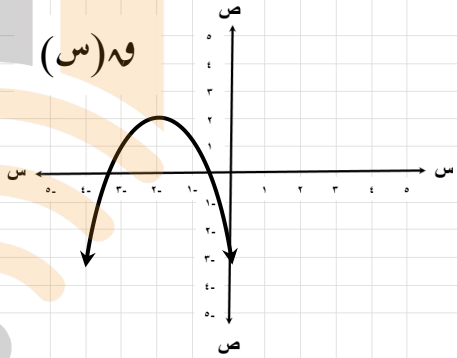
**مثال ٨٥:** اعتماداً على الشكل الذي يمثل منحى الاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$  في الفترة  $[-5, 1]$ ، جد النقاط الحرجة.



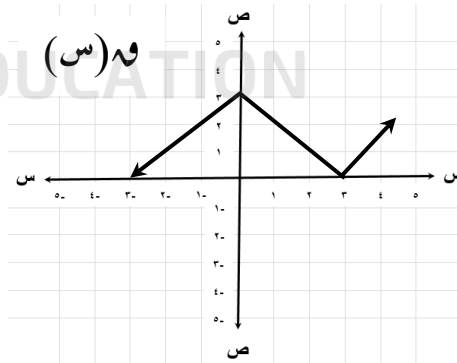
**مثال ٨٠:** معتمداً الشكل الذي يمثل الاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$ ، جد النقاط الحرجة.



**مثال ٨١:** معتمداً الشكل الذي يمثل الاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$ ، جد النقاط الحرجة.



**مثال ٨٢:** معتمداً الشكل الذي يمثل الاقتران  $f(x)$  و  $g(x)$ ، جد النقاط الحرجة.



## التزايد والتناقص

مثال ٨٨: حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  
 $و(س) = س^٣ - ٣س^٢ + ١$

مثال ٨٦: حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  
 $و(س) = س^٢ - ٤س + ١$

مثال ٨٧: حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  
 $و(س) = (س٢ - ٤)^٢$

مثال ٨٩: حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران  
 $و(س) = س^٢ - س - ٦$



## التزايد والتناقص

مثال ٩٢: ليكن  $و(س) = \frac{1}{4}س^2 - 2س + ٤$ ،  
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $و(س)$ .

مثال ٩٠: إذا كان  $و(س) = س(٢ - ١س)$ ،  
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $و(س)$ .

مثال ٩٣: ليكن  $و(س) = \frac{1}{4}س^3 - \frac{1}{4}س^2 - ٢س + ١٠$ ،  
فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $و(س)$ .

مثال ٩١: جد فترات التزايد والتناقص للاقتران  
 $و(س) = ٦س - \frac{س^3}{٣}$



## التزايد والتناقص

مثال ٩٤: إذا كان  $٨ - ٣س = (س)$  فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٨(س)$ .

مثال ٩٥: إذا كان  $٤س - ٣ = (س)$  فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٤س(س)$ .

مثال ٩٦: جد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٣س + ٣ = (س)$

مثال ٩٧: ليكن  $٩ + ٤س + ٢س - ٣س = (س)$  فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $٩(س)$ .

مثال ٩٨: ليكن  $(٣ + س)(٢ + س) = (س)$  فجد فترات التزايد والتناقص للاقتران  $(٣ + س)$ .

حاول حل السؤال لو كان  $(٣ + س)(٢ + س) = (س)$

منصة

القلم  
التعليمية  
AL-QALLAM EDUCATION

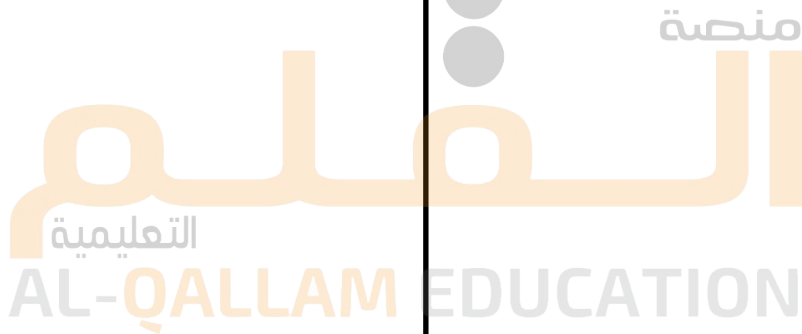
## القيم القصوى

مثال ١٠١: إذا كان الاقتران  $W(s) = 2s(2 - 12s^3 - 12s^2)$ ،  
جد القيم القصوى للاقتران  $W(s)$ ، محدداً نوعها.

مثال ٩٩: إذا كان الاقتران  $W(s) = 3s^2 - 2s + 6$ ،  
جد القيم القصوى للاقتران  $W(s)$ .

مثال ١٠٢: إذا كان الاقتران  $W(s) = 6s^2 + 2 - 3s^3 - 4s^3$ ،  
جد القيم القصوى المحلية للاقتران  $W(s)$ .

مثال ١٠٠: إذا كان الاقتران  $W(s) = 3s^3 - 2s + 3$ ،  
جد القيم المحلية القصوى (إن وجدت).





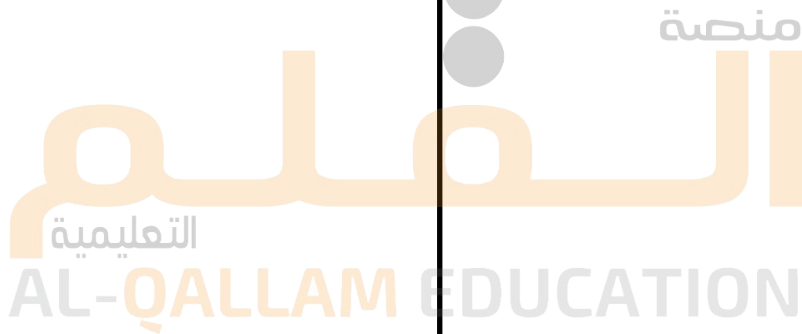
## القيم القصوى

مثال ١٠٥: ليكن  $w(s) = \frac{1}{3}s^2 - 2s - 9$ ،  
فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت).

مثال ١٠٣: إذا كان  $w(s) = 9s^2 - 3s + 8$ ،  
جد (س) التي يكون عندها قيمة عظمى أو صغرى وحدد نوعها.

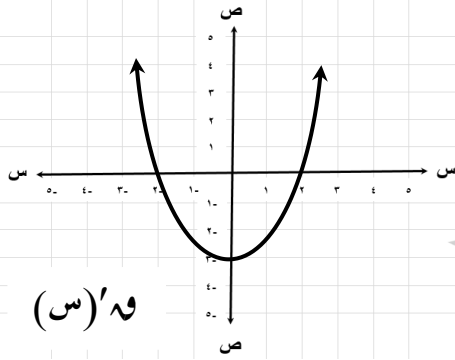
مثال ١٠٦: ليكن  $w(s) = \frac{1}{3}s^3 - 2s^2 + 7s$ ،  
فجد القيم العظمى والصغرى (إن وجدت).

مثال ١٠٤: إذا كان الاقتران  $w(s) = s(3 - s)$ ،  
جد القيم المحلية القصوى للاقتران  $w(s)$ .

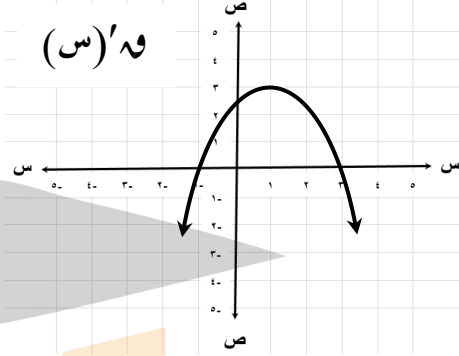


## القيم القصوى

مثال ١٠٩: معتمداً الشكل يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران  $g$  و  $h$ ، جد القيم القصوى.

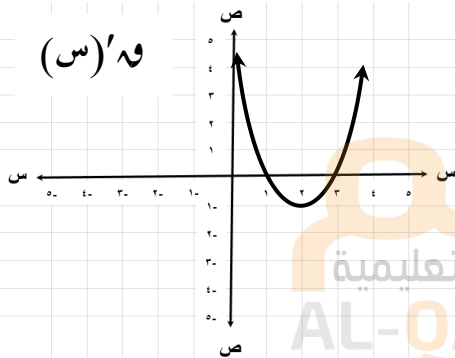


مثال ١٠٧: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى الاقتران  $g$  و  $h$ ، جد القيم القصوى.



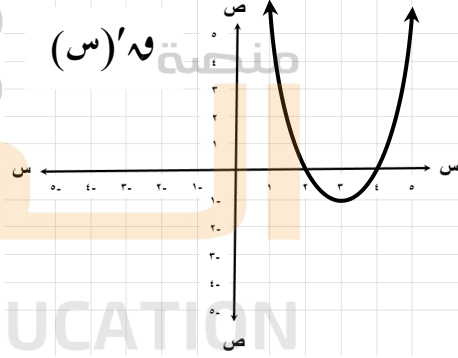
مثال ١١٠: معتمداً على الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران  $g$  و  $h$ ، جد كلاً من:

- ١) قيم  $g$  التي يكون عندها قيمة قصوى للاقتران  $g$  و  $h$ .
- ٢) القيم القصوى، محدداً نوعها.



مثال ١٠٨: معتمداً الشكل الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران  $g$  و  $h$ ، جد كلاً من:

- ١) قيم  $g$  التي يكون عندها قيمة قصوى للاقتران  $g$  و  $h$ .
- ٢) القيم القصوى، محدداً نوعها.



## التطبيقات الاقتصادية

التطبيقات الاقتصادية تتلخص في (الإيرادات، التكاليف، الربح)، واليك أهم المعادلات المستخدمة في التطبيقات الاقتصادية:

الإيرادات الكلية  $S$  (س)

$$S = r(s) + l(s)$$

قانون لحساب الإيراد الكلي

$$S = s \times \text{سعر البيع}$$

الإيراد الحدي  $S'$  (س)

الإيراد عند لحظة معينة

الربح الكلي  $r$  (س)

$$r = r(s) - l(s)$$

قانون لحساب الربح الكلي

$$r = s \times \text{مقدار الربح}$$

الربح الحدي  $r'$  (س)

الربح عند لحظة معينة

التكاليف الكلية  $l$  (س)

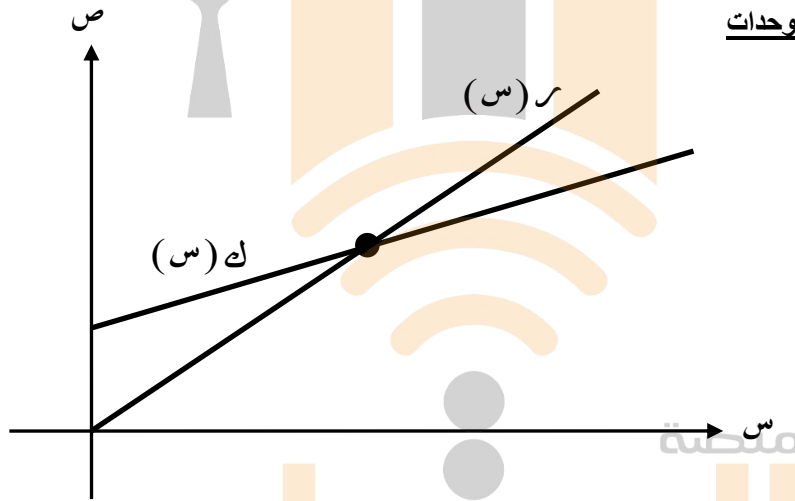
$$l = r(s) - S$$

قانون لحساب التكاليف الكلية

$$l = s \times \text{سعر التكلفة}$$

التكاليف الحدية  $l'$  (س)

التكاليف عند لحظة معينة



• حيث  $(s)$  تمثل عدد الوحدات

## طبيعة الأسئلة

✓ إذا طلب في السؤال عدد السلع  $(s)$  التي تحقق أعلى ربح

نحسب الربح  $r$  (س)

نشق الربح  $r'$  (س)

نساوي الناتج بالصفر  $r' = 0$

نجد قيمة  $(s)$  من خلال حل المعادلة

✓ إذا طلب في السؤال عدد السلع  $(s)$  التي تحقق أدنى تكاليف

نحسب التكاليف  $l$  (س)

نشق التكاليف  $l'$  (س)

نساوي الناتج بالصفر  $l' = 0$

نجد قيمة  $(s)$  من خلال حل المعادلة

✓ إذا طلب في السؤال التكلفة الحدية عندما  $(s = 1)$

نشق اقتران التكلفة ونعوض بقيمة  $(1)$

$$l'(1)$$

✓ إذا طلب في السؤال الإيراد الحدي عندما  $(s = 1)$

نشق اقتران الإيراد ونعوض بقيمة  $(1)$

$$S'(1)$$

✓ إذا طلب في السؤال الربح الحدي عندما  $(s = 1)$

نشق اقتران الربح ونعوض بقيمة  $(1)$

$$r'(1)$$

## التطبيقات الاقتصادية

**مثال ١١١:** إذا كان اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من منتج ما، يعطى بالعلاقة:  $ل(س) = 100 - 6س + 2س^2$ ، جد التكلفة الحدية عندما  $(س = 5)$ .

**مثال ١١٢:** إذا كان  $ل(س) = 40 + 3س^2$  دينار، اقتران التكلفة الكلية لإنتاج (س) قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج (٢٠) قطعة من هذه السلعة.

**مثال ١١٦:** إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:  $د(س) = 100 - 3س$  دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:  $ل(س) = 50 + 2س$  دينار، حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

**مثال ١١٧:** إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:  $د(س) = 2س + 3س^2$  دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:  $ل(س) = 36 - 5س$  دينار، جد الربح الحدي عندما  $(س = 10)$ .

**مثال ١١٣:** إذا كان اقتران الإيراد الكلي لبيع (س) قطعة من منتج ما، يعطى بالعلاقة:  $د(س) = 20 + 3س^2$ ، جد الإيراد الحدي عندما  $(س = 10)$ .

**مثال ١١٤:** إذا كان مصنع يبيع الجهاز الواحد بسعر (٢٠٠) دينار، فجد الإيراد الكلي لبيع (س) من الأجهزة.

**مثال ١١٨:** يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ (٩٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = 0.2س^2 + 70س + 100$  دينار، جد الربح الحدي.

**مثال ١١٥:** إذا كان (س) عدد الوحدات المنتجة، حيث يتم بيع الوحدة بـ (٤٠) دينار، جد الإيراد الحدي لبيع (٨) وحدات.

## التطبيقات الاقتصادية

**مثال ١٢٢:** إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:  
 $S(س) = ١٠س - س^٢$  دينار، واقتران الربح الكلي هو:  
 $ر(س) = ٢س - ٣س^٢$  دينار، حيث (س) عدد الوحدات  
المنتجة من سلعة ما، فجد التكاليف الحدية عندما (س = ١٠).

**مثال ١١٩:** إذا كان اقتران الإيراد الكلي للمبيعات هو:  
 $S(س) = ٨٠س + س^٢$  دينار، واقتران التكلفة الكلية هو:  
 $ل(س) = ٤٠ + ٦٠س + ١٠س^٢$  دينار، حيث (س) عدد الوحدات  
المنتجة من سلعة ما، فجد الربح الحدي.

**مثال ١٢٠:** يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة  
بمبلغ (١٠٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج  
(س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:  
 $ل(س) = ٣٠٠س + ٤٠س^٢ + ٧٠$  دينار،  
جد الربح الحدي.

**مثال ١٢٣:** مصنع يبيع الوحدة الواحدة من سلعة ما بسعر  
(١٠٠ - س) ديناراً، وكانت التكاليف الكلية تعطى  
بالاقتران:  $ل(س) = ٣٠٠ + ٣س^٢ + ٣س$  دينار،  
فجد الربح الحدي لبيع وحدة واحدة.

**مثال ١٢١:** إذا كان اقتران التكاليف الكلية هو:  
 $ل(س) = ٤٠٠س + ٧س + ٣٠٠$ ، واقتران الربح  
الكلي هو:  $ر(س) = ٣٠٠س - ٤٠٠س^٢$ ،  
حيث (س) عدد الوحدات المنتجة من سلعة ما،  
فجد الإيرادات الحدية عندما (س = ٥٠).

## التطبيقات الاقتصادية

**مثال ١٢٦:** ينتج مصنع (س) من أجهزة الحاسوب في الشهر ويبيع الجهاز الواحد بمبلغ (٢٠٠ - س) ديناراً. إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) من الأجهزة تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = ٢٩٠ + ٤٠س + ٢س^٢$  ديناراً، فما عدد الأجهزة التي يجب أن ينتجها ويبيعها المصنع شهرياً حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن.

**مثال ١٢٤:** إذا كان الإيراد الكلي عن بيع (س) قطعة من منتج ما هو:  $S(س) = ١٠س - س^٢$ ، والتكلفة الكلية هي:  $ل(س) = ٨س$ ، فجد قيمة (س) التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

**مثال ١٢٥:** ينتج مصنع للدراجات (س) دراجة أسبوعياً، فإذا كانت تكلفة الإنتاج الكلي الأسبوعي تعطى بالعلاقة:

$ل(س) = ١٠٠ + ٢٠س + س^٢$ ، وكان المصنع يبيع الدراجة الواحدة بمبلغ (١٠٠) دينار، جد عدد الدراجات (س) التي يجب أن يبيعها المصنع أسبوعياً ليحقق أكبر ربح.

**مثال ١٢٧:** يبيع مصنع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٤٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = ٠.٢س + ٦س^٢$  ديناراً، جد عدد الوحدات التي تجعل الربح أكبر ما يمكن.

منصة

التعلم  
AL-QALLAM EDUCATION

## التطبيقات الاقتصادية

**مثال ١٢٨:** يبيع مصنع سلعة معينة بسعر (٥٠) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = ٢٥٠٠ + ٢٠س + ٠.٠٢س^٢$  فما عدد السلع التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقيق للمصنع أكبر ربح ممكن؟

**مثال ١٣٠:** ينتج مصنع للثلجات (س) ثلاجة شهرياً، فإذا كانت تكلفة إنتاجها تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = ٣٦٠٠٠ + ٤س + س^٢$ ، وكان سعر الثلاجة الواحدة (٥٠٠) دينار، فجد عدد الثلاجات (س) التي يجب أن يبيعها المصنع شهرياً لتحقيق أكبر ربح ممكن.

**مثال ١٣١:** يبيع مصنع للألعاب لعبة بسعر (١٥) ديناراً، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدينار لإنتاج (س) لعبة أسبوعياً تعطى بالعلاقة:  $ل(س) = ٤٠٠س + ٥س + ٩٨٠$ ، فما عدد الألعاب التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعياً لتحقيق للمصنع أكبر ربح ممكن؟

**مثال ١٢٩:** يقوم مصنع للأجهزة الكهربائية بإنتاج وبيع (س) ثلاجة سنوياً، بحيث تكون التكلفة الكلية حسب العلاقة التالية:  $ل(س) = ٢س^٢ - ٤٠٠س + ٥٠$ ، جد عدد الثلاجات اللازم إنتاجها لتكون التكاليف أقل ما يمكن.

منصة

AL-QALLAM EDUCATION

## التطبيقات الاقتصادية

**مثال ١٣٥:** إذا كان الربح الكلي لمصنع أثاث مكتبي هو:  
 $R(s) = 50s - s^2$ ، وكان سعر بيع القطعة (٢٠) دينار، فجد عدد الوحدات التي تحقق أقل تكلفة ممكنة.  
ملاحظة:  $R(s) = s \times \text{سعر البيع}$

**مثال ١٣٢:** إذا كان مصنع يربح (١٠) دنانير في بيع الوحدة وكان الإيراد الكلي له هو:  $R(s) = 90s - 5s^2$ ، جد  
 (١) عدد الوحدات التي تجعل الإيراد أكبر ما يمكن.  
 (٢) عدد الوحدات التي تجعل التكاليف أقل ما يمكن.  
ملاحظة:  $R(s) = s \times \text{مقدار الربح}$

**مثال ١٣٦:** يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ (١٠٠) دينار، فإذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعياً تعطى بالعلاقة التالية:  
 $R(s) = 30s^2 + 40s + 70$  ديناراً، فجد  
 (١) معدل التغير في الربح بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة.  
 (٢) الربح الحدي.  
 (٣) معدل التغير في التكلفة.  
 (٤) أقل تكلفة ممكنة.

**مثال ١٣٣:** إذا كانت تكلفة إنتاج الوحدة الواحدة في مصنع (٢٠) دينار، وكان الربح الكلي:  $R(s) = 300s - 2s^2$ ، جد  
 (١) أكبر إيراد لهذا المصنع.  
 (٢) عدد الوحدات التي تجعل الإيراد أكبر ما يمكن.  
ملاحظة:  $R(s) = s \times \text{سعر التكلفة}$

**مثال ١٣٤:** إذا كان  $R(s)$  اقتران التكلفة الكلية،  $S(s)$  اقتران الإيراد الكلي لمصنع، حيث  $(s)$  عدداً للوحدات المنتجة أسبوعياً، متى يكون الربح الأسبوعي أكبر ما يمكن؟