الفاتح

CLASS OF 2022

الرياضيات الفصل الثاني

لطلاب التوجيهي الأدبي والفندقي

(المادة مشروحة بالكامل على منصة القلم التعليمية)

(ينصح بحضور حصص التأسيس قبل البدء بدراسة المادة)

مروان ابوديه

0797 55 27 27

إحدى إصدارات

مدرسة مروان ابوديه الافتراضية

" مشروع تعلم عن بعد "

الوحدة الرابعة: التكـــامل وتطبيقـــاتـه
لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

<u>قواعد التكامل غير المحدود</u>

١) $\int (\text{أ})\,\text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ ، حيث (أ) ثابت.

٢) $\int (\text{س}^{\text{ن}})\,\text{ءس} = \dfrac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$ ، $\text{ن} \neq -١$ ، **قد نحتاج لخطوة التجهيز:** $\dfrac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{-\text{ن}}$ ، $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

٣) $\int \text{أ}\,\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \text{أ}\int \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$ ، حيث (أ) ثابت.

خاصية مهمة: التكامل يوزع على الجمع والطرح ولا يوزع على الضرب والقسمة، **في الضرب والقسمة نحتاج للتبسيط والتحليل.**

٤) $\int (\text{أس}+\text{ب})^{\text{ن}}\,\text{ءس} = \dfrac{(\text{أس}+\text{ب})^{(\text{ن}+١)}}{(\text{ن}+١)\times\text{أ}} + \text{جـ}$

٥) $\int (\text{جاس})\,\text{ءس} = -\text{جتاس}+\text{جـ}$ $\qquad$ $\int \text{جا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \dfrac{-\text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

$\int (\text{جتاس})\,\text{ءس} = \text{جاس}+\text{جـ}$ $\qquad$ $\int \text{جتا}(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \dfrac{\text{جا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

$\int (\text{قا}^٢\text{س})\,\text{ءس} = \text{ظاس}+\text{جـ}$ $\qquad$ $\int \text{قا}^٢(\text{أس}+\text{ب})\,\text{ءس} = \dfrac{\text{ظا}(\text{أس}+\text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

قد نحتاج لاستخدام التجهيزات التالية:

$\int \text{ظا}(\text{س})\,\text{ءس} = \int \left(\dfrac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}\right)\text{ءس}$ $\qquad$ $\int \left(\dfrac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}}\right)\text{ءس} = \int \text{قا}^٢(\text{س})\,\text{ءس}$

<u>قوانين فك الأقواس:</u>

$$(\text{أ}+\text{ب})^٢ = \text{أ}^٢ + ٢\text{أب} + \text{ب}^٢$$
$$(\text{أ}-\text{ب})^٢ = \text{أ}^٢ - ٢\text{أب} + \text{ب}^٢$$

$$(\text{أ}+\text{ب})^٣ = \text{أ}^٣ + ٣\text{أ}^٢\text{ب} + ٣\text{أب}^٢ + \text{ب}^٣$$
$$(\text{أ}-\text{ب})^٣ = \text{أ}^٣ - ٣\text{أ}^٢\text{ب} + ٣\text{أب}^٢ - \text{ب}^٣$$

التكامل وتطبيقاته

التفاضل (الاشتقاق): هو معدل التغير في الاقتران.

$ق(س) = ٥$	$ق'(س) = ٠$
$ق(س) = ٢ - س$	$ق'(س) = -١$
$ق(س) = ٢س + ٥$	$ق'(س) = ٢$
$ق(س) = ٣س^{٢} - س + \frac{١}{٢}$	$ق'(س) = ٦س - ١$

التكامل: عملية رياضية عكس التفاضل، **تنفذ بشرط أن يكون الاقتران متصل.**

ويرمز لها بالرمز:

$\int ق(س)\,دس$ وتقرأ تكامل ق(س) دال سين $دس$ تعني أن (س) هي مدخلات الاقتران

أنواع التكامل

التكامل غير المحدود ←

استخدام قواعد التكامل رياضياً

$$\int ق(س)\,دس$$

الجواب: ناتج التكامل **+ جـ**

→ **التكامل المحدود**

استخدام قواعد التكامل في التطبيقات

$$\int_{ب}^{أ} ق(س)\,دس$$

الجواب: ناتج التكامل
التعويض بحدود التكامل

لماذا تم إضافة جـ:

- $ق(س) = س^{٥}$ $ق'(س) = ٥س^{٤}$
- $ق(س) = س^{٥} - ١٠$ $ق'(س) = ٥س^{٤}$
- $ق(س) = س^{٥} + \frac{١}{٢}$ $ق'(س) = ٥س^{٤}$

✓ يوجد عدد كبير من الاقترانات التي مشتقتها $ق'(س) = ٥س^{٤}$، لذلك وضعنا **(جـ)** للدلالة على هذا الثابت، ويسمى **ثابت التكامل.**

✓ **هناك العديد من التطبيقات المستخدمة في التكامل ومنها: التطبيقات الهندسية، التطبيقات الفيزيائية، المساحات.**

قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الأولى: تكامل الاقتران الثابت

$\int (\text{ثابت})\, \text{ءس} = \text{ثابت} \times \text{س} + \text{جـ}$

$\int (\text{أ})\, \text{ءس} = \text{أس} + \text{جـ}$ ، حيث (أ) ثابت.

مثال ١: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (٥)\, \text{ءس}$

٢) $\int (-٤)\, \text{ءس}$

٣) $\int (\frac{١}{٢})\, \text{ءس}$

٤) $\int (٣^{٢})\, \text{ءص}$

٥) $\int (\text{أ})\, \text{ءس}$

٦) $\int (\frac{\sqrt[٣]{٥}}{٢})\, \text{ءس}$

٧) $\int (\text{هـ})\, \text{ءس}$

٨) $\int \text{ءع}$

٩) $\int (٠)\, \text{ءس}$

١٠) $\int (\frac{٢}{٣})\, \text{ءع}$

١١) $\int (٢\text{أ})\, \text{ءس}$

القاعدة الثانية: تكامل الاقتران الخطي والغير خطي

$\int (\text{س}^{\text{ن}})\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+١}}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$ ، $(\text{ن} \neq -١)$

✓ قد نحتاج أحياناً في هذه القاعدة لتجهيز الاقتران قبل التكامل.

مثال ٢: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (\text{س})\, \text{ءس}$

٢) $\int (\text{س}^{٣})\, \text{ءس}$

٣) $\int (\text{س}^{-٤})\, \text{ءس}$ ، $(\text{س} \neq ٠)$

٤) $\int (\text{س}^{-٢})\, \text{ءس}$ ، $(\text{س} \neq ٠)$

٥) $\int (\text{س}^{\frac{١}{٢}})\, \text{ءس}$

٦) $\int (\text{س}^{\frac{٢}{٣}})\, \text{ءس}$

٧) $\int (\text{س}^{\frac{٢}{٥}})\, \text{ءس}$

٨) $\int (\text{س}^{\frac{-١}{٢}})\, \text{ءس}$

٩) $\int (\text{س}^{\frac{-٤}{٣}})\, \text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

تابع القاعدة الثانية: (تجهيز الكسور والجذور)

١) $\frac{١}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{س}^{-\text{ن}}$ ٢) $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

مثال٣: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \left(\frac{١}{\text{س}^{٣}}\right) \text{ءس}$

٢) $\int \left(\frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

٣) $\int \left(\frac{١}{\text{س}^{-٥}}\right) \text{ءس}$

٤) $\int \left(\frac{١}{\text{ص}^{٣}}\right) \text{ءص}$

٥) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}^{٤}}$ ، $\text{س} \neq ٠$

٦) $\int \left(\sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

٧) $\int \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

تابع القاعدة الثانية:

- ✓ التكامل يوزع على الجمع والطرح.
- ✓ التكامل لا يوزع على الضرب والقسمة.

مثال٤ : جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \left(\text{س}^{٣} + ١\right) \text{ءس}$

٢) $\int \left(\sqrt{\text{س}} - \frac{١}{\text{س}^{٢}}\right) \text{ءس}$

٣) $\int \left(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ١\right) \text{ءس}$

٤) $\int \left(\sqrt{\text{س}}\sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

٥) $\int \left(\text{س}\sqrt{\text{س}}\right) \text{ءس}$

٦) $\int \left(\frac{١}{\sqrt{\text{س}^{٨}}} + \frac{١}{٢}\right) \text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الثالثة: تكامل ثابت مضروب باقتران

$\int أ\, ق(س)\, ءس = أ \int ق(س)\, ءس$ ، حيث (أ) الثابت.

✓ يمكن اخراج الثابت خارج رمز التكامل.

مثال٥: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (٢س)\, ءس$

٢) $\int (٧س^{٥})\, ءس$

٣) $\int (\sqrt{٢}\, س^{٣})\, ءس$

٤) $\int (\frac{٢}{\sqrt{س}})\, ءس$

٥) $\int (\frac{٣}{٤س^{٤}})\, ءس$

٦) $\int (\frac{س^{٥}}{٢})\, ءس$

٧) $\int (٢س^{٣})^{٢}\, ءس$

٨) $\int (\frac{٣}{س^{٢}} - ٢س)\, ءس$

٩) $\int (\frac{٤}{\sqrt{س}} - \frac{٢}{س^{٢}})\, ءس$

١٠) $\int (\frac{٤}{س^{-٣}} + \frac{٢س^{٤}}{٥})\, ءس$

١١) $\int (٣س + ٣ + \frac{١}{س^{٣}})\, ءس$

١٢) $\int س(س^{٢} - ٣س + ٥)\, ءس$

١٣) $\int \sqrt{س}(\frac{٣}{\sqrt{س}} - \sqrt{س})\, ءس$

قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الرابعة: تكامل قوس ما بداخله اقتران خطي.

$$\int (أس+ب)^{ن}\,ءس = \frac{(أس+ب)^{(ن+1)}}{(ن+1)\times أ} + جـ$$

حيث $(أ)$ ثابت و هو معامل $(س)$

✓ **القانون يغنيك عن قوانين فك الأقواس.**

مثال٦: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (٢س+٣)^{٥}\,ءس$

٢) $\int (٣س-١)^{-٣}\,ءس$

٣) $\int ٢(١-٤س)^{٥}\,ءس$

٤) $\int ٢٤(٣-٦س)^{٥}\,ءس$

٥) $\int \frac{٣}{٢}(٥س+١)^{٢}\,ءس$

٦) $\int \frac{(٥-٣س)^{٣}}{٤}\,ءس$

٧) $\int (٦-٣س)^{\frac{١}{٣}}\,ءس$

٨) $\int \frac{١}{٢(٢س-١)^{٤}}\,ءس$

قواعد التكامل غير المحدود

تابع القاعدة الرابعة: (تجهيز قوس بداخل جذر)

✓ يجب تحويل الجذر إلى مقدار مرفوع لقوة كسرية.

مثال٧: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \sqrt{(\text{٦س} - ١)^{٥}}\ \text{ءس}$

٢) $\int \sqrt[٣]{(\text{٣س} - ٢)^{٢}}\ \text{ءس}$

٣) $\int \frac{٥}{\sqrt[٤]{(٦ - \frac{\text{س}}{٧})^{٣}}}\ \text{ءس}$

قوانين فك الأقواس:

$(\text{أ} + \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{٢أب} + \text{ب}^{٢}$

$(\text{أ} - \text{ب})^{٢} = \text{أ}^{٢} - \text{٢أب} + \text{ب}^{٢}$

$(\text{أ} + \text{ب})^{٣} = \text{أ}^{٣} + \text{٣أ}^{٢}\text{ب} + \text{٣أب}^{٢} + \text{ب}^{٣}$

$(\text{أ} - \text{ب})^{٣} = \text{أ}^{٣} - \text{٣أ}^{٢}\text{ب} + \text{٣أب}^{٢} - \text{ب}^{٣}$

مثال٨: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (\text{س} - ١)^{٢}\ \text{ءس}$

٢) $\int (\text{٢س} + ١)^{٢}\ \text{ءس}$

٣) $\int (\text{س} - ١)^{٣}\ \text{ءس}$

٤) $\int (\text{س} + ٢)^{٣}\ \text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

استخدام طرق التحليل في التكامل

١) العامل المشترك (س، عدد، سالب)
٢) الفرق بين مربعين

$$(\text{أ}^{٢} - \text{ب}^{٢}) = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب})$$

٣) الفرق ومجموع مكعبين

$$(\text{أ}^{٣} + \text{ب}^{٣}) = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^{٢} - \text{أب} + \text{ب}^{٢})$$

$$(\text{أ}^{٣} - \text{ب}^{٣}) = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{٢} + \text{أب} + \text{ب}^{٢})$$

٤) العبارة التربيعية $(\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{جـ})$

عددين حاصل **ضربهم** يساوي (جـ)، **وجمعهم** يساوي (ب)

٥) فك الأقواس

مثال٩: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ٤\text{س}^{٣}}{\text{س}}\,\text{ءس}$

٢) $\int \frac{٩\text{س} - ٣\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٣}\,\text{ءس}$

٣) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س} - ٢}\,\text{ءس}$

٤) $\int (\text{س} - ١)(\text{س} + ١)\,\text{ءس}$

٥) $\int (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)\,\text{ءس}$

٦) $\int (\text{س} + ٣)(\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$

٧) $\int (\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)\,\text{ءس}$

٨) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ١٢}{\text{س} - ٣}\,\text{ءس}$

٩) $\int (٢\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)\,\text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

تابع استخدام طرق التحليل في التكامل

مثال ١٠: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (س - ١)(س^{٢} + س + ١) \, ءس$

٢) $\int (س + ٢)(س^{٢} - ٢س + ٤) \, ءس$

٣) $\int \frac{س^{٣} - ٢٧}{س - ٣} \, ءس$

٤) $\int \frac{س^{٣} - ١٢٥}{٥ - س} \, ءس$

٥) $\int \frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س + ٤} \, ءس$

٦) $\int \left(\frac{٣س + س^{٢}}{\sqrt{س}}\right) ءس$

٧) $\int \left(\frac{\sqrt{س} + س^{٣}}{س^{٢}}\right) ءس$

٨) $\int \left(\frac{س^{٢} - ٥س}{\sqrt[٣]{س}}\right) ءس$

قواعد التكامل غير المحدود

القاعدة الخامسة: تكامل الاقترانات المثلثية

- $\int (\text{جاس})\,\text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$
- $\int (\text{جتاس})\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$
- $\int (\text{قا}^2\text{س})\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

تكامل الاقترانات المثلثية (عندما تكون الزاوية معادلة خطية)

- $\int \text{جا}(\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = \frac{-\text{جتا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{جتا}(\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{جا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$
- $\int \text{قا}^2(\text{أس} + \text{ب})\,\text{ءس} = \frac{\text{ظا}(\text{أس} + \text{ب})}{\text{أ}} + \text{جـ}$

طرق تجهيز الاقترانات المثلثية

- $\int \text{ظا}(\text{س})\,\text{ءس} = \int (\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}})\,\text{ءس}$
- $\int (\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}})\,\text{ءس} = \int \text{قا}^2(\text{س})\,\text{ءس}$

الفرق بين المشتقة والتكامل

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = -\text{جاس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$ ، $\text{ق}'(\text{س}) = \text{قا}^2\text{س}$

$\int (\text{جاس})\,\text{ءس} = -\text{جتاس} + \text{جـ}$

$\int (\text{جتاس})\,\text{ءس} = \text{جاس} + \text{جـ}$

$\int (\text{قا}^2\text{س})\,\text{ءس} = \text{ظاس} + \text{جـ}$

مثال ١١: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (\text{جتاس})\,\text{ءس}$

٢) $\int (\text{جا}٣\text{س})\,\text{ءس}$

٣) $\int (٣\text{قا}^2\text{س})\,\text{ءس}$

٤) $\int (\frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}})\,\text{ءس}$

٥) $\int (\frac{5}{\text{جتا}^2\text{س}})\,\text{ءس}$

٦) $\int (\text{ظاس جتاس})\,\text{ءس}$

٧) $\int -٢\text{جا}(٣\text{س})\,\text{ءس}$

٨) $\int ٢\text{جتا}(٣ - ٤\text{س})\text{ظا}(٣ - ٤\text{س})\,\text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

تابع القاعدة الخامسة: تكامل الاقترانات المثلثية

مثال١٢ : جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \left(\frac{\text{جاس}}{\text{ظاس}}\right) \text{ءس}$

٢) $\int \left(\frac{١}{\text{جتاس جتاس}}\right) \text{ءس}$

٣) $\int \left(\frac{\text{جتاس}}{٥}\right) \text{ءس}$

٤) $\int ٤\,\text{جا}(٤\text{س} + ١)\, \text{ءس}$

٥) $\int \left(\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢} + \text{جا}٣\text{س} - \frac{٢}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\right) \text{ءس}$

مثال١٣ : جد التكامل لكلاً من:

٦) $\int ١٢\,\text{جا}(١ - ٤\text{س})\, \text{ءس}$

٧) $\int ٣\,\text{جتا}(٣\text{س})\, \text{ءس}$

٨) $\int (٣\text{س}^{٢} - ٤\,\text{جتاس})\, \text{ءس}$

٩) $\int (\text{جتا}٢\text{س} - \text{جا}٤\text{س})\, \text{ءس}$

١٠) $\int \left(\text{س}^{٢} - \text{جتاس} + \frac{١}{\text{س}^{٢}} + ٧\right) \text{ءس}$

١١) $\int (٢\,\text{جتا}٢\text{س} + ٣\,\text{جا}٣\text{س})\, \text{ءس}$

قواعد التكامل غير المحدود

تابع القاعدة الخامسة: تكامل الاقترانات المثلثية

مثال١٤: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int (\text{٤س} - \text{٣جاس})\,\text{ءس}$

٢) $\int (\text{٣ظاس جتاس})\,\text{ءس}$

٣) $\int \text{٢قا}^{\text{٢}}(\text{٢} - \text{س})\,\text{ءس}$

٤) $\int \text{٤جا}(\text{٤س} + \text{١})\,\text{ءس}$

٥) $\int (\text{١٠س}^{\text{٢}} - \text{٦}\sqrt{\text{س}} + \text{٣قا}^{\text{٢}}\text{س})\,\text{ءس}$

مثال١٥: جد التكامل لكلاً من:

٦) $\int \text{ظا}(\text{٤} + \text{س})\,\text{جتا}(\text{٤} + \text{س})\,\text{ءس}$

٧) $\int \left(\dfrac{\text{س}^{\text{٢}} + \sqrt{\text{س}}\,\text{جاس}}{\sqrt{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

٨) $\int \left(\text{٢س}^{\text{٣}} - \dfrac{\text{١}}{\text{س}^{\text{٣}}} - \text{جاس} - \text{١٠}\right)\text{ءس}$

٩) $\int \left(\text{جتا}(\text{٤س} - \text{٣}) - \text{جا}(\text{٦} - \text{٣س})\right)\text{ءس}$

١٠) $\int \left(\dfrac{\sqrt{\text{س}}\,\text{جتاس} - \text{س}^{\text{٣}}}{\sqrt{\text{س}}}\right)\text{ءس}$

استخدامات التكامل غير المحدود

التكامل يلغي المشتقة والمشتقة تلغي التكامل

التكامل: هي عملية عكس الاشتقاق تستخدم للحصول على **الاقتران الأصلي** $ق(س)$ بشرط ان يكون **الاقتران** $ق(س)$ **متصل**.

أنواع التكامل

التكامل غير المحدود

$$\int ق(س)\,ءس$$

$$\frac{ء}{ءس}\int ق(س)\,ءس = ق(س)$$

الجواب: يكون ما داخل التكامل بدون رمز التكامل وبدون $(ءس)$

التكامل المحدود

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$$

$$\frac{ء}{ءس}\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = ٠$$

الجواب: مشتقة التكامل المحدود دائماً يساوي صفر

مثال١٦: إذا كان $ص = \int ق'(س)\,ءس$ ، جد $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$

مثال١٧: إذا كان $ق(س) = \int (٣س^{٢})\,ءس$ ، جد $ق'(س)$

مثال١٨: إذا كان $ق(س) = \int (٣س^{٢} - س)\,ءس$ ، جد $ق'(٢)$

مثال١٩: إذا كان $ق(س) = \int (٤س^{٣} + ٣س^{٢})\,ءس$ ، جد $ق'(-١)$

مثال٢٠: إذا كان $ص = \int \left(\frac{س^{٢}+١}{س-١}\right) ءس$ ، جد $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)$ ، عندما $(س = -٢)$

استخدامات التكامل غير المحدود

مثال ٢١: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً،
وكان $\int$ ق(س)ءس=٦س^{٢} − ٢س + ٤س^{٣} ، فجد ق′(١)

مثال ٢٢: إذا كان ق(س) اقتراناً متصلاً،
وكان $\int$ ق(س)ءس=٢س^{٤} + ٤س^{٣} − ٦س^{٢} − ٣،
فجد ق′(١)

مثال ٢٣: إذا كان
$\int$ ع′(س)ءس=٦س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦س − ٥، فجد ع′(١)

مثال ٢٤: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق′(س)=٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦، وكان ق(−١) = ٢،
فجد قاعدة الاقتران (ق).

مثال ٢٥: إذا كان (ق) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق′(س)=٦س − ٨س^{٣} + ٥، وكان ق(−١) = ٢،
فجد قاعدة الاقتران (ق).

استخدامات التكامل غير المحدود

مثال٢٦: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق$'$(س)=٣س (٦ − ٥س) + ٤س^{٣}،
وكان ق(٢) = −١، فجد قيمة ق(١).

مثال٢٧: إذا كان (ق) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق$'$(س)= $\frac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٨\text{س}^{٣}}{\text{س}}$ ، (س ≠ ٠)،
وكان ق(١) = ١٢، فجد قاعدة الاقتران (ق).

مثال٢٨: إذا كان ق(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق$'$(س)=٣س^{٢} − ٢س + ٣، وكان ق(١) = ٣،
فجد قيمة ق(٢).

مثال٢٩: إذا كان (ل) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ل$'$(س)=٦س^{٢} − ٦س + ٢، فجد قيمة ل(٣)−ل(١).

استخدامات التكامل غير المحدود

مثال٣٠: جد قاعدة الاقتران ق(س) الذي تعطى مشتقته بالقاعدة
ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − ٦س + ٥، علماً بأن ق(٠) = ٧

مثال٣١: إذا كان (ق) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان ق′(س) = ٢س − ٥، وكان ق(٢) = ٤،
فجد قيمة ق(١).

مثال٣٢: إذا كان ق(س) = $\int$ (س)(٢ − $س^{٢}$) ءس،
فجد ق′(٢).

مثال٣٣: إذا كان (هـ) اقتراناً قابلاً للاشتقاق،
وكان هـ′(س) = ٢س − ٢$س^{٣}$ + ٦،
فجد قيمة هـ(٢) − هـ(١).

إيجاد الثوابت في التكامل غير المحدود

مثال٣٤: إذا كان $ص = \int \left(أس^{٢} - ٥س + ٣ \right) ءس$ ،
وكانت $\left. \frac{ءص}{ءس} \right|_{س=٢} = ٩$ ، **فجد قيمة الثابت** $(أ)$.

مثال٣٥: إذا كان $ص = \int \left(أس^{٢} - ٥س \right) ءس$ ،
وكانت $\left. \frac{ءص}{ءس} \right|_{س=-١} = ٧$ ، **فجد قيمة الثابت** $(أ)$.

مثال٣٦: إذا كان $ق'(س) = س^{٣} - ٤أس^{٢} + ٥$ ،
وكانت $ص = \int ق'(س) ءس$ ، وكانت $\left. \frac{ءص}{ءس} \right|_{س=-١} = ٣$
فجد قيمة الثابت $(أ)$.

مثال٣٧: إذا كان $\int \left(٢ق'(س) + ٦ \right) ءس = س^{٣} + أس - ٥$
وكانت $ق'(٣) = ١٥$ ، **فجد قيمة الثابت** $(أ)$.

إيجاد الثوابت في التكامل غير المحدود

مثال٣٨:

إذا كان $\int \left(\text{أ}^{٢} \text{ق}(\text{س}) - \text{س}^{٣} \right) \text{ءس} = \int \left(\text{س}^{٤} + ٦\text{س} \right) \text{ءس}$

إذا علمت أن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٢،٤)،

جد قيمة الثابت (أ).

مثال٣٩: إذا كان

$\int \left(\text{أ}^{٣} \text{ق}(\text{س}) - ٣\text{س}^{٢} \right) \text{ءس} = \int \left(\text{س}^{٣} + ١١\text{س} - ٦ \right) \text{ءس}$

جد قيمة الثابت (أ)، إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (س = −١) يساوي (٢٧)

مثال٤٠: إذا كان: $\int \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{\text{أ}} + \text{س}^{٢} \right) \text{ءس} = \frac{\text{أس}^{٣}}{١٢} + \text{أ}^{٢}$

إذا علمت أن منحنى ق(س) يمر بالنقطة (٢،١٢)،

جد قيمة الثابت (أ).

مثال٤١: إذا كان

$\int \left(\text{أ} \text{ق}'(\text{س}) + ٣\text{س}^{٢} \right) \text{ءس} = \text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + \text{أس}$

حيث (أ ≠ ٠)، جد قيمة (أ)، إذا علمت أن ميل المماس لمنحنى ق(س) عند (س = أ) يساوي (أ).

التكامل المحدود

أنواع التكامل

التكامل الغير محدود ← → **التكامل المحدود**

$$\int ق(س)\,دس \qquad\qquad \int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$$

الناتج: اقتران جديد + جـ — **الناتج:** عدد

إذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ع(ب) - ع(أ)$، فإن **التكامل المحدود** للاقتران $ق(س)$ على الفترة $[أ،ب]$ هو:

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس = ع(س)\Big]_{أ}^{ب} = ع(ب) - ع(أ)$$

$(أ)$: الحد السفلي للتكامل المحدود.

$(ب)$: الحد العلوي للتكامل المحدود.

مثال ٤٢ : جد التكامل لكلاً من:

١) $\int_{2}^{6} (س)\,دس$

٢) $\int_{1}^{4} (-3)\,دس$

٣) $\int_{1}^{3} (2س - 2)\,دس$

٤) $\int_{2}^{2} (4س - 6س^{2} + 3)\,دس$

٥) $\int_{0}^{2} (2س^{3} - 3س)\,دس$

٦) $\int_{1}^{4} \left(\frac{6}{\sqrt{س}}\right)\,دس$

٧) $\int_{0}^{1} 14\,(س)^{\frac{4}{3}}\,دس$

التكامل المحدود

مثال٤٣: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int_{\text{٨}}^{\text{١}} \left(\frac{\text{١}}{\text{٨}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\right) \text{ءس}$

٢) $\int_{-\text{٢}}^{\text{٢}} (\text{٣س} - \text{٢})(\text{س} + \text{١}) \text{ءس}$

٣) $\int_{\text{٠}}^{\text{٢}} (\text{٢س} + \text{٨س}^{\text{٣}} - \text{٥س}^{\text{٤}} + \text{٧}) \text{ءس}$

٤) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} (\text{٤س}^{\text{٢}} - \text{٢س} + \text{٣}) \text{ءس}$

٥) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \text{٣س}(\text{٤} - \text{٢س}^{\text{٢}}) \text{ءس}$

٦) $\int_{-\text{١}}^{\text{٢}} (\text{٤س}^{\text{٣}} - \text{٢س}^{\text{٢}}) \text{ءس}$

٧) $\int_{\text{٠}}^{-\text{٢}} \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{٦س} - \text{٧}}{\text{س} - \text{١}} \text{ءس}$

٨) $\int_{\text{١}}^{-\text{١}} (\text{٢س} - \text{٣})^{\text{٢}} \text{ءس}$

٩) $\int_{\text{١}}^{\text{٢}} \left(\frac{\text{س}^{\text{٣}} - \text{٢٧}}{\text{س} - \text{٣}}\right) \text{ءس}$

إيجاد الثوابت في التكامل المحدود

مثال٤٤: إذا كان ق(١) = ٥، ق(٣) = −٤،

فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{١}^{٣}$ ق$'$(س)ءس

مثال٤٥: إذا كان ق(−١) = −٣، ق(٢) = ٥،

فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-١}^{٢}$ ٤ق$'$(س)ءس

مثال٤٦: إذا كان ق(٢) = ٥، ق(١) = ٢،

فجد قيمة التكامل: $\int_{٠}^{١}$ ق$'$(س+١)ءس

مثال٤٧: إذا كان الاقتران معرفاً على الفترة [١،٥]،

وكان ق$'$(س) = ٢س + ١، فجد قيمة ق(٥) − ق(١)

مثال٤٨: إذا كان $\int_{٥}^{٢}$ ق$'$(س)ءس = ١٣،

وكان ق(٥) = −١٧، فجد قيمة ق(٢)

مثال٤٩: إذا كان $\int_{٠}^{أ}$ (٣)ءس = ٢٧، فجد قيمة الثابت (أ).

مثال٥٠: إذا كان $\int_{١}^{جـ}$ (٢س − ٥)ءس = −٢، فجد قيمة (جـ).

إيجاد الثوابت في التكامل المحدود

مثال ٥١: إذا كان $\int_{٤}^{ب} (٢س - ١)\, ءس = ٠$،
فجد قيمة الثابت (ب).

مثال ٥٢: إذا كان $ق(٠) = ٢$، $ق(٣) = ١٣$،
وكان $\int_{٠}^{٣} أ\, ق'(س)\, ءس = ٢٢$، فجد قيمة (أ).

مثال ٥٣: إذا كان $ق(١) = ٣$، $ق(ج) = ٤$،
$\int_{١}^{ج} \left(٢س - ق'(س)\right) ءس = ج$، فجد قيم الثابت (ج).

مثال ٥٤: إذا كان $\int_{-١}^{م} ٤\, ءس = ٢٠$، فجد قيمة الثابت (م).

مثال ٥٥: إذا كان $\int_{٣}^{٦} ٢ق'(س)\, ءس = ٢٤$،
وكان $ق(٣) = -٤$، فجد قيمة $ق(٦)$.

مثال ٥٦: إذا كان $\int_{١}^{ب} (٦س)\, ءس = ٩$، فجد قيمة الثابت (ب).

التكامل بالتعويض

التكامل بالتعويض: قاعدة في التكامل، تستخدم عندما يكون داخل التكامل **حاصل ضرب اقترانين أو قسمة اقترانين إحداهما مشتقة الآخر،** حيث يصعب عملية ضرب أو قسمة هذه الاقترانات. **لذلك يجب تحويلها لصيغة أسهل لنتمكن من إجراء التكامل بسهولة**. وتكتب على الشكل:

$\int \text{ق}'(\text{س}) \times \text{ق}(\text{س})^{\text{ن}}\, \text{ءس}$ ، حيث نقوم بخطوة التعويض على الشكل التالي: $\text{ص} = \text{ق}(\text{س})$ ، $\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\text{ق}'(\text{س})}$

أنواع التكاملات التي يجب استخدام فيها التكامل بالتعويض

١) اقتران × **(اقتران)** $^{\pm \text{عدد صحيح}}$

$$\int \text{س}\left(\text{س}^{٢}+١\right)^{٣} \text{ءس}$$

$$\int_{٠}^{٢} ٣\text{س}^{٢}\left(\text{س}^{٣}+١\right)^{٥} \text{ءس}$$

٢) اقتران × **(اقتران)** $^{\pm \text{عدد كسري}}$

$$\int (٢\text{س}+١)\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{س}}\, \text{ءس}$$

$$\int_{٢}^{٣} \frac{٣\text{س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}^{٣}-١}} \text{ءس}$$

٣) اقتران × اقتران مثلثي **(زاوية)**

$$\int ٣\text{س}\,\text{جا}\left(٣\text{س}^{٢}+٥\right) \text{ءس}$$

$$\int \frac{٦\text{س}^{٢}}{\text{جتا}^{٢}\left(٢\text{س}^{٣}-٥\right)} \text{ءس}$$

خطوات الحل:

١) نحدد الاقتران الصعب　$\text{ص} =$

٢) نشتق الاقتران (ص)　$\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} =$

٣) نجعل (ءس) موضوع القانون، ليصبح $\text{ءس} = \dfrac{\text{ءص}}{\quad}$

٤) **إذا كان التكامل محدود،** نجد حدود التكامل الجديدة من خلال التعويض بالاقتران (ص).

٥) نعوض مكان الاقتران المفروض بـ (ص) ونستبدل (ءس) بالمقدار الخطوة رقم (٣).

٦) اختصار المقادير التي تحتوي على السينات **(قد نحتاج في بعض الحالات اخراج عامل مشترك للاختصار).**

٧) **اجراء عملية التكامل،** وفي حال وجود حدود للتكامل نعوض ونجد الناتج النهائي.

مثال٥٧: جد التكامل التالي: $\int ٣\text{س}^{٢}\left(\text{س}^{٣}+٢\right)^{٤} \text{ءس}$

مثال٥٨: جد $\int \left(٣\text{س}^{٢}+٤\right)\left(\text{س}^{٣}+٤\text{س}-٨\right)^{٦} \text{ءس}$

التكامل بالتعويض

مثال٥٩: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int ١٢(٣س^{٢}+٤س)(س^{٣}+٢س^{٢})^{٦}\,ءس$

٢) $\int (س-١)(٢س^{٢}-٤س+١)^{٥}\,ءس$

٣) $\int \frac{٢س-١}{(س^{٢}-س+٥)^{٨}}\,ءس$

٤) $\int (٢س+١)\sqrt{س^{٢}+س-٤}\,ءس$

٥) $\int ٤س\,جا(س^{٢}-١)\,ءس$

التكامل بالتعويض

مثال٦٠: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int \frac{٤س - ٦}{\sqrt[٣]{٢س^{٢} - ٦س + ١}} ءس$

٢) $\int \frac{٤س - ٤}{(س^{٢} - ٢س + ١)^{٣}} ءس$

٣) $\int \frac{-٢}{(س + ١)^{٢}} ءس$

٤) $\int \sqrt[٣]{٣س - س^{٢}} \; (٣ - ٢س) ءس$

٥) $\int \frac{٤س - ٦}{جتا^{٢}(س^{٢} - ٣س + ٥)} ءس$

٦) $\int ٣س^{٢} جتا(س^{٣} + ٢) ءس$

التكامل بالتعويض

نستخدم نفس الخطوات السابقة، ولكن مع حساب حدود التكامل الجديد، ويتم تحديد الحدود الجديدة من خلال معادلة (ص).

مثال ٦١ : جد التكامل لكلاً من:

١) $\int_{٢}^{٣} ٣(٣\text{س} - ٦)^{٢} \, \text{ءس}$

٢) $\int_{٣}^{٠} \frac{١}{\sqrt{٥\text{س} + ١}} \, \text{ءس}$

٣) $\int_{٠}^{٣١} \frac{١}{\sqrt[٥]{\text{س} + ١}} \, \text{ءس}$

٤) $\int_{-١}^{-١} ٣\text{س}^{٢} (\text{س}^{٣} - ١)^{٣} \, \text{ءس}$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣}{(٣\text{س} + ١)^{٢}} \, \text{ءس}$

٦) $\int_{٣}^{٤} ٢\text{س} \sqrt{٢٥ - \text{س}^{٢}} \, \text{ءس}$

التكامل بالتعويض

مثال٦٢: جد التكامل لكلاً من:

١) $\int_{١}^{-١} (\text{٤س} - ١)\sqrt[٣]{\text{س} - \text{٢س}^{٢} - ١}\ \text{ءس}$

٢) $\int_{-٢}^{١} (\text{٣س}^{٢} - ٢)(\text{س}^{٣} - \text{٢س} + ١)^{٢}\ \text{ءس}$

٣) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{\text{س}^{٢} + \text{٤س} + ٤}\ \text{ءس}$

٤) $\int_{٠}^{٤} \text{٢س}\sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{ءس}$

التكامل بالتعويض

مثال٦٣: احسب قيمة $\int_{-1}^{2} ٦س^{٢} \, ق'(س^{٣}) \, ءس$ ،
حيث ق(٨) = ٩، ق(−١) = ٥

مثال٦٤: إذا كان ق(٤) = ٧ ، ق(١) = −٢ ،
فجد قيمة $\int_{-1}^{2} ٤س \, ق'(س^{٢}) \, ءس$

مثال٦٥: إذا علمت أن ق(−٨) = ٥ ، ق(٢٧) = −٦ ،
فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-2}^{3} ٣س^{٢} \, ق'(س^{٣}) \, ءس$

مثال٦٦: إذا علمت أن $\int_{5}^{2} ق(س) \, ءس = ٣$ ،
فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^{2} ٨س \, ق(س^{٢}+١) \, ءس$

التكامل بالتعويض (قاعدة تكامل القوس لاقتران خطي)

يمكن استخدام بعض القواعد المباشرة في حل التكامل، دون الحاجة لاستخدام طريقة التعويض. حسب القواعد التالية:

١) $\int \left(\text{أس} + \text{ب}\right)^{\text{ن}} \text{ءس} = \dfrac{\left(\text{أس}+\text{ب}\right)^{\text{ن}+1}}{\text{أ}\left(\text{ن}+1\right)} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{جا}\left(\text{أس} + \text{ب}\right) \text{ءس} = \dfrac{-\text{جتا}\left(\text{أس}+\text{ب}\right)}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٣) $\int \text{جتا}\left(\text{أس} + \text{ب}\right) \text{ءس} = \dfrac{\text{جا}\left(\text{أس}+\text{ب}\right)}{\text{أ}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{قا}^{2}\left(\text{أس} + \text{ب}\right) \text{ءس} = \dfrac{\text{ظا}\left(\text{أس}+\text{ب}\right)}{\text{أ}} + \text{جـ}$

مثال٦٧: جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

١) $\int \left(\text{أس} + \text{ب}\right)^{\text{ن}} \text{ءس}$،

حيث (أ ب) ثابتان، $(\text{أ} \neq ٠)$ ، $(\text{ن} \neq -١)$

٢) $\int \text{جتا}\left(\text{أس} + \text{ب}\right) \text{ءس}$، حيث (أ ب) ثابتان، $(\text{أ} \neq ٠)$

مثال٦٨: جد قيمة التكاملات التالية:

١) $\int_{-١}^{٢} ٦\left(١ - ٢\text{س}\right)^{٥} \text{ءس}$

٢) $\int ١٢\,\text{جا}\left(١ - ٤\text{س}\right) \text{ءس}$

٣) $\int ٢\text{قا}^{٢}\left(٢ - \text{س}\right) \text{ءس}$

٤) $\int \sqrt[٣]{٣\text{س} - ٢}\; \text{ءس}$

٥) $\int_{٠}^{٢} \sqrt{٤\text{س} + ١}\; \text{ءس}$

خصائص التكامل المحدود

١) $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٠$

٢) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left(\text{ق}(\text{س}) \pm \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} \pm \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ}(\text{س})\,\text{ءس}$

٣) $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} + \int_{\text{ب}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٤) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

مثال٦٩: جد التكامل التالي: $\int_{٣}^{٣} \left(٤\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٢٠\right)\text{ءس}$

مثال٧٠: جد التكامل التالي: $\int_{١}^{١} \left(\sqrt{\text{س} - ٢\text{س} + ٥}\right)\text{ءس}$

مثال٧١: إذا علمت أن $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = \frac{٣}{٤}$ ، جد التكامل التالي:

$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

مثال٧٢: إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٤$ ، جد التكامل التالي:

$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}} ٣\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

مثال٧٣: إذا كان $\int_{\text{أ}-١}^{٥\text{أ}+٧} \text{ق}(\text{س}) = ٠$، فجد قيمة الثابت (أ).

مثال٧٤: إذا كان $\int_{\text{ب}^{٢}+\text{ب}}^{-\text{ب}+٣} \text{ق}(\text{س}) = ٠$ ، فجد قيمة الثابت (ب).

مثال٧٥: إذا كان $\int_{٠}^{\text{ل}} (٢\text{س} - ١)\,\text{ءس} = ٦$،
فجد قيمة الثابت (ل).

مثال٧٦: إذا كان $\int_{٣}^{\text{م}} (٢ - ٤\text{س})\,\text{ءس} = ٠$ ،
فجد قيمة الثابت (م).

خصائص التكامل المحدود

مثال٧٧: إذا علمت أن $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٧$ ، $\int_{6}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢$ ، جد قيمة التكامل $\int_{1}^{6} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال٧٨: إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٢$ ، $\int_{\text{جـ}}^{\text{ب}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$

فجد التكامل التالي: $\int_{\text{أ}}^{\text{جـ}} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال٧٩: إذا علمت أن $\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٣$ ،

$\int_{3}^{5} ٦\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٢٤$ ،

فجد التكاملات التالية:

١) $\int_{5}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

٢) $\int_{0}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

مثال٨٠: إذا علمت أن $\int_{0}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢$ ،

فجد التكامل التالي: $\int_{0}^{3} \left(\text{ق}(\text{س}) - ٣\right)\text{دس}$

مثال٨١: إذا كان $\int_{1}^{3} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$ ،

فجد التكامل: $\int_{1}^{3} \left(٢\text{س} + \text{ق}(\text{س})\right)\text{دس}$

مثال٨٢: إذا كان $\int_{0}^{2} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٣}\,\text{دس} = ٨$ ،

فجد $\int_{0}^{2} \left(٣\text{س} + ٢\text{ق}(\text{س})\right)\text{دس}$

خصائص التكامل المحدود

مثال٨٣: إذا كان $\int_{١}^{٤} ٣\text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ١٢$،

$\int_{٢}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = -٨$، جد قيمة التكامل $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

مثال٨٤: إذا كان $\int_{-١}^{٤} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٢$، $\int_{٤}^{-١} \frac{\text{هـ}(\text{س})}{٢}\,\text{ءس} = ٦$

فجد $\int_{-١}^{٤} \left(٢\text{ق}(\text{س}) + ٣\text{س} + \text{هـ}(\text{س})\right)\text{ءس}$

مثال٨٥: إذا كان $\int_{٢}^{٥} \left(\frac{\text{ق}(\text{س})}{٢} - ١\right)\text{ءس} = ٤$،

$\int_{٦}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = ٦$، فجد قيمة $\int_{٢}^{٦} \left(\text{ق}(\text{س}) + \text{س}^{٢}\right)\text{ءس}$

خصائص التكامل المحدود

مثال٨٦: إذا كان $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق}(\text{س})}{٢}\,\text{دس} = ٤$،

$\int_{٩}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ١٢$، **فجد قيمة** $\int_{٣}^{٩} \left(\text{ق}(\text{س}) - ٧\right)\text{دس}$

مثال٨٧: إذا كان $\int_{-٢}^{٥} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٦$، $\frac{١}{٢}\int_{٥}^{-٢} \text{ع}(\text{س})\,\text{دس} = ٤$

فجد $\int_{-٢}^{٥} \left(٣\text{ق}(\text{س}) + \text{ع}(\text{س}) - \text{س}\right)\text{دس}$

مثال٨٨: إذا كان $\int_{١}^{٧} ٤\text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = ٨$،

$\int_{٥}^{٧} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = -٩$،

فجد قيمة التكامل التالي: $\int_{١}^{٥} \left(٣\text{ق}(\text{س}) - \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢}\right)\text{دس}$

خصائص التكامل المحدود

مثال٨٩: إذا كان $\int_{0}^{2} (\text{ق}(س) - 4) \, ءس = 6$ ، $\int_{0}^{3} \text{ق}(س) \, ءس = -1$ ، فجد $\int_{2}^{3} (\text{ق}(س) + 3س^{2}) \, ءس$

مثال٩٠: إذا كان $\int_{1}^{6} (3 - \text{ق}(س)) \, ءس = 7$ ، $\int_{2}^{6} \text{ق}(س) \, ءس = -5$ ، فجد $\int_{1}^{2} (\frac{1}{2}\text{ق}(س) - 4س) \, ءس$

خصائص التكامل المحدود

مثال ٩١: إذا كان $\int_{-1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 2$ ، $\int_{2}^{5} \left(1 - \text{ق}(\text{س})\right)\text{ءس} = 7$ ،

فجد التكامل: $\int_{-1}^{2} \left(\text{ق}(\text{س}) - 6\text{س}^{2}\right)\text{ءس}$

مثال ٩٢: إذا كان، $\int_{1}^{5} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس} = 4$ ،

$\int_{-1}^{5} \left(\text{ق}(\text{س}) + 3\right)\text{ءس} = 20$ ، **فجد قيمة كل مما يأتي:**

١) $\int_{5}^{-1} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

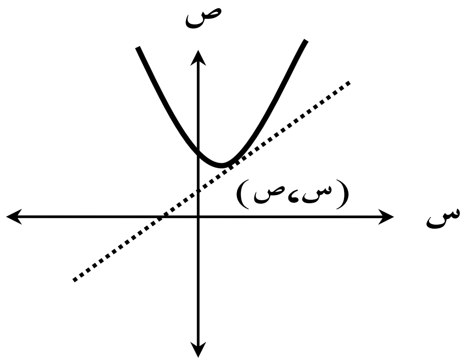
٢) $\int_{1}^{-1} \text{ق}(\text{س})\,\text{ءس}$

٣) $\int_{5}^{1} \left(3\text{ق}(\text{س}) - 4\text{س}\right)\text{ءس}$

التطبيقات الهندسية

في تطبيقات التفاضل، نستطيع إيجاد ميل المماس **(المشتقة الأولى)** من خلال أي اقتران.
في تطبيقات التكامل، نستطيع إيجاد الاقتران الأصلي من خلال ميل المماس. **(تكامل الاقتران)**

فكرة السؤال: يعطى في السؤال **(اقتران ميل المماس)** ق′(س) عند نقطة (س،ص)
والمطلوب هو إيجاد **الاقتران الأصلي** ق(س) **(**قاعدة الاقتران**)**



خطوات الحل:

١) نحدد اقتران ميل المماس، والنقطة (س،ص) أو ق(س) = ص
٢) نجد تكامل الطرفين.
٣) حساب قيمة (جـ) من خلال النقطة المعطاه في السؤال.
٤) نكتب الاقتران الأصلي ق(س) **(الاقتران الجديد + جـ).**

مثال٩٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، هو (٦ – ٢ س)، فجد قاعدة ق، علماً بأن ق(٠) = ٣

مثال٩٤: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي (٢س^٣ –٢س)، فجد ق(س)، علماً بأن منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٢، –٣)

التطبيقات الهندسية

مثال٩٥: إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، هو (س^٢ + ١)، فجد قاعدة ق، علماً أن ق(١) = $\frac{1}{3}$

مثال٩٦: إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي ١٢(٣ − ٢س)^٢ ، فجد قاعدة ق، علماً بأن منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (١،−١)

مثال٩٧: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي (٣ − $\frac{1}{2}$س)، فجد قاعدة الاقتران ق(س)، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢،٨).

مثال٩٨: إذا كان ميل المماس لمنحى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي (٤ − $\frac{1}{س^2}$) ويمر المنحنى بالنقطة ($\frac{1}{2}$،٢)، فجد قاعدة الاقتران ق.

التطبيقات الهندسية

مثال ٩٩: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $(٤ - ٤س)^{٣}$،
فجد قاعدة الاقتران ق، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢،-٣)

مثال ١٠٠: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $٢(٣س - ١)^{٤}$، فجد ق(١)،
علماً بأن منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٠،١).

مثال ١٠١: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران هـ(س)
يعطى بالقاعدة $هـ'(س) = \frac{(٢س^{٢} - ٥س)}{س}$، (س ≠ ٠)،
فجد هـ(٢)، علماً بأن منحنى الاقتران هـ يمر بالنقطة (-١،٥)

مثال ١٠٢: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $(٢ - \frac{١}{٣}س)$، فجد قاعدة الاقتران
ق(س) علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(٢، \frac{١}{٣})$.

التطبيقات الهندسية

مثال١٠٣: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $(٦ - ٢س + ٩س^{٢})$، فجد قاعدة الاقتران ق(س)، علماً بأن ق(٠) = ٥

مثال١٠٤: جد قاعدة الاقتران ق(س)، إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = ق(س) عند النقطة (س،ص) يعطى بالقاعدة :

$$ق'(س) = \frac{٢س}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٨}$$

، وكان منحنى الاقتران ق(س) يمر بالنقطة (٠،٤).

مثال١٠٥: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ل(س) عند النقطة (س،ص) يعطى بالعلاقة:
ل$'$(س) = ٢س(٤ - ٣س)، فجد قاعدة الاقتران ل(س)، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٠،٣)

مثال١٠٦: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ق(س) عند النقطة (س،ص)، يعطى بالقاعدة (١+س)(٣س + ٢)، فجد قاعدة الاقتران ق(س)، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (٢،-١)

التطبيقات الهندسية

مثال١٠٧: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ٯ(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي (٣س − ٢)(س − ٤)، فجد قاعدة الاقتران ٯ(س)، علماً بأن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (١،٢)

مثال١٠٨: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ٯ(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $\left(\sqrt[\circ]{٦ س}\right)$، فجد ٯ(−١)، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١،٠).

مثال١٠٩: إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ٯ(س) عند النقطة (س،ص)، يساوي $\left(\frac{٣}{س^{٢}}\right)$، (س ≠ ٠)، **فجد المقطع السيني للاقتران ٯ(س)**، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة (١،٢)

مثال١١٠: جد قيمة ٯ(١)، علماً بان ميل المماس لمنحنى الاقتران ص = ٯ(س) عند النقطة (س،ص) يعطى بالقاعدة: ٯ′(س) = $١٦\sqrt[٣]{٢س − ١}$،
وأن منحناه يمر بالنقطة (٠،٥).

التطبيقات الفيزيائية

في تطبيقات التفاضل، نستطيع إيجاد اقتران **السرعة** (ع) **والتسارع** (ت) من اقتران **المسافة** (ف) بدلالة **الزمن** (ن).

في تطبيقات التكامل، نستطيع إيجاد اقتران **المسافة** (ف) من **السرعة** (ع) أو **التسارع** (ت) بدلالة **الزمن** (ن).

المسافة
ف (ن)
م

السرعة
ع (ن)
م / ث

التسارع
ت (ن)
م / ث²

فكرة السؤال: يعطى في السؤال (السرعة أو التسارع)، **والمطلوب** هو إيجاد السرعة أو المسافة.

- ✓ **تكامل التسارع مرة يعطي السرعة** $\quad \text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن})\, \text{دن}$
- ✓ **تكامل السرعة مرة يعطي المسافة** $\quad \text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{دن}$
- ✓ **تكامل التسارع مرتين يعطي المسافة** $\quad \text{ع}(\text{ن}) = \int \text{ت}(\text{ن})\, \text{دن} \qquad \text{ف}(\text{ن}) = \int \text{ع}(\text{ن})\, \text{دن}$

خطوات الحل:

١) **نحدد الاقتران المعطى** في السؤال: ع(ن)، ت(ن) **بالإضافة** $\text{ف}(\text{ن}_1) = \text{جـ}$ و $\text{ع}(\text{ن}_2) = \text{جـ}$

٢) **تطبيق عملية التكامل** حسب قواعد التكامل الغير محدود.

٣) **نكتب الاقتران** ف(ن) = **الاقتران الجديد + جـ** أو ع(ن) = **الاقتران الجديد + جـ**

٤) **نحسب قيمة الثابت (جـ)** من خلال معطيات السؤال: $\text{ف}(\text{ن}_1) = \text{جـ}$ أو $\text{ع}(\text{ن}_2) = \text{جـ}$

٥) **كتابة الاقتران النهائي**، وإجراء عملية التعويض الأخيرة **في حال إذا طلب في السؤال.**

مثال١١١: **يتحرك جسيم على خط مستقيم، بحيث أن سرعته بعد (ن) ث، تساوي** $\text{ع}(\text{ن}) = (٣\text{ن} - ٢)$ **م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد ثانيتين، علماً بأن موقعه الحالي هو** $\text{ف}(١) = \frac{١}{٢}$

مثال١١٢: **يتحرك جسيم على خط مستقيم، بحيث أن سرعته بعد (ن) ثانية، تعطى بالعلاقة:** $\text{ع}(\text{ن}) = ٣(\text{ن} + ١)^{٢}$ **م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علماً بأن موقعه الابتدائي:** $\text{ف}(٠) = ٥$

التطبيقات الفيزيائية

مثال١١٣: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بتسارع ثابت مقداره وفق العلاقة: ت$(ن) = ٨$ م/ث^٢، جد سرعه الجسيم بعد مرور ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم هي ع$(٠) = ٢$ م/ث

مثال١١٤: إذا كان تسارع جسيم (ت) بعد مرور (ن) من الثواني يعطى بالعلاقة: ت$(ن) = ٤ن$ م/ث^٢، جد سرعة الجسيم بعد (ن) ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية ع$(٠) = ٦$ م/ث

مثال١١٥: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بتسارع ثابت مقداره ت$(ن) = ٦$م/ث^٢، إذا كانت السرعة الابتدائية للجسيم ع$(٠) = ٤$ م/ث، جد اقتران سرعة الجسيم بعد مرور (ن) ثانية.

مثال١١٦: يتحرك جسيم في خط مستقيم، بتسارع ثابت مقداره يعطى بالعلاقة: ت$(ن) = \left(٤ن + \frac{١}{٤}\right)$ م/ث^٢، جد سرعة الجسيم بعد مرور (ن) ثانية من بدء الحركة إذا علمت أن ع$(٢) = ٦$ م/ث

مثال١١٧: يتحرك جسيم على خط مستقيم، حيث أن سرعته بعد (ن) ثانية تعطى بالعلاقة: ع$(ن) = \left(٣ن^٢ - ٢ن\right)$ م/ث، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور (٣) ثواني، علماً بأن موقعه الابتدائي ف$(٠) = ٥$ م

التطبيقات الفيزيائية

مثال ١١٨: يتحرك جسيم على خط، بتسارع ثابت يعطى بالقاعدة: ت $(ن) = ٣$ سم/ث^٢، $(ن \geq ٠)$، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع $(٠) = ٢$ سم/ث، وموقعه الابتدائي ف $(٠) = ٥$ سم.

مثال ١١٩: إذا كان تسارع جسيم بعد مرور $(ن)$ من الثواني يعطى بالعلاقة: ت $(ن) = ٤ن$ م/ث^٢، جد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور $(ن)$ ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم ع $(٠) = ٣$ م/ث،
وموقعه الابتدائي ف $(٠) = ٤$ م.

التطبيقات الفيزيائية

مثال١٢٠: إذا كان تسارع جسيم $(ت)$ بعد مرور $(ن)$ من الثواني يعطى بالعلاقة: $ت(ن) = ٤ن$ م/ث^٢^، جد السرعة التي يقطعها الجسيم بعد مرور $(ن)$ ثانية من بدء الحركة، علماً بأن السرعة الابتدائية للجسيم $ع(٠) = ٦$ م/ث.

مثال١٢١: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بسرعة ثابتة مقدارها:

$$ع(ن) = \sqrt[٣]{(١+ن)^{٢}}$$ م/ث،

جد اقتران المسافة التي يقطعها الجسيم بعد مرور $(ن)$ ثانية، حيث أن المسافة المقطوعة بعد مرور (٧) ثواني تساوي (٥).

مثال١٢٢: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بحيث أن سرعته بعد مرور ثانية من بدء حركته تعطى بالعلاقة: $ع(ن) = ١٢\,جتا(٢ن - ١)$ م/ث، جد القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور $(ن)$ ثانية من بدء الحركة.

مثال١٢٣: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بتسارع ثابت مقداره $(٢أ)$، وكانت سرعته الابتدائية تساوي (٢)، وسرعته بعد (٣) ثواني تساوي (١٤)، جد قيمة الثابت $(أ)$.

التطبيقات الفيزيائية

مثال١٢٤: إذا كان تسارع جسيم يسير على خط مستقيم، بعد مرور $(ﻥ)$ ثانية من بدء الحركة يعطى بالعلاقة: ت $(ﻥ) = ٤٨ (١ - ٢ﻥ)^{٢}$ م/ث^٢،
وكان موقعه الابتدائي ف $(٠) = ٣$ م،
وسرعته الابتدائية ع $(٠) = ٢$ م/ث، فجد:

أ) سرعة الجسيم بعد مرور ثانية واحدة من بدء الحركة.
ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانيتين من بدء الحركة.

مثال١٢٥: يتحرك جسيم على خط مستقيم، بحيث أن سرعته بعد مرور $(ﻥ)$ ثانية من بدء الحركة تعطى بالقاعدة:
ع $(ﻥ) = (٣ﻥ - ١)(٤ﻥ + ١)$ م/ث، جد:

أ) القاعدة التي تمثل موقع الجسيم بعد مرور $(ﻥ)$ ثانية.
ب) موقع الجسيم بعد مرور ثانتين من بدء الحركة،
علماً بأن موقعه الابتدائي ف $(٠) = ٧$

إيجاد المساحة

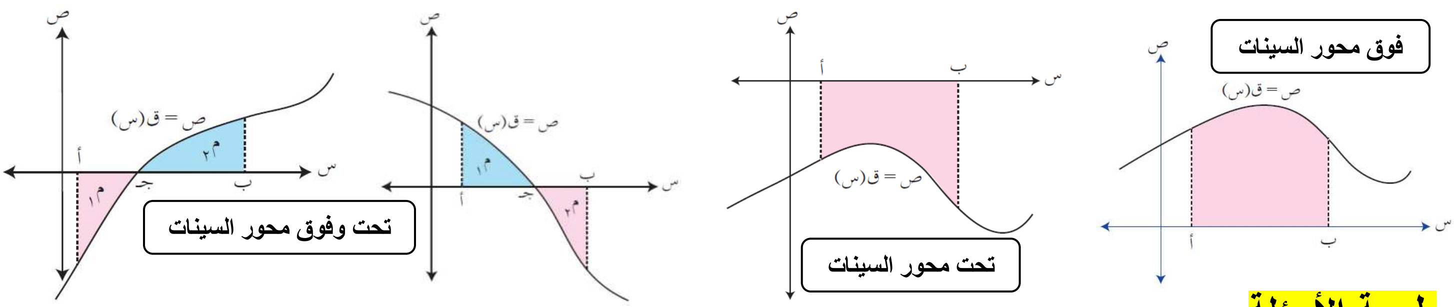
من أهم تطبيقات التكامل المحدود حساب مساحة المنطقة المغلقة والمحصورة بين الاقترانات.
والمطلوب في هذا الدرس إيجاد مساحة المنطقة المغلقة بين اقترانين فقط.

كيف تتم عملية إيجاد المساحة ؟
تتم هذه العملية من خلال إيجاد التكامل المحدود أولاً، ومن ثم إيجاد القيمة المطلقة للناتج النهائي. **(المساحات دائماً قيمة موجبة)**

مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران و محور السينات على الفترة تعطى بالقاعدة:

$$\text{المساحة} = \left|\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس\right|$$

بعض أشكال المساحات



طبيعة الأسئلة

١) جد $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$ ، **المطلوب هنا جد قيمة التكامل** (الجواب يمكن أن يكون سالب أو موجب)

٢) جد $\left|\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس\right|$ ، **المطلوب هنا جد المساحة** (الجواب يجب أن يكون قيمة موجبة فقط)، **لا يوجد مساحة سالبة**

خطوات إيجاد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين اقترانيين

١) **نحدد حدود التكامل** ويكون ذلك من خلال معرفة قيمة $(س_١)$ و $(س_٢)$، أو معرفتها من خلال الفترة المعطاة $[س_١، س_٢]$.
٢) **نساوي الاقتران الأول بالاقتران الثاني** لمعرفة نقاط التقاطع. **(حدود التكامل)**
٣) نحدد أي نقاط التقاطع تقع **ضمن الفترة** المعطاة وأيهما **لا يقع ضمن الفترة**، لتحديد عدد المساحات المطلوب حسابها.
٤) **إذا لم يذكر في السؤال حدود التكامل أو الفترة**، نستخدم مباشرة نقاط التقاطع وتعتبر هي حدود التكامل.
٥) **نحسب التكامل المحدود**، ثم أخذ القيمة المطلقة للجواب النهائي ويعتبر هو جواب المساحة المطلوب ويقاس بـ **(وحدة مربعة).**
٦) **قد نستخدم خاصة الإضافة في حال وجود أكثر نقاط تقاطع تقع ضمن الفترة.**

$$\left|\int_{أ}^{جـ} ق(س)دس\right| = \left|\int_{أ}^{ب} ق(س)دس\right| + \left|\int_{ب}^{جـ} ق(س)دس\right| \qquad م = م_١ + م_٢$$

إيجاد المساحة

مثال١٢٦: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = ٤س − ١، ومحور السينات، والمستقيمين: (س = ١)، (س = ٣)

مثال١٢٧: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = س ^{٣} ، ومحور السينات، والمستقيمين: (س = −١)، (س = ٢)

مثال١٢٨: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = ٦ − ٣س، هـ(س) = ٠ والمستقيمين: (س = ٣)، (س = ٤)

مثال١٢٩: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = ٣س ^{٢} − ١٢، ومحور السينات، والمستقيمين: (س = −١)، (س = ٢)

مثال١٣٠: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = س ^{٢} − ٩، ومحور السينات.

مثال١٣١: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران ق(س) = س ^{٢} − ٢س − ٣، ومحور السينات.

إيجاد المساحة

مثال١٣٢: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران $ق(س) = ٤ - س^{٢}$ ، ومحور السينات، في الفترة [٠، ٣]

مثال١٣٣: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران $ق(س) = س^{٢} - س$ ، و محور السينات، في الفترة [١، ٤]

مثال١٣٤: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران $ق(س) = -س^{٢} - ٤$ ،
ومحور السينات، في الفترة [-١، ١]

مثال١٣٥: جد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحني الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٩$ ،
ومحور السينات في الفترة [-٤، ٠]

إيجاد المساحة

مثال١٣٦: جد المساحة المحصورة بين المنحى

ق(س) = س ^{٢} – س ، و محور السينات، على الفترة [٠،٤]

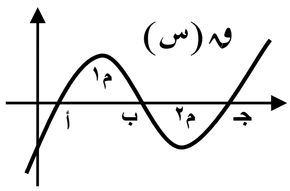
مثال١٣٧: جد المساحة المحصورة بين منحى الاقتران

ق(س) = س ^{٢} – ٢س ، و محور السينات، على الفترة [١،٤]

إيجاد المساحة

مثال١٣٨: بالاعتماد على الشكل الآتي الذي يمثل منحنى ق(س)،

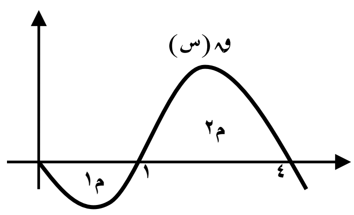
إذا كانت المساحة $(م_١ = ٣)$، $(م_٢ = ٥)$، جد $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$



مثال١٣٩: اعتماداً على الشكل المجاور الذي يمثل المنطقة المغلقة بين منحنى الاقتران ق(س)، ومحور السينات، في الفترة [٠،٤]،

إذا علمت أن مساحة المنطقة $(م_١)$ تساوي (٥) وحدات مربعة،

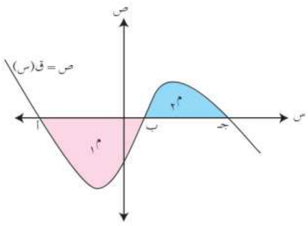
وأن $\int_{٠}^{٤} ٢ق(س)\,دس = ١٠$، فجد مساحة المنطقة $(م_٢)$



مثال١٤٠: يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ص = ق(س)،

فإذا كانت المساحة $(م_١ = ٨)$، $(م_٢ = ٥)$،

جد قيمة كل مما يأتي، مبرراً اجابتك:



١) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,دس$

٢) $\int_{ب}^{جـ} ق(س)\,دس$

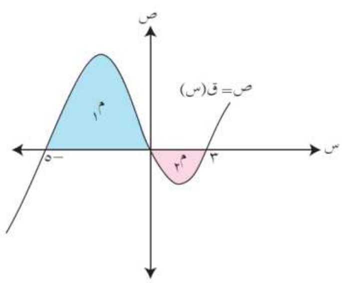
٣) $\int_{أ}^{جـ} ق(س)\,دس$

٤) مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) ومحور السينات على الفترة [أ،جـ]

مثال١٤١: يمثل الشكل التالي منحنى الاقتران ص = ق(س)،

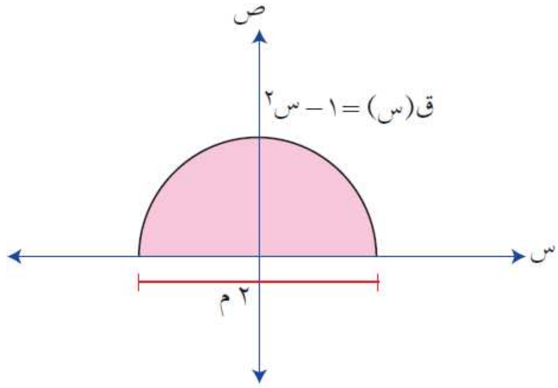
فـإذا كـانـت المسـاحـة $(م_١ = ١٣)$ وحـدة مربعـة، $(م_٢ = ٣)$

وحدات مربعة، فجد قيمة $\int_{-٥}^{٣} ق(س)\,دس$، مبرراً إجابتك.

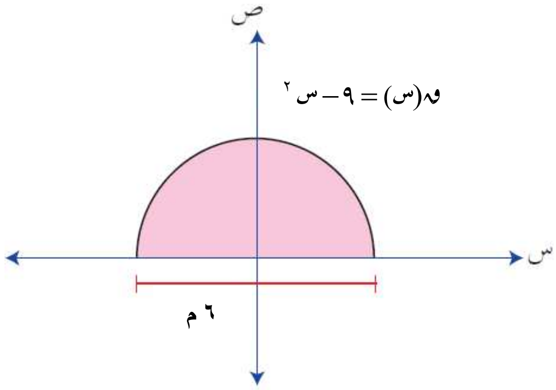


إيجاد المساحة

مثال١٤٢: يمثل الشكل التالي: نافذة طول قاعدتها (٢)م، محصورة بمنحنى الاقتران ق(س) = ١ − س٢،
إذا أردنا وضع زجاج على النافذة، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد خمسة دنانير، فما التكلفة الكلية لزجاج النافذة ؟



مثال١٤٣: يمثل الشكل التالي: باب طول قاعدته (٦)م، محصورة بمنحنى الاقتران ق(س) = ٩ − س٢،
إذا أردنا صناعة الباب من معدن النحاس، وكانت تكلفة المتر المربع الواحد ١٠٠ دينار، فما التكلفة الكلية لنحاس هذا الباب ؟



الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات لطلاب التخصص الأدبي والفندقي

إعداد/ مروان ابوديه

طرائق العد (مبدأ العد)

مبدأ العد: إذا أمكن إجراء عملية ما ضمن مراحل عدة متتابعة عددها $(ك)$،
بحيث أجريت المرحلة **الأولى** بطرائق عددها $(ن_1)$، والمرحلة **الثانية** بطرائق عددها $(ن_2)$، وهكذا حتى المرحلة الأخيرة التي تجرى بطرائق عددها $(ن_ك)$، **فإنه يمكن إتمام هذه العملية بطرائق عددها** $(ن_1 \times ن_2 \times \cdots \times ن_ك)$.

عدد الطرائق = عدد طرق المرحلة **الأولى** × عدد طرق المرحلة **الثانية** × ... **(قانون الوجبة واللجنة)**

مثال١: لدى مروان (٤) أنواع من القمصان، و (٣) أنواع من البناطيل، و (٢) من الأحذية، فهل يكفيه ذلك إذا أراد كل يوم ارتداء لباس مختلف عن اليوم الذي سبقه مدة شهر كامل ؟

مثال٢: محل لبيع الخضروات والفواكه يحتوي على أربعة أصناف من الفاكهة (موز، برتقال، تفاح، دراق)، وصنفين من الخضروات (كوسا، بطاطا). دخلت أم حسين المحل لشراء صنف واحد من الفواكه، وصنف آخر من الخضراوات. ما الخيارات المتوافرة لها ؟

مثال٣: دخل شخص إلى محل ملابس لشراء ملابس العيد، فوجد (٤) أنواع من القمصان، ونوعين من الأحذية، و (٤) أنواع من البناطيل، ونوع واحد من الأحزمة.

١) ما عدد طرق اختيار لبسه واحدة مكون من قميص، وحذاء، بنطال، وحزام.

٢) ما عدد طرق اختيار لبسه واحدة مكون من قميص، بنطال، وحزام.

مثال٤: تبيع مكتبة (٣) أنواع من الأقلام، و (٤) أنواع من الدفاتر.

١) كم طريقة يمكن لأحد الطلبة شراء قلم ؟

٢) كم طريقة يمكن لأحد الطلبة شراء قلم ودفتر ؟

مثال٥: كم عدد مكون من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام الزوجية التالية: {٢،٤،٦،٨}

١) إذا سمح بتكرار الأرقام. (السحب مع الارجاع)

٢) إذا لم يسمح بالتكرار. (السحب بدون الارجاع)

مثال٦: كم عدد مكون من (٣) منازل يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام التالية: {٣،٦،٨،٩}

١) إذا سمح بتكرار الأرقام. (السحب مع الارجاع)

٢) إذا لم يسمح بالتكرار. (السحب بدون الارجاع)

مثال٧: كم كلمة يمكن تكوينها من خلال (٣) حروف، من بين مجموعة الحروف التالية: {س،ج،ص،ع،ب}

(ملاحظة: معنى الكلمة غير مهم)

١) إذا سمح بتكرار الحروف. (السحب مع الارجاع)

٢) إذا لم يسمح بتكرار الحروف. (السحب بدون الارجاع)

مثال٨: بكم طريقة يمكن تكوين عدد زوجي مكون من خانتين ؟

طرائق العد (مبدأ العد)

مثال٩: مصنع لديه (٥) أنواع من الشاشات، و (٣) أنواع من لوحات المفاتيح، و (٣) أنواع من الفأرة، ونوعين من صناديق التحكم، بكم طريقة يمكن تصنيع جهاز حاسوب بعدة طرق مختلفة ؟

مثال١٠: بكم طريقة يمكن تكوين عدد من (٣) منازل من مجموعة الأرقام الفردية التي هي أكبر من (٤)، في حال:

١) سمح بتكرار الأرقام.

٢) لم يسمح بتكرار الأرقام.

مثال١١: دخل طالب مكتبة، فوجد (٣) أنواع لكورسات جغرافيا، و (٣) أنواع لكورسات تاريخ، و (٤) أنواع لكورسات رياضيات.

١) ما عدد طرق اختيار (٣) كورسات لمواد مختلفة ؟

٢) ماعدد طرق إختيار كورس جغرافيا وكورس رياضيات ؟

٣) ما عدد طرق اختيار كورس عربي تخصص ؟

٤) ما عدد طرق اختيار كورس تاريخ وجغرافيا ؟

مثال١٢: دخلت زبونة محل لبيع الآواني المنزلية، فوجدت أمامها (٣) أنواع من الصحون، و (٤) أنواع من الكاسات، و (٥) أنواع من السكاكين.

١) ما عدد طرق شراء تشكيلة من الأنواع السابقة ؟

٢) ما عدد طرق شراء نوع واحد فقط من الأواني المنزلية ؟

مثال١٣: محل لبيع المجمدات الغذائية، فيه (٣) أنواع مختلفة من الأسماك، و (٤) أنواع مختلفة من اللحوم الحمراء، ونوعان من الدجاج. بكم طريقة يمكن لأحد الزبائن أن يشتري نوعاً واحداً من كل من الأسماك واللحوم الحمراء والدجاج ؟

مثال١٤: اتبعت دائرة السير في إحدى الدول نظاماً لترقيم السيارات مستخدمة الأرقام (١ ⟵ ٩)، بحيث تحتوى لوحة السيارة على (٤) أرقام، وحرفين من أحرف الهجاء العربية. علماً بأن عدد أحرف الهجاء (٢٨) حرفاً.

بكم طريقة يمكن ترقيم السيارة إذا :

١) لم يسمح بتكرار الأرقام والأحرف.

٢) سمح بتكرار الأحرف ولم يسمح بتكرار الأرقام.

٣) سمح بتكرار الأرقام ولم يسمح بتكرار الحروف.

٤) سمح باستخدام الارقام فقط، ويمكن تكرارها.

مثال١٥: تعمل (١٠) حافلات لنقل الركاب بين مدينتي مأدبا وعمّان، وتعمل (٣٠) حافلة أخرى بين مدينتي عمّان والزرقاء. فإذا أراد راكب أن يسافر من مأدبا إلى الزرقاء مروراً بعمّان، ثم يعود سالكاً الطريق نفسه، فبكم طريقة يمكنه عمل ذلك شريطة ألا يركب الحافلة نفسها في أثناء رحلته ؟

طرائق العد (المضروب)

المضروب: إذا كان $(ن)$ **عدداً صحيحاً غير سالب (قيمة ن يجب أن تكون قيمة موجبة أو صفر)**، فإن مضروب العدد $(ن)$ يساوي:

$$ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times \cdots \times ٢ \times ١$$

حاصل ضرب الأعداد تنازلياً من $(ن)$ إلى (١)

قيم بعض المضاريب المهمة

$(١)! = ١$

$(٢)! = ٢$

$(٣)! = ٦$

$(٤)! = ٢٤$

$(٥)! = ١٢٠$

$(٦)! = ٧٢٠$

$(٧)! = ٥٠٤٠$

خصائص المضروب

- **جميع الأعداد السالبة والكسور لا يوجد لها مضروب.**
- $(٠)! = ١$
- $(١)! = ١$
- $ن! = ن \times (ن-١)!$ **خاصية تفيد في الاختصار**
  $ن! = ن \times (ن-١) \times (ن-٢)!$

أولوية تنفيذ عملية المضروب

- الأقواس
- الأسس
- **المضروب**، والمضروب لا يوزع على العمليات الحسابية.
- الضرب والقسمة
- الجمع والطرح

متى نستخدم قانون المضروب في الأسئلة الكلامية

- ترتيب $(ن)$ من الأشياء في $(ن)$ من الأماكن، **بحيث كل مكان يحتوي على عنصر واحد فقط.**
- **ترتيب شيء ما في صف مستقيم.**
- عندما يذكر بأن الترتيب مهم والتكرار غير مسموح. **(مراكز العناصر مهمة)**
- أمثلة مهمة: ترتيب كتب في رف، اصطفاف سيارات بجانب الرصيف، جلوس طلاب على مقاعد في استقامة واحدة.

طرائق العد (المضروب)

مثال١٦: جد قيمة كل مما يأتي:

١) $٥!$

٢) $٣! + ٢!$

٣) $٥! + ٤! + ١!$

٤) $٢! + ٠!$

٥) $(١ + ٣)!$

٦) $(٢ \times ٣)!$

٧) $(٣ - ٣)!$

٨) $٣! + ٦٠$

٩) $٤! - ٣!$

١٠) $٢! - ٤!$

١١) $٢ \times ٦!$

١٢) $\left(\frac{٩}{٣}\right)!$

١٣) $٣(٧ - ٢)!$

١٤) $٨(٥ - ٣)! + ٤!$

١٥) $\frac{٤!}{٦}$

١٦) $\frac{٤!}{٣!}$

مثال١٧: جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\frac{٦!}{٤!}$

٢) $\frac{٥!}{(٤ - ١)!}$

٣) $\frac{٦!}{٢! \times ٤!}$

٤) $\frac{٧!}{٧ \times ٦}$

٥) $\frac{٦!}{٣ \times ٤!}$

٦) $\frac{٥!}{٧! + ٦!}$

٧) $\frac{٦! + ٣ \times ٤!}{٥! + ٢ \times ٤!}$

٨) $\frac{٦! + ٥!}{٥! + (٧ - ٢)!}$

طرائق العد (المضروب)

إيجاد المجاهيل في المضروب

خطوات ايجاد المجهول (ن):

- ✓ احسب جميع المقادير والمضاريب المعلومة.
- ✓ وضع المجهول على طرف والأعداد على الطرف الأخر.
- ✓ نحول ناتج المضروب إلى صيغة مضروب.
- ✓ إلغاء رمز المضروب من الجهتين وايجاد قيمة المجهول.

مثال١٨: جد قيمة (ن) لكل من:

١) $ن! = ٤!$

٢) $(ن!) = ١٢٠$

٣) $٢(ن!) = ١٢$

٤) $٣ن! = ٣٦٠$

٥) $(٢ن)! = ٧٢٠$

٦) $ن! - ٢! = ٢٢$

٧) $\frac{ن!}{٣} = ٤٠$

٨) $١٢٠ = (٢ن - ١)!$

٩) $(٣ن - ١)! = ٢$

١٠) $ن! = ١$

١١) $٣ن! - ٢! = ٢ن! + ٢٢$

١٢) $١٠ + ٣(ن)! = ١٦$

١٣) $ن! - ٤! = ٩٦$

١٤) $٣(ن!) + ٣! = ٣٦٦$

١٥) $١٠٠ - (ن!) = -٢٠$

١٦) $-٦ + (ن + ١)! = ٠! + ١٧$

١٧) $(ن)(ن - ١)(ن - ٣) = (ن)(ن - ١)$

١٨) $\frac{(ن + ١)!}{(ن - ١)!} = ٣٠$

طرائق العد (المضروب)

مثال١٩: بسط المقادير التالية:

١) $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-١)!}$

٢) $\frac{\text{ن}!}{(\text{ن}-٢)!}$

٣) $\frac{(\text{ن}+١)!}{\text{ن}!}$

٤) $\frac{(\text{ن}-١)!}{(\text{ن}+٢)!}$

مثال٢٠: بكم طريقة يمكن أن تجلس أربع طالبات على أربعة مقاعد موضوعة على صف واحد ؟

مثال٢١: بكم طريقة يمكن ترتيب خمس كتب على رف مكتبة في صف واحد ؟

مثال٢٢: كم طريقة يمكن لخمس أشخاص استخدام جهاز حاسوب في الوقت نفسه، لشركة تحتوي على خمس أجهزة حاسوب ؟

مثال٢٣: كم كلمة من ستة حروف يمكن تكوينها ؟
وبدون تكرار أي حرف. (ليس شرطاً أن يكون للكلمة معنى)

مثال٢٤: اشترك خمسة لاعبين في بطولة عالمية للبرمجة، فما عدد المراكز المختلفة لنتائج هذه البطولة ؟

مثال٢٥: أراد معلم ترتيب (٤) طلاب في طابور الإذاعة المدرسية، فكم عدد التراتيب المختلفة الذي يمكنه ترتيب الطلاب به ؟

مثال٢٦: تمتلك مكتبة (٦) مواقف لسيارات، حيث الموقف الواحد يتسع لسيارة واحدة فقط، كم عدد الطرق الممكنة لاصطفاف السيارات في المواقف ؟

طرائق العد (التباديل)

التباديل: إذا **اخترت** عناصر عددها $(ر)$ من مجموعة عدد عناصرها $(ن)$، **بحيث يكون ترتيب الاختيار مهماً،** **فإن هذا الاختيار يسمى تباديل.** ويرمز إلى عددها بالرمز: $ل(ن،ر)$، حيث $(ن،ر)$ عددان طبيعيان، $(٠ \leq ر \leq ن)$

عدد طرق اختيار مجموعة جزئية $(ر)$ من مجموعة كلية $(ن)$ مع الاهتمام بالترتيب

القانون الأول: $ل(ن،ر) = ن \times (ن-١) \times (ن-٢) \times ... \times (ن-ر+١)$

وهو حاصل ضرب الأعداد تنازلياً من $(ن)$ إلى $(ر)$ من الخانات أو إلى $(ن-ر+١)$

القانون الثاني: $ل(ن،ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ ، حيث يمثل $(ن)$ **الحد الأول** و $(ر)$ **عدد التكرار**

خصائص التباديل

- $ل(ن،٠) = ١$
- $ل(ن،١) = ن$
- $ل(ن،ن) = ن!$
- $ل(ن،ن-١) = ن!$

إيجاد المجاهيل $(ن)$ و $(ر)$

$$ل(ن،ر) = أ_{(عدد)}$$

المجهول (ن) هو أول حد للوصول للقيمة (أ)

عدد مرات التكرار للوصول للقيمة (أ)

يمكن استخدام أحد القوانين التالية في إيجاد المجاهيل

- $ل(ن،ر) = (ن)(ن-١)(ن-٢)...$
- $ل(ن،ر) = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$

ملاحظة: قيم $(ن،ر)$ يجب أن تكون قيم موجبة

خطوات إيجاد المجهول في التباديل

١) ابدأ أولاً بالمقدار الذي يمكن حسابه مباشرة.
٢) ضع المجهول على طرف والقيم على الطرف الأخر.

متى نستخدم قانون التباديل في الأسئلة الكلامية

- طلب في السؤال بصريح العبارة: **جد تباديل.**
- اختيار مجموعة جزئية صغيرة من مجموعة كلية كبيرة، **مع الاشارة للمناصب.**
- اشار إلى أن **التكرار غير مسموح.**
- **تكوين كلمة** من مجموعة حروف، **تكوين عدد** من مجموعة أرقام.
- **سحب الكرات** على التوالي دون ارجاع.

طرائق العد (التباديل)

مثال٢٧: جد الناتج النهائي لكل من:

١) ل(٥،٢)

٢) ل(٦،٣)

٣) ل(٤،٤)

٤) ل(٨،٠)

٥) $\frac{\text{ل}(٦،٣)}{٣!}$

٦) $\frac{\text{ل}(٥،٥)}{٤!}$

٧) ل(٦،٥)

٨) ل(٣،١) + ل(٦،٠)

٩) ل(٤،٤) + ل(٣،٢)

١٠) ل(٦،٤) + ل(٧،٥) + ٢!

١١) ٠! + ل(٥،٥) + ل(٣،١)

١٢) ل(٧،٧)

١٣) ١٢ + ل(٢،١) + ٣ل(٣،٢)

١٤) ل(٦،٥) + ٥!

١٥) $\frac{\text{ل}(٥،٣)}{\text{ل}(٦،٢)}$

١٦) $\frac{\text{ل}(٨،٣)}{\text{ل}(٣،٢)}$

١٧) ٠! + ل(٥،١) + ل(٣،٣) + ٤!

١٨) $\frac{٢\text{ل}(٦،٣)}{(٧-٣)!}$

١٩) $\frac{\text{ل}(٦،٤)}{٤!}$

٢٠) $\frac{\frac{١}{٢}\text{ل}(٦،٥)}{٤!-١٤}$

٢١) ل(٥،٥)

طرائق العد (التباديل)

مثال٢٨: جد قيمة المجهول (ن) لكل من الحالات التالية:

١) ل(ن،١) = ٧

٢) ل(ن،٤) = ٢٤

٣) ل(ن،٢) = ١٢

٤) ل(ن،٣) = ٦٠

٥) ل(ن،٢) = ٩٠

٦) ل(ن،٢) = ٤٢

٧) ل(ن،ن) = ٧٢٠

٨) ل(ن،٣) = ٧٢٠

٩) ل(ن،٣) = ل(ن،٢)

١٠) $\frac{١}{٢}$ ل(ن،٣) = ل(ن،٢)

١١) ل(ن،٣) = ٥ل(ن،٢)

١٢) ل(ن − ٢،٣) = ٦

١٣) ل(ن − ١،٤) = ٣٦٠

١٤) ن × (ن − ١) = ١٢

١٥) ٢ل(ن،٢) = ٨٤

١٦) ٢ل(ن،٢) − ل(٥،١) = ١٠٧

١٧) $\frac{١}{٢}$ ل(ن،٣) = ٢ل(ن،٢)

١٨) $\frac{\text{ل(ن،٣)}}{\text{٣!}}$ = ٤

١٩) ن ل(ن،١) = ٩

طرائق العد (التباديل)

مثال٢٩ : جد قيمة الثابت (ر) لكل من الحالات التالية:

١) ل(٥،ر) = ٦٠

٢) ٢ل(٦،ر) = ٢٤٠

٣) ل(٤،ر) / ٣ = ٨

٤) ل(٩،ر) = ١

٥) ل(٧،ر) = ٧

٦) ل(٤،ر) = ٢٤

٧) ل(٦،ر) + ٣! = ٣٦

٨) ل(١٠،ر) = ٥٠٤٠

٩) ٣ل(٦،ر) = ٣٦٠

١٠) ل(٥،ر) = ٦٠

١١) ل(١٠،ر) = ٧٢٠

١٢) ٣ + ٢ل(٦،ر) = ٤! + ٣٩

١٣) ل(٨،ر) = ١٦٨٠

١٤) ٩٢ − ٢ل(٤،ر) = ٠! + ٤٣

١٥) ل(٥،ر) = ٥!

١٦) ½ ل(٥،ر) = ٦٠

١٧) ل(٦،ر) / ٣! = ٥

١٨) ل(٧،ر) = ٦! + ٥!

طرائق العد (التباديل)

مثال ٣٠: كم عدد تباديل مجموعة مكونة من (٦) عناصر مأخوذة (٣) في كل مرة ؟

مثال ٣١: كم عدد تباديل مجموعة مكونة من (٥) عناصر مأخوذة (٢) في كل مرة ؟

مثال ٣٢: كم عدد التباديل الثلاثية المأخوذة من مجموعة سداسية ؟

مثال ٣٣: ما عدد تباديل مجموعة مكونة من (٤) عناصر ؟

مثال ٣٤: كم كلمة يمكن تشكيلها من حروف اسم (مروان) ؟

مثال ٣٥ : بكم طريقة يستطيع (٣) طلاب الجلوس في صف فيه (٥) مقاعد على موضوعة على استقامة واحدة ؟

مثال ٣٦: كم عدداً يمكن تمثيله من الأعداد التالية: {١،٥،٩}

مثال ٣٧: كم عدداً مكوناً من ثلاث منازل يمكن تكوينه من بين مجموعة الأعداد الزوجية من (١) إلى (٩) ؟

مثال ٣٨: كم عدداً مكوناً من منزلتين يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٢،٤،٦،٨} ؟ (علماً بأن التكرار غير مسموح)

مثال ٣٩: كم كلمة مختلفة مكونة من ثلاث أحرف يمكن تكوينها من مجموعة الأحرف التالية: {أ،ب،جـ،د،هـ،و} ؟
(علماً بأنه ليس شرطاً لأن يكون للكلمة معنى)

مثال ٤٠: أرادت دائرة السير طباعة لوحات للسيارات، بحيث تتكون اللوحة من ثلاثة حروف هجائية عربية، وخمسة أرقام عربية، فبكم طريقة يمكن عمل هذه اللوحات في حال إذا لم يسمح بتكرار الحروف والأرقام ؟

مثال ٤١: ما عدد طرائق اختيار رئيس شركة، ونائب له، ومدير مالي من بين (١٠) موظفين في الشركة، علماً بأن الشخص الواحد لا يشغل أكثر من وظيفة واحدة في الشركة ؟

مثال ٤٢: بكم طريقة يمكن اختيار رئيس قسم، ومساعد له، وأمين عهدة، من بين (٩) أعضاء في هذا القسم شريطة أن لا يشغل أحدهم وظيفتين معاً ؟

مثال ٤٣: صندوق يحتوي على خمسة كرات صفراء وثلاثة كرات سوداء، فبكم طريقة يمكن سحب:

١) ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع.

٢) كرتان صفراء على التوالي دون إرجاع.

٣) ثلاث كرات سوداء على التوالي دون إرجاع.

طرائق العد (التوافيق)

التوافيق: إذا **اختيرت** عناصر عددها (ر) من مجموعة عدد عناصرها (ن)، **بحيث يكون ترتيب الاختيار غير مهم،** **فإن هذا الاختيار يسمى توافيق.** ويرمز إلى عددها بالرمز: $\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$، حيث $(\text{ن}،\text{ر})$ عددان طبيعيان، $(٠ \leq \text{ر} \leq \text{ن})$

عدد طرق اختيار مجموعة جزئية (ر) من مجموعة كلية (ن) دون الاهتمام بالترتيب

القانون الأول: $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \dfrac{\text{ل}(\text{ن}،\text{ر})}{\text{ر}!}$، حيث يمثل (ن) العناصر المأخوذ منه و (ر) عدد العناصر المأخوذة.

القانون الثاني: $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \dfrac{\text{ن}!}{\text{ر}!(\text{ن}-\text{ر})!}$

يمكن استخدام القانون المتمم في التوافيق لتسهيل الحساب

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$$

خصائص التوافيق

- $\binom{\text{ن}}{٠} = ١$
- $\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = ١$
- $\binom{\text{ن}}{١} = \text{ن}$
- $\binom{\text{ن}}{\text{ن}-١} = \text{ن}$

إيجاد المجاهيل في التوافيق

- **إذا كان المجهول فوق**، فإن للمجهول قيمة واحدة فقط.
- **إذا كان المجهول تحت**، فإن للمجهول قيمتين.

متى نستخدم قانون التوافيق في الأسئلة الكلامية

- طلب في السؤال بصريح العبارة: **جد توافيق.**
- اختيار مجموعة جزئية صغيرة من مجموعة كلية كبيرة **ولا أهمية للترتيب.**
- اختيار لجنة **ولم يشير للمناصب.**
- اشار إلى أن **التكرار مسموح**، أو **السحب معاً** بدون أرجاع، أو **السحب معاً عشوائياً.**
- **تكوين كلمة** من مجموعة حروف.

طرائق العد (توافيق)

مثال٤٤: جد الناتج النهائي لكل من:

١) $\binom{٤}{٢}$

٢) $\binom{٦}{٢}$

٣) $\binom{٥}{٥}$

٤) $\binom{١٠}{٠}$

٥) $\binom{٨}{١} + ٤!$

٦) $\binom{٨}{٧}$

٧) $\binom{٦}{٤}$

٨) $\binom{٧}{٥}$

٩) $\binom{٣}{١} \times \binom{٥}{٤}$

١٠) $\binom{٩}{٧}$

١١) $\binom{٨}{٥}$

١٢) $٣! \times \binom{٥}{٢}$

١٣) $\binom{١٠}{٧}$

١٤) $\binom{١٠٠}{٩٩}$

١٥) $٤\binom{٦}{٣}$

١٦) $\binom{٥}{٠} + \binom{٧}{٦}$

١٧) $\binom{٤}{١} \times \binom{٦}{٥}$

١٨) $\binom{٨}{٦} \times \binom{٩}{١}$

١٩) $\binom{٥}{٣} \times$ ل(٧،٠)

طرائق العد (التوافيق)

مثال٤٥: جد قيمة المجهول لكل من الحالات التالية:

١) $\binom{\text{س}}{٣} = \binom{\text{س}}{٢}$

٢) $\binom{\text{س}}{٣} = \binom{٥}{٢}$

٣) $\binom{\text{ن}}{٥} = \binom{\text{ن}}{٣}$

٤) $\binom{٦}{\text{ر}} = \binom{٦}{٢}$

٥) $\binom{٩}{٦} = \binom{\text{س}}{٣}$

٦) $\binom{٧}{٤} = \binom{٧}{\text{س}}$

٧) $\binom{٩}{٣\text{ر}} = \binom{٩}{٦}$

٨) $\binom{٨}{٢\text{س} - ١} = \binom{٨}{٣}$

٩) $\binom{\text{ن}^{٢}}{١} = \binom{\text{ن}^{٢}}{٣}$

١٠) $\binom{٢\text{ص}}{٣} = \binom{٦}{٣}$

١١) $\binom{٥}{\text{ر}} = ١$

١٢) $\binom{٨}{\text{س}} = ٨$

١٣) $\binom{\text{س}}{٥} = ٦$

١٤) $\binom{١٢}{٢\text{ر} + ١} = \binom{١٢}{٥}$

١٥) $\binom{١٢}{٣\text{س}} = \binom{١٢}{٩}$

طرائق العد (التوافيق)

مثال٤٦ : جد قيمة المجهول لكل من الحالات التالية:

١) $\binom{\text{ن}}{٣} = ٤$

٢) $\binom{\text{ن}}{٢} = ٢١$

٣) $\binom{\text{ن}}{٢} = ١٠$

٤) $\text{ن}! = \text{ل}(٥،٢) + \binom{٤}{١}$

٥) $(\text{ن} - ١)! = \frac{٢}{٣}\text{ل}(٦،٤) - \binom{١٦}{٢}$

٦) $\binom{\text{ن}}{٣} = \text{ل}(\text{ن}،٢)$

١) $\text{ل}(\text{ن}،١) = \binom{\text{ن}}{٢}$

٢) $٢\text{ن}! = \text{ل}(٥،٣) - \binom{٦}{٢} + \binom{٣}{١}$

٣) $\text{ل}(\text{ن}،٢) = ٥! + \binom{٩}{٢}$

٤) $\frac{\text{ن}!}{\text{ل}(\text{ن}،٢)} = \binom{٦}{٥}$

طرائق العد (التوافيق)

مثال٤٧ : جد قيمة المجهول لكل من الحالات التالية:

١) $\text{ن}! = ٢ \times \binom{١٠}{٢} + \text{ل}(٦،٢)$

٢) $\text{ل}(\text{ن}،٣) = ٦\binom{\text{ن}}{٢}$

٣) $\text{ن}! = \text{ل}(٥،٣) + \frac{٤}{٣}\binom{١٠}{٢}$

٤) $٣\binom{\text{ن}}{٣} = \text{ل}(\text{ن}،٢)$

مثال٤٨ : إذا كان $\binom{\text{ن}}{٢} = ٣٦$ ، فما قيمة الثابت (ن).

مثال٤٩ : إذا كان $\binom{\text{ن}}{٣} = ١٠$ ، فجد قيمة $\text{ل}(\text{ن}،٣)$

مثال٥٠ : إذا كان $\text{ل}(\text{ن}،٤) = ١٢٠$ ، فجد $\binom{\text{ن}}{٤}$

طرائق العد (التوافيق)

مثال٥١: ما هي عدد توافيق (٥) عناصر مأخوذة منها (٣) عناصر في كل مرة ؟

مثال٥٢: بكم طريقة يمكن اختيار (٤) طلاب من بين (٦) طلاب، لتمثيل الأردن في إحدى المسابقات العالمية ؟

مثال٥٣: كم مجموعة خماسية يمكن تكوينها من (٧) أشخاص ؟

مثال٥٤: جد عدد طرائق اختيار قلمين من علبة ألوان تحتوي على (١٢) قلم.

مثال٥٥: بكم طريقة يمكن لطالب الإجابة على سبعة أسئلة من بين عشرة أسئلة في امتحان الرياضيات.

مثال٥٦: ما عدد المجموعات الجزئية الرباعية التي يمكن اختيارها من بين مجموعة كلية تتكون من (٩) عناصر ؟

مثال٥٧: كم عدد طرائق اختيار كتابين من بين سبعة كتب مختلفة ؟

مثال٥٨: ما عدد طرق اختيار (٣) فرق لكرة القدم من بين (١٠) فرق للمشاركة في بطولة كأس أسيا ؟

مثال٥٩: بكم طريقة يمكن اختيار لجنة طلابية مكونة من ثلاث طلاب متميزين من بين (١٠) طلاب في صف ما ؟

مثال٦٠: بكم طريقة يمكن اختيار (٣) معلمين وطالبين لتشكيل لجنة من بين (٥) معلمين و (٩) طلاب ؟

مثال٦١: بكم طريقة يمكن اختيار (٤) كتب و (٣) دفاتر من بين (٦) كتب و (٧) دفاتر ؟

مثال٦٢: صندوق يحتوي على أربع كرات صفراء وثلاثة كرات زرقاء، فبكم طريقة يمكن سحب:

١) ثلاث كرات معاً.

٢) خمس كرات معاً.

٣) كرتان صفراوان بشكل عشوائي.

٤) ثلاث كرات زرقاء.

طرائق العد (أسئلة متنوعة)

مثال٦٣: مجموعة مكونة من (٥) معلمين و (٤) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية تتكون من معلمين اثنين على الأقل.

مثال٦٤: مجموعة مكونة من خمسة رجال وأربع نساء، بكم طريقة يمكن تكوين لجنة رباعية منهم بحيث يكون فيها رجلان على الأقل ؟

مثال٦٥: مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٦) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة ثلاثية منهم بحيث تتكون من معلم واحد على الأقل.

مثال٦٦: مجموعة مكونة من (٤) معلمين و (٦) طلاب، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية مكونة من رئيس، ونائب للرئيس، من المعلمين وعضوين من الطلاب.

مثال٦٧: جد عدد طرق تكوين لجنه مكونة من رئيس، ونائب للرئيس، و (٣) أعضاء من بين (٦) معلمين و (١٠) طلاب بحيث يكون الرئيس ونائبه من المعلمين والباقي من الطلاب.

مثال٦٨: مجموعة مكونة من (٦) معلمين و (٥) إداريين، جد عدد الطرق التي يمكن بها تكوين لجنة رباعية منهم بحيث يكون رئيس اللجنة إدارياً ونائبه معلماً.

مثال٦٩: مجموعة مكونة من (٤) طلاب من كلية العلوم، و (٦) طلاب من كلية الآداب في إحدى الجامعات. جد عدد الطرق التي يمكن بها اختيار لجنة مكونة من رئيس ونائب للرئيس وأربعة أعضاء من المجموعة بحيث يكون الرئيس ونائبه من كلية الآداب.

مثال٧٠: في أحد المستشفيات يراد اختيار فريق طبي خماسي لتمثيل المستشفى في مؤتمر صحي، من بين (٥) أطباء، و (٦) ممرضين. بكم طريقة يمكن تكوين الفريق في الحالات الآتية:

١) الفريق يتألف من طبيبين اثنين على الأكثر.

٢) رئيس الفريق ونائبة من الأطباء، والبقية ممرضين.

مثال٧١: عائلة تتألف من (٥) أولاد و (٣) بنات. يراد تكليف (٣) منهم بتنظيف الحديقة، فبكم طريقة يمكن اختيارهم، بحيث:

١) يوجد بنتان على الأقل ضمن الفريق.

٢) لا يوجد أي بنت في الفريق.

٣) يكون رئيس الفريق من البنات.

المتغيرات العشوائية

المتغير العشوائي: هي قيم (س) الممكنة لوقوع حدث معين، وهي مجموعة جزئية من الفضاء العيني، **وتمثل عدد مرات إجراء التجربة.**

الفضاء العيني (Ω): جميع النتائج محتملة الحدوث عند إجراء تجربة ما.

الاحتمال: هو **عدد مرات وقوع الحدث** مقسوم على **عدد عناصر الفضاء العيني.** حيث $١ \geq ل(س) \geq ٠$

قانون حساب الاحتمال ل(س) $= \frac{ع}{\Omega}$، حيث (ع) يمثل عدد مرات وقوع الحدث، و (Ω) عدد عناصر الفضاء العيني.

$\sum ل(س) = ١$، مجموع الاحتمالات = ١

أمثلة على الاحتمالات

- احتمال ظهور عدد معين في تجربة رمي حجر نرد $ل(س) = \frac{١}{٦}$
- احتمال ظهور صورة أو كتابة عند رمي قطعة نقود $ل(س) = \frac{١}{٢}$
- احتمال أن يكون المولود ذكر أو انثى $ل(س) = \frac{١}{٢}$
- احتمال فوز أو خسارة فريق $ل(س) = \frac{١}{٢}$
- احتمال فوز أو خسارة أو تعادل فريق $ل(س) = \frac{١}{٣}$
- احتمال سحب كرة حمراء من صندوق يحتوي على خمس كرات حمراء $ل(س) = \frac{١}{٥}$

الجدول الاحتمالي: جدول يحتوي على قيم المتغير العشوائي (س) والاحتمال ل(س) لكل قيمة.

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	احتمال عدم الحدوث	احتمال الحدوث لمرة واحدة	احتمال الحدوث لمرتين	احتمال الحدوث لثلاث مرات

التوزيع الاحتمالي: كتابة قيم (س) والاحتمال ل(س) على شكل أزواج مرتبة. $\{(٠،٠.٥)،(١،٠.٢)،(٢،٠.٣)\}$

التوزيع ذو الحدين (تجربة برنولي): هي تجربة عشوائية مكونة من محاولة واحدة فقط **فضاؤها العيني مكون من نتيجتين منفصلتين** وهما:

- (أ) احتمال النجاح، قيمة النجاح قيمة ثابتة حتى لو أجرينا التجربة لعدة مرات.
- (١ − أ) احتمال الفشل، قيمة الفشل قيمة ثابتة حتى لو أجرينا التجربة لعدة مرات.

قانون توزيع ذو الحدين (قانون برنولي): $ل(س = ر) = \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (١ - أ)^{ن-ر}$

متى نستخدم قانون توزيع ذو الحدين (قانون برنولي)

- ذكر في السؤال **تجربة عشوائية.**
- ذكر في السؤال **توزيع ذو الحدين أو برنولي.**
- ذكر في السؤال قيمة **(أ) نسبة النجاح،** أو قيمة **(١ − أ) نسبة الفشل.**

المتغيرات العشوائية

توزيع ذو الحدين (قانون برنولي)

الاحتمال $= \binom{ن}{ر} (أ)^{ر} (1-أ)^{ن-ر}$

حيث:

- $(ن)$: عدد عناصر الفضاء العيني.
- $(ر)$: عدد مرات اجراء التجربة.
- $(أ)$: احتمال النجاح.
- $(1-أ)$: احتمال الفشل.

مثال٧٢: في تجربة رمي قطعة نقد، إذا دل المتغير العشوائي (س) على ظهور الصورة، اكتب قيم المتغير العشوائي (س).

مثال٧٣: في تجربة رمي حجر نرد، إذا دل المتغير العشوائي (س) الرقم الظاهر على حجر النرد، اكتب قيم المتغير العشوائي (س).

مثال٧٤: أجريت ثلاث عمليات جراحية في إحدى المستشفيات الأردنية، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العمليات الجراحية الناجحة، اكتب قيم (س) الممكنة.

مثال٧٥: لعب فريق كرة قدم أربع مباريات، اكتب قيم المتغير (س) الممكنة لفوز هذا الفريق.

مثال٧٦: في تجربة إلقاء قطعتي نقد مرة واحدة، إذا دل المتغير (ع) العشوائي على عدد مرات ظهور كتابة على الوجه الظاهر:

- جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي (ع).
- بين أن ل(ع) هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي (ع).

مثال٧٧: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) معطى بالجدول التالي، جد قيمة (جـ).

س	صفر	١	٢	٣
ل(س)	٠,٢	جـ	٠,٣	٠,١

مثال٧٨: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ع) معطى بالجدول التالي، جد قيمة (جـ).

ع	صفر	١	٢	٣
ل(ع)	٢جـ	٣جـ	جـ	٤جـ

مثال٧٩: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) معطى بالمجموعة: $\{(١،٠.٢)،(٢،٠.١)،(٣،٠.٤)،(٤،ك)\}$، جد قيمة (ك).

مثال٨٠: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) كالآتي: $\{(٠،٠.٣)،(١،٠.١)،(٢،أ+١)\}$، جد قيمة الثابت (أ).

مثال٨١: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) كالآتي: $\{(٠،٠.٢)،(١،٠.٣)،(٢،أ)\}$، جد قيمة الثابت (أ).

المتغيرات العشوائية

مثال٨٢: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين، معاملاته (ن = ٣)، (أ = ٠.٣)، فجد ل(س < ٢).

مثال٨٣: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذو الحدين، معاملاته (ن = ٤)، (أ = ٠.٣)، اوجد كلاً مما يلي:

١) ل(س = ٢)

٢) ل(س ≥ ٣)

مثال٨٤: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا حدين، معاملاته (ن = ٣)، (أ = ٠.٩)، فجد ل(س ≥ ١).

مثال٨٥: غرس مزارع (٥) نخلات وكانت نسبة احتمال نجاح النخلة الواحدة (٤٠٪)، ما احتمال نجاح غرس (٣) نخلات ؟

مثال٨٦: غرس مزارع (٤) شجيرات وكانت نسبة احتمال فشل زراعة الشجيرة الواحدة (٣٠٪)، ما احتمال فشل غرس (٣) شجيرات ؟

مثال٨٧: إذا كان احتمال نجاح زراعة التفاح في منطقة جرش هو (٠.٨)، زرع شخص (٣) شجيرات من التفاح، ما احتمال نجاح زراعتها جميعاً ؟

مثال٨٨: رميت قطعة النقود من فئة الـ (١٠) قروش، (٦) مرات، ما احتمال حصولنا على صورة في الـ (٤) مرات ؟

المتغيرات العشوائية

مثال٨٩: سجلت إحدى القابلات في أحد المستشفيات الأردنية ولادة ثلاثة أطفال في نفس اليوم حسب الجنس وتسلسل الولادة. فإذا علمت أن الأطفال ولدوا من ثلاث أمهات:

١) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور المسجلين في ذلك اليوم في المستشفى، فاكتب قيم (س) الممكنة.

٢) ما احتمال أن يكون جميع المواليد من الإناث.

مثال٩٠: أجريت ثلاث عمليات في أحد المستشفيات الأردنية، وكان احتمال نجاح العملية الواحدة يساوي (٨٠٪):

١) إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العمليات الناجحة، فأكتب قيم (س) الممكنة.

٢) ما احتمال نجاح عملية جراحية واحدة فقط ؟

٣) ما احتمال فشل (٣) عمليات ؟

مثال٩١: إذا كان احتمال أن يصيب شخص ما هدفاً في كل طلقة يطلقها على الهدف يساوي (٠.٦)، فإذا اطلق (٤) طلقات على الهدف، فما احتمال أن يصيب الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

مثال٩٢: إذا كانت نسبة القطع المعيبة في إنتاج أحد المصانع (١٠٪)، فإذا أخذت (٤) قطع عشوائياً من إنتاج المصنع، فما احتمال أن تكون بينها قطعة واحدة على الأكثر صالحة ؟

مثال٩٣: قررت إحدى شركات الاستيراد رفض مستورداتها من الشركة المصنعة إذا وجدت وحداتان معيبتان أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٦) وحدات، فإذا كانت نسبة المعيب في إنتاج الشركة المصنعة (١٠٪)، فما احتمال قبول الشركة المستوردة لهذه الشحنة ؟

المتغيرات العشوائية

مثال٩٤: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين، معاملاه (ن = ٢)، (أ = ٠.٣)، فجد:

١) قيم (س).

٢) جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

مثال٩٥: في تجربة رمي قطعة نقد (٣) مرات متتالية، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد مرات ظهور الكتابة، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

مثال٩٦: يحتوي صندوق على (٤) كرات حمراء و (٦) كرات بيضاء، سحبت من الصندوق (٣) كرات على التوالي مع الإرجاع، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

مثال٩٧: إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها (٣) أطفال وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة، وإن احتمال ولادة الطفل الذكر يساوي احتمال ولادة الأنثى، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

مثال٩٨: أجريت ثلاث عمليات جراحية في أحد المستشفيات الأردنية وكان احتمال نجاح العملية الواحدة (٨٠٪)، إذا دل المتغير العشوائي (س) على عدد العمليات الناجحة، كون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

مثال٩٩: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً ذا الحدين، معاملاته (ن = ٢)، (أ = ٠.١)، اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س).

المتغيرات العشوائية

مثال١٠٠: إذا كان (س) متغير عشوائي يخضع لتوزيع ذو الحدين، حيث (ن = ٣)، ل(س ≥ ١) = $\frac{٧}{٨}$، فجد قيمة (أ).

مثال١٠١: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين، معاملاه (ن،أ)، وكان ل(س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$، (ن = ٣)، فجد قيمة (أ).

مثال١٠٢: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ذي الحدين، معاملاه (ن = ٤)، (أ)،
وكان ل(س ≥ ١) = $\frac{١٥}{١٦}$، فجد:

١) قيمة (أ).
٢) ل(س = ٣).

العلامة المعيارية

العلامة الخام (س) و العلامة المعيارية (ز)

عندما يحصل **مروان** على علامة (٨٠) في مادة اللغة العربية والذي درس في شعبة (أ)، وحصل زميلة **رائد** على علامة (٨٥) في المادة نفسها والتي درسها في الشعبة (ب). **السؤال المطروح أي العلامتين أفضل ؟**

في الحقيقة لا نستطيع معرفة ذلك بشكل مباشر لأننا لا نعرف مستوى الأسئلة للشعبتين، ولا مستوى تحصيل الطلبة في كل شعبة، ولذلك يجب علينا أولا معرفة عدة أمور قبل الحكم على العلامة الأفضل وهي معرفة **المتوسط الحسابي** $(\bar{س})$ و **الانحراف المعياري** (ع) لكل شعبة.

ليتم بعد ذلك حساب العلامة المعيارية (ز) التي من خلالها نستطيع الحكم من هو صاحب أفضل علامة. **(العلامة الأكبر هي الأفضل)**

العلامة المعيارية: هي **فرق** انحراف المشاهدة (س) عن المتوسط الحسابي **(الوسط الحسابي)** $(\bar{س})$ نسبة للانحراف المعياري (ع)، ويرمز إليها بالرمز: (ز)، أي إن: $ز_س = \frac{س - \bar{س}}{ع}$ ، حيث $(ع \neq ٠)$، **المتوسط والوسط الحسابي هو نفسه معدل علامات الشعبة.**

حيث:

(ز) : العلامة المعيارية **(القيمة المعيارية)، القيمة الموجبة** (انحراف فوق المعدل) **والقيمة السالبة** (انحراف تحت المعدل).

(س): العلامة الفعلية **(العلامة الخام)**، وهي نفسها العلامة الحقيقية للطالب.

$(\bar{س})$: المتوسط الحسابي **(الوسط الحسابي** أو **المعدل).**

(ع) : الانحراف المعياري.

مثال١٠٣: إذا كان **الوسط الحسابي لعلامات طلاب يساوي (٦٠) والانحراف المعياري لها يساوي (١٠)، فجد العلامة المعيارية (ز)، إذا كانت:**

١) العلامة الفعلية تساوي (٧٠).

٢) العلامة الحقيقية تساوي (٩٠).

٣) العلامة الخام تساوي (٥٠).

٤) العلامة الفعلية تساوي (٦٠).

٥) العلامة الخام تساوي (٤٥).

٦) العلامة الخام تساوي (٨٠).

٧) العلامة الحقيقية تساوي (٠).

العلامة المعيارية

مثال١٠٤: في توزيع تكراري، إذا كانت العلامة الخام (٦٠) تقابل العلامة المعيارية (٣)، وكان الوسط الحسابي (٥٤)، فجد الانحراف المعياري لهذا التوزيع.

مثال١٠٥: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٥)، والانحراف المعياري لها (٦)، فجد العلامة التي تنحرف فوق الوسط انحرافين معيارين.

مثال١٠٦: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة أحد الصفوف في مبحث الرياضيات (٧٠) والانحراف المعياري (٥)، فجد العلامة المعيارية للعلامة الحقيقية (٦٠).

مثال١٠٧: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات اللغة العربية (٦٠) والانحراف المعياري لها (٥)، فجد العلامة المعيارية للعلامة (٥٨).

مثال١٠٨: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠)، والانحراف المعياري لها يساوي (٤)، فجد القيمة التي تنحرف انحرافين معيارين تحت الوسط الحسابي.

مثال١٠٩: إذا كانت المشاهدة (٨) تقابل العلامة المعيارية (٢)، وكان الانحراف المعياري (٢)، فجد المتوسط الحسابي.

مثال١١٠: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات صف ما في مادة الرياضيات (٦٠)، والانحراف المعياري لها (٤)، وكانت العلامة المعيارية لعلامة الطالب أحمد تساوي (– ٣)، فجد علامته الفعلية التي حصل عليها.

مثال١١١: تخضع كتل طلبة الصف الخامس الأساسي في إحدى المدارس لمتوسط حسابي مقداره (٤٠) كغ، وانحراف معياري مقداره (٤). فإذا كانت كتلة أحد طلبة الصف (٣٨) كغ، فجد العلامة المعيارية لكتلة هذا الطالب.

العلامة المعيارية

مثال١١٢: إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من القيم يساوي (٦٠)، والانحراف المعياري لها يساوي (٣)، فجد العلامة التي تنحرف فوق الوسط الحسابي انحرافين معيارين.

مثال١١٣: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة الرياضيات تساوي (٦٠)، والانحراف المعياري لها (٤)، فجد العلامة المعيارية للعلامة (٧٢).

مثال١١٤: إذا كان الوسط الحسابي لأعمار مجموعة من الأشخاص هو (٤٢) سنه والانحراف المعياري لها (٤)، فجد العمر الذي ينحرف انحرافين معيارين تحت الوسط الحسابي.

مثال١١٥: في توزيع تكراري، إذا كانت العلامة الخام (٧٨) تقابل العلامة المعيارية (٣) وكان المتوسط الحسابي للتوزيع يساوي (٦٠)، فجد الانحراف المعياري للتوزيع.

مثال١١٦: في توزيع تكراري، إذا كانت العلامة الخام (٦٨) تقابل العلامة المعيارية (٠.٥)، وكان الوسط الحسابي (٦٥)، جد الانحراف المعياري للتوزيع.

مثال١١٧: إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة مشاهدات يساوي (١)، وكانت المشاهدة (١٢) تقابل العلامة المعيارية (٢)، فجد المتوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

مثال١١٨: جد قيمة المتوسط الحسابي لعلامات طلبة في مادة اللغة الانجليزية، علماً بأن الانحراف المعياري للعلامات (٤)، وعلامة هديل (٨٥) تنحرف فوق هذا المتوسط بمقدار ($٤\frac{١}{٤}$) انحراف معياري.

العلامة المعيارية

مثال١١٩: إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب صف ما في مادة الكيمياء (٦٠)، والانحراف المعياري للعلامات (٣)، فجد العلامة المعيارية لعلامة الطالب ساهر الذي نال علامة (٧٢)، والعلامة المعيارية للطالب مهند الذي نال علامة (٥٤).

مثال١٢٠: إذا علمت أن المتوسط الحسابي لأطوال طالبات هو (١٦٠) سم، وأن الانحراف المعياري لأطوالهن (٤)، فجد:

أ) الطول الذي ينحرف فوق المتوسط ثلاثة انحرافات معيارية.

ب) الطول الذي ينحرف تحت المتوسط انحرافين معياريين وربع انحراف معياري.

مثال١٢١: الجدول التالي يبين العلامات المعيارية لطالب في أربعة مباحث، ما المبحث الذي يكون تحصيل الطالب فيه أفضل ؟

المبحث	الرياضيات	التاريخ	الجغرافيا	اللغة العربية
العلامة	١	صفر	-٣	٢

مثال١٢٢: إذا كان الوسط الحسابي لأعمار أشخاص يساوي (٤٥) عاماً والانحراف المعياري لهم (٤) أعوام، أجب عما يأتي:

أ) جد العمر الذي ينحرف انحرافين معيارين فوق الوسط الحسابي.

ب) إذا كان الفرق بين عمري شخصين من المجموعة نفسها (١٠) سنوات، فما الفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهذين العمرين ؟

مثال١٢٣: إذا كان الوسط الحسابي لعلامات طلبة في أحد الصفوف في مادة العلوم (٦٠) والانحراف المعياري لها (٦)، أجب عما يأتي:

أ) جد العلامة التي تنحرف انحرافين معيارين فوق الوسط الحسابي.

ب) إذا كان الفرق بين علامتي طالبين من الصف نفسه في مادة العلوم (٩)، فما الفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهاتين العلامتين.

العلامة المعيارية

مثال١٢٤: إذا كان الوسط الحسابي لاختبار الرياضيات هو (٧٢)، وانحرافه المعياري (١٢)، وكان الوسط الحسابي لاختبار الفيزياء (٦٥)، والانحراف المعياري له (١٠)، وحصل طالب على العلامة (٧٥) في الرياضيات، و (٧٢) في الفيزياء،
في أي المادتين كان التحصيل أفضل ؟

مثال١٢٥: صف مكون من (٢٠) طالب وكانت علامة الطلاب محمد، أحمد، مروان هي: (٩٠، ٨٠، س) على الترتيب، والعلامات المعيارية لهم هي: (٣، ٢، −١)، فما علامة مروان ؟

مثال١٢٦: إذا كانت علامتا طالبين من الصف نفسه في مبحث اللغة العربية (٩٠، ٧٥)، والعلامتان المعياريتان المقابلتان لهاتين العلامتين هما (٢، −١) على الترتيب، فجد الانحراف المعياري لعلامات الطلبة في مبحث اللغة العربية في هذا الصف.

العلامة المعيارية

مثال١٢٧: إذا كانت المشاهدتان (٨٤، ٧٢) تقابلان العلامتين المعياريتين (١، -٢) على الترتيب،
فجد العلامة المعيارية للمشاهدة (٩٠).

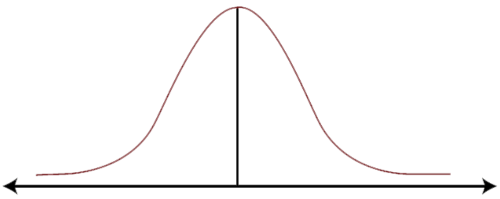
مثال١٢٨: إذا كانت العلامتان (٣٢، ١٢) تقابلان العلامتين المعياريتين (٣، -٣) على الترتيب،
فجد قيمة المتوسط الحسابي، والانحراف المعياري.

التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي: منحنى يصف كل ظاهرة في الطبيعة، حيث كل ظاهرة في الطبيعة تتوزع توزيعاً طبيعياً.
وهو مفهوم يستخدم في حالات التعامل مع العينات الكبيرة في المجتمع، من خلال منحنى توزيع صغير يصف هذا المجتمع.

خصائص التوزيع الطبيعي

- التوزيع متماثل من الوسط. **(تتمركز أكثر القيم دائماً حول الوسط)**
- التوزيع يشبه شكل الجرس ويقسم لقسمين متساويين. **(٥٠% على اليمين و٥٠% على اليسار)**
- التوزيع الطبيعي يتعامل فقط مع القيم المعيارية. (ز)
- **المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد،** وهي تمثل مجموع الاحتمالات. $\sum$ ل(س) = ١
- في التوزيع الطبيعي يكون (الوسط = الوسيط = المنوال)
- **الوسط الحسابي = صفر**
- **الانحراف المعياري = ١**



الفائدة الفعلية من دراسة التوزيع الطبيعي

حساب المساحة تحت المنحنى، وهذه القيمة تمثل قيمة الاحتمال المطلوبة، ومن خلال جدول التوزيع الطبيعي يمكن لنا حساب المساحة من جهة اليسار فقط، **ولذلك نحن بحاجة لطرق معالجة قبل أن نأخذ القيمة من الجدول.**

طرق معالجة اللازمة لإيجاد قيمة الاحتمال (المساحة تحت المنحنى)

- ل(ز ≤ أ)، نجد القيمة مباشرة من الجدول، **يجب أن تكون الجملة على الشكل (العلامة المعيارية أقل أو يساوي).**
- ل(ز ≥ −أ)، نحول الجملة إلى ل(ز ≤ أ)، وذلك بعكس إشارة التباين وعكس إشارة السالب.
- ل(ز ≥ أ)، نحول الجملة لـ ١ − ل(ز ≤ أ)،
  نجد القيمة من الجدول ونطرحها من **العدد واحد**
- ل(ز ≤ −أ)، نحول الجملة لـ ١ − ل(ز ≤ أ)،
  نجد القيمة من الجدول ونطرحها من **العدد واحد**
- ل(أ ≤ ز ≤ ب)، نحول الجملة لـ ل(ز ≤ ب) − ل(ز ≤ أ)،
  نفصل الجملة لجملتين، وقد نحتاج لمعالجة إضافية حسب حال الجملة.

التوزيع الطبيعي

مثال١٢٩: إذا كانت أطوال طلبة في إحدى المدارس تتبع توزيعاً طبيعياً، متوسطة الحسابي (١٦٠) سم، وانحرافه المعياري (١٠)، اختير طالب عشوائياً، ما احتمال أن يكون طوله (١٥٥) سم على الأقل ؟

مثال١٣٠: تتبع علامات طلبة في امتحان عام توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي (٧٢)، وانحرافه المعياري (٦)، إذا اختير طالب عشوائياً، فما احتمال أن تكون علامته أقل من أو يساوي (٧٨).

مثال١٣١: تتوزع أوزان (١٠٠٠) صناديق الموز عند التعبئة توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي (٥) كغم، وانحرافه المعياري (٠.٥) جد عدد الصناديق التي يقل وزنها عن (٤.٥) كغم.

مثال١٣٢: تتبع معدلات طلبة في إحدى الجامعات الأردنية توزيعاً طبيعياً، متوسطة الحسابي يساوي (٦٠)، وانحرافه المعياري (١٠)، إذا اختير طالب عشوائياً، فما احتمال أن يكون معدله أكبر من أو يساوي (٧٥).

مثال١٣٣: تقدم لامتحان الثانوية العامة في إحدى السنوات (٢٠٠٠) طالب من طلبة أحد الفروع المهنية، وكانت علاماتهم تتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (٥٧) وانحراف معياري (١٦). إذا علمت أنه لا يسمح للطالب الذي معدله أقل من (٦٥) بتقديم طلبات للجامعات الحكومية.
جد عدد طلبة ذلك الفرع الذي يحق لهم تقديم تلك الطلبات.

مثال١٣٤: إذا كانت أوزان (١٠٠٠٠) طالب تتبع التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (٤٥) كغم وانحراف معياري (٤) كغم، ما عدد الطلبة الذين تزيد أوزانهم عن (٥٠) كغم ؟

التوزيع الطبيعي

مثال١٣٥: تتخذ أوزان (٢٠٠٠٠) شخص شكل التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (٧٥) كغم، وانحراف معياري (٥) كغم، جد عدد الأشخاص الذين تقل أوزانهم عن (٧٢) كغم.

مثال١٣٦: إذا كانت أوزان الأطفال عند الولادة تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي (٣.٢) كغم وانحرافه المعياري (٠.٤) كغم.
اختير أحد الأطفال عشوائياً عند الولادة،
ما احتمال أن يكون وزنه أكثر من (٤) كغم ؟

مثال١٣٧: تقدم (٥٠٠٠) طالب لامتحان ما، وكان توزيع نتائجهم يتخذ شكل التوزيع الطبيعي المعياري، لوسط حسابي (٧٠) وانحراف معياري (٥)، وكانت علامة النجاح (٦٠).
اختير أحد الطلبة عشوائياً:

١) ما احتمال أن يكون الطالب من بين الناجحين ؟

٢) ما عدد الطلبة الناجحين في هذا الامتحان ؟

مثال١٣٨: إذا كانت علامات امتحان عام تتبع توزيعاً طبيعياً، متوسطة الحسابي (٧٠)، وانحرافه المعياري (١٠)، فما نسبة العلامات التي تقل عن (٦٥).

التوزيع الطبيعي

مثال١٣٩: إذا كانت أوزان (١٠٠٠٠) طالب تتبع توزيعاً طبيعياً، وسطه الحسابي (٤٨) كغم، وانحرافه المعياري (٣) كغم.
ما عدد الطلبة الذين تنحصر أوزانهم بين (٤٢) كغم و (٥١) كغم ؟

مثال١٤٠: إذا كانت رواتب (١٠٠٠٠) موظف في إحدى الوزارات تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، بوسط حسابي (٣٠٠) دينار شهرياً، وانحراف معياري (١٠) دنانير، فما عدد الموظفين الذين تنحصر رواتبهم بين (٢٨٠) ديناراً و (٣٢٠) ديناراً ؟

مثال١٤١: يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في إحدى الجامعات وعددهم (٦٠٠) طالباً لتوزيع طبيعي، وسطه الحسابي (١٠٨) وانحرافه المعياري (١٠)، فما عدد الطلبة الذين ينحصر معامل ذكائهم بين (١٠٣) و (١١٨) ؟

مثال١٤٢: درجة الحرارة خلال شهر نيسان تتوزع توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي قدره (٢٥) درجة مئوية، وانحراف معياري قدره (٤) درجات مئوية، اختير أحد أيام هذا الشهر بشكل عشوائي، ما هو احتمال أن تكون درجة حرارة هذا اليوم تتراوح بين (٢٠) و (٣٠) درجة مئوية.

التوزيع الطبيعي

مثال١٤٣: إذا كان متوسط معدل (١٠٠٠) طالبة في إحدى مدارس عمان (٨٠)، والانحراف المعياري (٥)، وكانت هذه المعدلات تتوزع توزيعاً طبيعياً، واختيرت إحدى الطالبات عشوائياً، فجد:

أ) احتمال أن لا يزيد معدل الطالبة على (٧٥).

ب) احتمال أن يكون معدل الطالبة محصوراً بين (٧٠) و (٩٠).

ج) عدد الطالبات اللواتي يزيد معدلهن على (٧٠).

مثال١٤٤: تقدم لامتحان عام (١٠٠٠) طالب، وكانت النتائج تتوزع توزيعاً طبيعياً، بوسط حسابي (٦٨)، وانحراف معياري (٨).

أ) ما عدد الطلاب الحاصلين على علامة تزيد عن (٧٢).

ب) إذا اعتمدت العلامة (٦٠) علامة النجاح للطالب، فما النسبة المئوية للنجاح.

التوزيع الطبيعي

مثال١٤٥: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (١٠) وانحراف معياري (١) فجد:

١) قيمة (أ) حيث ل(ز ≤ أ) = ٠.٠٢٢٨

٢) ل(س ≥ ١١)

مثال١٤٦: إذا كان (س) متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (١٢) وانحراف معياري (٢) فجد:

١) قيمة (أ) حيث ل(ز < أ) = ٠.١٥٨٧

٢) ل(س ≥ ١٦)

مثال١٤٧: إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي للعلامات (٥٨)، والانحراف المعياري لها يساوي (١٠)، وكان عدد الطلبة الناجحين (٦١٧٩) طالباً، فما علامة النجاح ؟

مثال١٤٨: إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي وكان الوسط الحسابي للعلامات (٦٢)، والانحراف معياري لها (١٠)، وكان عدد الطلبة الناجحين (٥٧٩٣) طالباً، فما علامة النجاح ؟

مثال١٤٩: إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالب تتخذ شكل التوزيع الطبيعي، وكان الوسط الحسابي للعلامات يساوي (٥٥) والانحراف المعياري يساوي (١٠)، وكان عدد الناجحين (٥٣٩٨) طالباً، فما علامة النجاح ؟

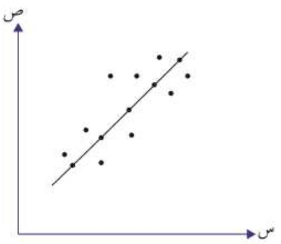
الارتباط (معامل بيرسون)

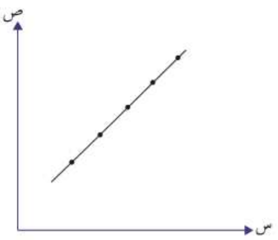
الارتباط (معامل ارتباط بيرسون): هي العلاقة بين المتغير (س) والمتغير (ص)، حيث تتغير قيم (ص) كلما تغيرت قيم (س).
ويعبر عن ذلك من خلال ص = ق(س) وينتج عن ذلك مجموعة من الأزواج المرتبة (س،ص).

وكل علاقة لها **نوع علاقة** و**قوة علاقة**.

أنواع العلاقات

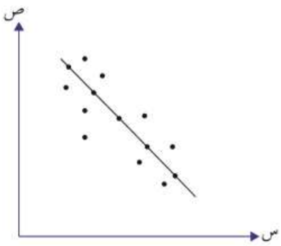
١) **طردية موجبة أو (طردي تام):** إذا ازدادت قيم (س) يزداد معها قيم (ص) بنفس الاتجاه.

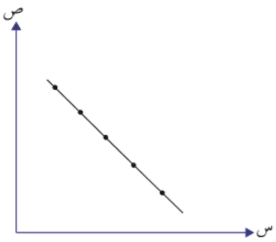




يوجد **علاقة طردية** بين عدد ساعات الدراسة (س) والتحصيل الأكاديمي (ص)

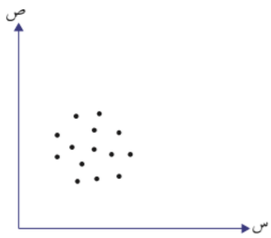
٢) **عكسية سالبة أو (عكسي تام):** إذا ازدادت قيم (س) يقل معها قيم (ص) بعكس الاتجاه.





يوجد **علاقة عكسية** بين سرعة السيارة (س) وزمن الوصول إلى المكان (ص)

٣) **لا يوجد علاقة:** تشتت في قيم (س) وقيم (ص)، حيث أن التزايد والتناقص غير منتظم لقيم (س) و (ص).



لا يوجد علاقة بين لون العيون (س) والذكاء المنطقي الرياضي (ص)

قوة العلاقة: قيمة محصورة ضمن الفترة [-١،١]، ويرمز لقيمة قوة العلاقة بالرمز (ر).

١) **تامة** (قيمتها أما ١ أو -١)
٢) **قوية** (قيمتها من ±٠,٧ إلى ±٠,٩)
٣) **وسط** (قيمتها من ±٠,٤ – ±٠,٦)
٤) **ضعيفة** (قيمتها من ±٠,١ – ±٠,٣)
٥) **لا يوجد علاقة** (قيمتها صفر)

الارتباط (معامل بيرسون)

طرق ايجاد معامل ارتباط بيرسون (ر)

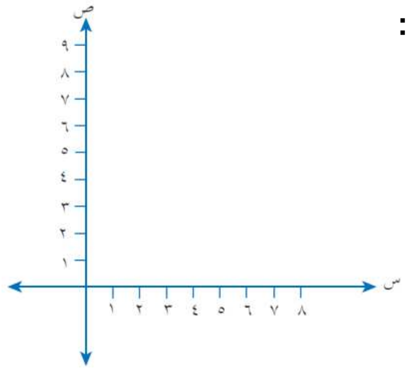
١) **من خلال الرسم** (دراسة شكل انتشار قيم س و ص).
٢) **من خلال الحساب** (استخدام قانون بيرسون).

ايجاد معامل ارتباط بيرسون من خلال شكل الانتشار

مثال١٥٠: يبين الجدول الآتي علامات طلاب في امتحان قصير لمادة الرياضيات والجغرافيا:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
علامة الرياضيات (س)	٧	٦	٥	١	٢
علامة الجغرافيا (ص)	٢	١	٥	٦	٧

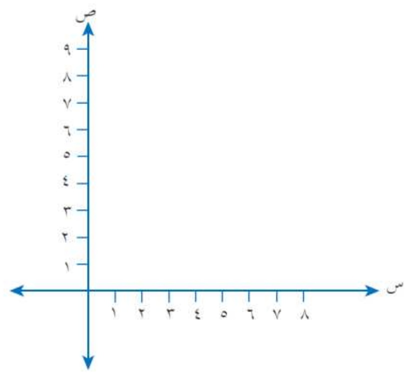
ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: (س،ص) محدداً نوع العلاقة التي تربط بينهما.



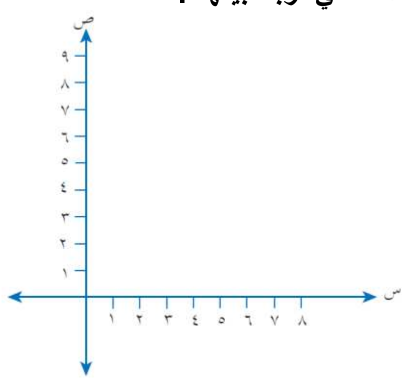
مثال١٥١: يبين الجدول الآتي قيم لـ (س)،(ص):

	١	٢	٣	٤	٥
(س)	-١	٠	١	٢	٣
(ص)	-١	٠	١	٢	٣

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين: (س،ص) محدداً نوع العلاقة التي تربط بينهما.



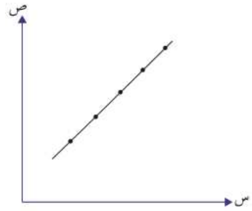
مثال١٥٢: النقط (١،٣)، (٢،١)، (٢،٥)، (٣،٢)، (٣،٣)، (٣،٥)، (٤،١)، (٤،٣)
تمثل القيم المتناظرة لمتغيرين. ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين (س،ص) محدداً نوع العلاقة التي تربط بينهما.



الارتباط (معامل بيرسون)

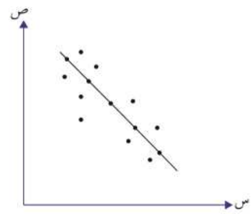
مثال١٥٣: من خلال الأشكال التالية:
حدد نوع وقيمة الارتباط بين (س)،(ص)

١)



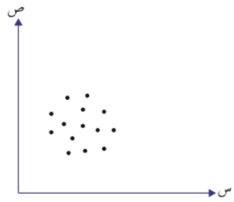
نوع العلاقة:
قوة العلاقة:

٢)



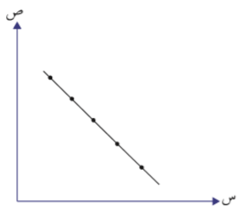
نوع العلاقة:
قوة العلاقة:

٣)



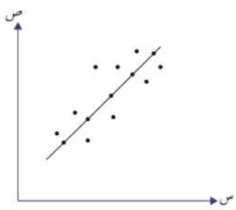
نوع العلاقة:
قوة العلاقة:

٤)



نوع العلاقة:
قوة العلاقة:

٥)



نوع العلاقة:
قوة العلاقة:

ايجاد معامل الارتباط من خلال استخدام قانون بيرسون

معامل ارتباط بيرسون $\text{ر} = \dfrac{\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ي} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})^{٢} \times \sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} (\text{ص}_\text{ي} - \bar{\text{ص}})^{٢}}}$

مثال١٥٤: إذا كان (س،ص) متغيرين وعدد قيم كل منها (٨)،
وكان: $\sum_{\text{ي}=1}^{٨} (\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})^{٢} = ٤٩$، $\sum_{\text{ي}=1}^{٨} (\text{ص}_\text{ي} - \bar{\text{ص}})^{٢} = ٩٠٠$
$\sum_{\text{ي}=1}^{٨} (\text{س}_\text{ي} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ي} - \bar{\text{ص}}) = ١٤٠$،
جد معامل الارتباط بين المتغيرين (س،ص)، محدداً نوع العلاقة.

مثال١٥٥: إذا كان (س،ص) متغيرين وعدد قيم كل منها (١٠)،
وكان: $\sum_{\text{ك}=1}^{١٠} (\text{س}_\text{ك} - \bar{\text{س}})^{٢} = ٣٦$، $\sum_{\text{ك}=1}^{١٠} (\text{ص}_\text{ك} - \bar{\text{ص}})^{٢} = ٨١$
$\sum_{\text{ك}=1}^{١٠} (\text{س}_\text{ك} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ك} - \bar{\text{ص}}) = -٢٧$،
أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص)، محدداً العلاقة.

مثال١٥٦: إذا كان (س،ص) متغيرين وعدد قيم كل منها (١٢)،
وكان: $\sum_{\text{ر}=1}^{١٢} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})^{٢} = ١٠٠$، $\sum_{\text{ر}=1}^{١٢} (\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}})^{٢} = ٤٩$
وكان معامل ارتباط بيرسون (ر = -٠.٤).
فجد $\sum_{\text{ر}=1}^{١٢} (\text{س}_\text{ر} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_\text{ر} - \bar{\text{ص}})$

الارتباط (معامل بيرسون)

أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

تتغير قيمة معامل ارتباط بيرسون إذا تم التعديل على قيم (س)، أو قيم (ص)، حسب المعادلة (س*) و (ص*)

فإن قيمة معامل بيرسون (ر*) تتغير حسب التالي:

١) **نعكس إشارة معامل بيرسون**، إذا كانت اشارة المعامل

- (− س) (+ ص)
- (+ س) (− ص)

٢) **لا تتغير إشارة معامل بيرسون**، إذا كانت اشارة المعامل

- (+ س) (+ ص)
- (− س) (− ص)

مثال١٥٧: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص) يساوي (٠.٩)، وعُدلت قيم كل من المتغيرين (س،ص) حسب العلاقة س* = ٢س − ٦، ص* = ٣ص − ٢، جد معامل ارتباط بيرسون الجديد.

مثال١٥٨: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص) يساوي (٠.٨)، وعُدلت قيم كل من المتغيرين (س،ص) حسب العلاقة س* = ٣س + ٢، ص* = ٢ − ٤ص، جد معامل ارتباط بيرسون المعدل.

مثال١٥٩: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص) يساوي (− ٠.٩٥)، وعُدلت قيم كل من المتغيرين (س،ص) حسب العلاقة س* = ٣ − ٢س، ص* = ٦ + ٤ص، جد (ر*)

مثال١٦٠: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص) يساوي (− ٠.٧)، وعُدلت قيم كل من المتغيرين (س،ص) حسب المعادلات التالية، فجد قيمة (ر*)

١) س* = س − ١ ، ص* = ١ − ص

٢) س* = −٢س ، ص* = ص

٣) س* = ٣س + ٢ ، ص* = ٢ص

٤) س* = ٧ − س ، ص* = −ص + ٧

٥) س* = س/٢ − ٣ ، ص* = ٢ − ص/٣

مثال١٦١: إذا كان معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين (س،ص) يساوي (٠.٦٥)، وعُدلت قيم كل من المتغيرين (س،ص) حسب المعادلات التالية، فجد قيمة (ر*)

١) س* = س ، ص* = ص − ١

٢) س* = س + ١/٢ ، ص* = ص − ١/٥

٣) س* = ٣س − ١ ، ص* = ١ − ٣ص

٤) س* = −(١ − س) ، ص* = −(ص + ٢)

٥) س* = ١/٢ س + ٥ ، ص* = ٤ − ٢/٣ ص

الارتباط (معامل بيرسون)

يمكن حساب قيمة معامل ارتباط بيرسون إذا علمت قيم كلاً من (س) و (ص)، **من خلال استخدام قانون بيرسون.**
وهذه القيمة تبين أيضاً نوع وقوة العلاقة بين المتغيرين (س،ص).

قانون معامل ارتباط بيرسون $ر = \frac{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=1}^{ن}(ص_ي - \bar{ص})^2}}$

حيث أن:

(ي) : عدد المشاهدات = (١،٢،٣،...،ن)
($س_ي$) : قيم المتغير (س)
($ص_ي$) : قيم المتغير (ص)
($\bar{س}$) : الوسط الحسابي للمتغير (س)
($\bar{ص}$) : الوسط الحسابي للمتغير (ص)

مثال١٦٢: حصل (٥) طلاب في مدرسة على علاماتهم في امتحاني الرياضيات (س) والحاسوب (ص)، حيث يبين الجدول التالي علاماتهم في الامتحانين. احسب معامل ارتباط بيرسون بين علامة مادة الرياضيات وعلامة مادة الحاسوب.

علامة الرياضيات (س)	٤	٤	٦	٧	٩
علامة الحاسوب (ص)	٥	٨	٧	٩	٦

الحل:

س	ص	$س - \bar{س}$	$ص - \bar{ص}$	$(س - \bar{س})^2$	$(ص - \bar{ص})^2$	$(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})$

الارتباط (معامل بيرسون)

مثال١٦٣: البيانات الظاهرة في الجدول التالي، تبين مشاهدات لإحدى الظواهر الطبيعية، حيث يمثل المتغير (س) الظاهرة الأولى، والمتغير (ص) الظاهرة الثانية. احسب معامل ارتباط بيرسون بين الظاهرة الأولى والثانية، مبيناً نوع هذه الظواهر (نوع العلاقة).

الظاهرة الأولى (س)	٣	٤	٥	٦	٧
الظاهرة الثانية (ص)	١٠	٩	٧	٨	٦

ملاحظة: $ر = \dfrac{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})^٢ \times \sum_{ي=1}^{ن}(ص_ي - \bar{ص})^٢}}$

الحل:

مثال١٦٤: الجدول الآتي يبين بعد مؤسسة استهلاكية عن مركز المدينة بالكيلومتر (س)، وحجم مبيعات المؤسسة بالآلف دينار شهرياً (ص) لخمس مؤسسات. احسب معامل الارتباط بين المتغيرين (س،ص).

(س)	٧	٦	٢	٣	١٢
(ص)	١١	٩	٦	٨	٦

الحل:

الارتباط (معامل بيرسون)

مثال١٦٥: احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي (ر) بين المتغيرين (س،ص) في الجدول الآتي:

س	١٠	٩	١٣	١٥	٨
ص	١٠	١١	٥	٧	١٢

علماً بأن: $ر = \dfrac{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})^2 \times \sum_{ي=1}^{ن}(ص_ي - \bar{ص})^2}}$

الحل:

مثال١٦٦: يبين الجدول المجاور علامات (٥) طلاب في مبحثي الفيزياء (س) والكيمياء (ص) في امتحان قصير، النهاية العظمى له (١٠). احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين (س،ص).

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الفيزياء (س)	٢	٥	٣	٦	٤
الكيمياء (ص)	٥	٦	٣	٧	٩

الحل:

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

خط الانحدار: هي معادلة تربط علاقة واضحة بين المتغير $(س)$ والمتغير $(ص)$،
وتستخدم هذه المعادلة في التنبؤ بقيم $(ص)$ إذا علمت قيم $(س)$. **ويعبر عن المعادلة بالشكل التالي:**

$$\hat{ص} = أس + ب$$

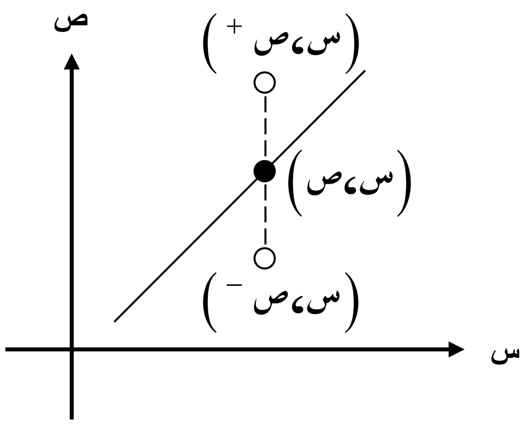
حيث $أ = \dfrac{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص})}{\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي - \bar{س})^2}$ 	$ب = \bar{ص} - أ\bar{س}$

قد لا يكون التنبؤ دقيق لذلك يمكن معرفة مقدار الخطأ في التنبؤ (الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة المتنبأ بها)، **من خلال المعادلة التالية:**

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية $(ص)$ - القيمة المتنبأ بها $(\hat{ص})$

وينتج عن ذلك قيمة تعبر عن نوع الخطأ، وهي على الشكل التالي:

- **خطأ موجب:** إذا كان $\left(ص > \hat{ص}\right)$، النقطة تقع فوق الخط المستقيم للتنبؤ.
  (وهذا يعني أن تنبؤ الشخص كان فوق المتوقع)
- **خطأ صفري:** إذا كان $\left(ص = \hat{ص}\right)$، النقطة على الخط المستقيم للتنبؤ.
  (وهذا يعني أن تنبؤ الشخص كان ضمن المتوقع)
- **خطأ سالب:** إذا كان $\left(ص < \hat{ص}\right)$، النقطة تقع تحت الخط المستقيم للتنبؤ.
  (وهذا يعني أن تنبؤ الشخص كان دون أو تحت المتوقع)



مثال١٦٧: إذا كان $(س،ص)$ متغيرين عدد قيم كل منهما (٦)، وكان: $\sum_{ي=1}^{٦}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص}) = ٧٠$ ، $\sum_{ي=1}^{٦}(س_ي - \bar{س})^{٢} = ٣٥$ ، $(\bar{س} = ٦)$،$(\bar{ص} = ١٠)$،

فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم $(ص)$ إذا علمت $(س)$.

مثال١٦٨: إذا كان $(س،ص)$ متغيرين عدد قيم كل منها (٥)، وكان: $\sum_{ي=1}^{٥}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص}) = ١٥$ ، $\sum_{ي=1}^{٥}(س_ي - \bar{س})^{٢} = ٢٥$ ، $(\bar{س} = ٤)$،$(\bar{ص} = ٥)$،

فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم $(ص)$ إذا علمت $(س)$.

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

مثال ١٦٩: إذا كان (س،ص) متغيرين عدد قيم كل منها (١٠)،

وكان: $\sum_{ك=1}^{10}(س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص}) = 80$ ،

$\sum_{ك=1}^{10}(س_ك - \bar{س})^2 = 4$ ، $(\bar{س} = 6)$، $(\bar{ص} = 13)$،

فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت (س).

مثال ١٧٠: إذا كان (س،ص) يمثلان علامات (٦) طلاب

في مادة التاريخ والجغرافيا، وكان $(\bar{س} = 6)$، $(\bar{ص} = 8)$،

$\sum_{ي=1}^{6}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص}) = 9$، $\sum_{ي=1}^{6}(س_ي - \bar{س})^2 = 27$،

فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت (س).

مثال ١٧١: إذا كان (س،ص) متغيرين عدد قيم كل منها (٥)،

وكان: $\sum_{ك=1}^{5}(س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص}) = 50$،

$\sum_{ك=1}^{5}(س_ك - \bar{س})^2 = 10$ ، $(\bar{س} = 4)$، $(\bar{ص} = 20)$،

فجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا علمت (س).

مثال ١٧٢: إذا كان عدد المشاهدات (١٠)،

$\sum_{ي=1}^{10}(س) = 100$، $\sum_{ي=1}^{10}(ص) = 120$،

$\sum_{ي=1}^{10}(س_ي - \bar{س})^2 = 100$، $(أ = 0.8)$،

أ) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ.

ب) قدّر قيمة (ص) عندما (س = ٣).

مثال ١٧٣: إذا كان عدد المشاهدات (٥)، $\sum_{ي=1}^{5}(س) = 45$،

$\sum_{ي=1}^{5}(ص) = 50$، $\sum_{ي=1}^{10}(س_ي - \bar{س})^2 = 100$ ،

$\sum_{ي=1}^{5}(س_ي - \bar{س})(ص_ي - \bar{ص}) = 25$

أ) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ.

ب) قدّر قيمة (ص) عندما (س = ٤).

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

مثال١٧٤: إذا كانت معادلة خط الانحدار للعلاقة بين معدّل طالب في الثانوية (س)، ومعدله في الجامعة (ص) هي : $\hat{ص} = ١.٤س - ٣٥$ فتنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة (٨٥).

مثال١٧٥: إذا كان (س،ص) يمثلان متغيرين عدد قيم كل منهما (٥)، وكان: $(\bar{س} = ٦)$، $(\bar{ص} = ٨٠)$، $(أ = ٢)$، جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص)، إذا عُلمت (س).

مثال١٧٦: إذا كانت معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص} = أس + ب$، وكانت: $(\bar{س} = ٦٠)$، $(\bar{ص} = ٧٥)$، $(ب = ١٥)$، جد قيمة (أ).

مثال١٧٧: إذا كانت معادلة خط الانحدار لعلامات مادة الفيزياء (ص) وعلامات مادة الرياضيات (س) هي: $\hat{ص} = \frac{١}{٢}س + ٥$، فإذا كانت الطالب في الرياضيات (٩٠)، فجد علامة الطالب في مادة الفيزياء.

مثال١٧٨: إذا كانت معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد سنوات الخبرة (س) والأجر اليومي (ص) هي: $\hat{ص} = ١.٥س + ٧$، فما الأجر اليومي (بالدينار) المتوقع لشخص لدية خبرة (١٠) سنوات ؟

مثال١٧٩: حدد كلاً من قيمة (أ) و(ب) للمعادلات الانحدار التالية:

١) $\hat{ص} = ٢ - ٣س$

٢) $\hat{ص} = ٥س - ٦$

٣) $\hat{ص} = \frac{س}{٢} + ٣$

٤) $\hat{ص} = ٥ - س$

٥) $\hat{ص} = س$

٦) $\hat{ص} = ٧$

مثال١٨٠: إذا كانت $\hat{ص} = ٢س + ٥٣$، فما قيمة كل من (أ،ب) ؟

مثال١٨١: إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين قيمة رأس المال (س) والأرباح السنوية لشركة بالألف دينار (ص) هي: $\hat{ص} = ٠.٣س + ١٠١$، فجد الخطأ في التنبؤ بأرباح شركة رأس مالها (٦٠) ألف دينار، وأرباحها السنوية (٢٧.٤) ألف دينار.

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

مثال١٨٢: إذا علمت أن معادلة خط الانحدار للعلاقة بين عدد ساعات العمل اليومي (س)، وعدد الأخطاء التي يرتكبها الموظف في اليوم (ص) هي : $\hat{ص} = ٠.٦س + ١$، فأجب عما يأتي:

١) تنبأ بعدد الأخطاء التي سيرتكبها موظف يعمل (١٠) ساعات يومياً.

٢) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (١٥) ساعة يومياً هي (٦) أخطاء، فجد الخطأ في التنبؤ.

مثال١٨٣: في دراسة أجراها أحد طلبة الدراسات العليا توصل إلى معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة (س)، والمعدل التحصيلي (ص)، لطلبة إحدى الجامعات فكانت:

$\hat{ص} = ٥٣ + ٥س$، معتمداً على هذه على معادلة خط الانحدار، أجب عن الأسئلة الآتية:

١) جد أ،ب.

٢) قدّر معدل طالب إذا كانت ساعات الدراسة اليومية له (٤) ساعات.

٣) إذا كان معدل طالب درس (٧) ساعات يومياً هو (٩١)، جد الخطأ في التنبؤ.

مثال١٨٤: إذا كان (س،ص) يمثلان متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان: $(\bar{س} = ٥)$، $(\bar{ص} = ٧٥)$، $(أ = ٣)$

١) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص) إذا عُلمت قيمة (س).

٢) جد الخطأ في التنبؤ إذا كانت (س = ٨)، وقيمة(ص) الحقيقية المناظرة لها (٨٢).

مثال١٨٥: إذا كانت معادلة خط الانحدار البسيط للعلاقة بين عدد ساعات الدراسة اليومية (س)، والمعدل التحصيلي (ص) لطلبة إحدى الجامعات هي: $\hat{ص} = ٥س + ٤٢$، معتمداً على هذه المعادلة جد الخطأ في التنبؤ، لطالب درس (٩) ساعات يومياً، وحصل على معدل (٨٣).

مثال١٨٦: إذا كان (س،ص) يمثلان متغيرين عدد قيم كل منهما (٥) وكان: $(\bar{س} = ٧)$، $(\bar{ص} = ٥)$، $(أ = ٢)$

١) جد معادلة خط الانحدار الخطي البسيط للتنبؤ بقيم (ص)، إذا عُلمت قيمة (س).

٢) جد الخطأ في التنبؤ إذا كانت (س = ٧)، وقيمة (ص = ٥).

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

مثال١٨٧: الجدول الآتي يبين علامات امتحان الشهر الأول وامتحان الشهر الثاني لخمسة طلاب.

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
الامتحان الأول (س)	٨	٤	٥	٧	٦
الامتحان الثاني (ص)	٨	٥	٦	٤	٧

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بعلامة الشهر الثاني إذا عُلمت علامة الشهر الأول.

ب) هل يستطيع المعلم التنبؤ بعلامة الشهر الثاني لطالب حصل على (٩) علامات في الشهر الأول ؟

ج) جد الخطأ في التنبؤ لطالب حصل على (٣) علامات في الشهر الأول و (٤) علامات في الشهر الثاني.

الحل:

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

مثال١٨٨: الجدول الآتي يبين معدل أربعة طلاب في امتحانات الثانوية العامة والجامعة:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤
معدل الثانوية العامة (س)	٦٥	٧٠	٨٠	٨٥
معدل الجامعة (ص)	٦٠	٦٠	٧٠	٩٠

أجب عما يأتي:

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بمعدل الجامعة إذا علمت معدله في الثانوية العامة.

ب) تنبأ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة (٨٥)

ج) جد الخطأ في التنبؤ بمعدل طالب في الجامعة إذا كان معدله في الثانوية العامة (٧٠)

الحل:

خط الانحدار (معادلة خط الانحدار البسيط)

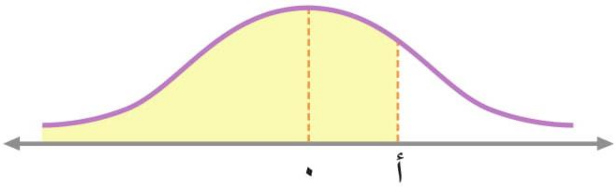
مثال١٨٩: الجدول الآتي يبين القيم المتناظرة للمتغيرين (س،ص)

(س)	١	٢	٤	٥
(ص)	٥	٦	٧	١٠

أ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة (ص) إذا عُلمت قيمة (س).
ب) تنبأ بقيمة (ص) إذا كان (س = ١٤)
ج) جد الخطأ في التنبؤ بقيمة (ص) إذا كان (س = ٤)

الحل:

جدول التوزيع الطبيعي



أ	٠٫٠٠	٠٫٠١	٠٫٠٢	٠٫٠٣	٠٫٠٤	٠٫٠٥	٠٫٠٦	٠٫٠٧	٠٫٠٨	٠٫٠٩
٠٫٠	٠٫٥٠٠٠	٠٫٥٠٤٠	٠٫٥٠٨٠	٠٫٥١٢٠	٠٫٥١٦٠	٠٫٥١٩٩	٠٫٥٢٣٩	٠٫٥٢٧٩	٠٫٥٣١٩	٠٫٥٣٥٩
٠٫١	٠٫٥٣٩٨	٠٫٥٤٣٨	٠٫٥٤٧٨	٠٫٥٥١٧	٠٫٥٥٥٧	٠٫٥٥٩٦	٠٫٥٦٣٦	٠٫٥٦٧٥	٠٫٥٧١٤	٠٫٥٧٥٣
٠٫٢	٠٫٥٧٩٣	٠٫٥٨٣٢	٠٫٥٨٧١	٠٫٥٩١٠	٠٫٥٩٤٨	٠٫٥٩٨٧	٠٫٦٠٢٦	٠٫٦٠٦٤	٠٫٦١٠٣	٠٫٦١٤١
٠٫٣	٠٫٦١٧٩	٠٫٦٢١٧	٠٫٦٢٥٥	٠٫٦٢٩٣	٠٫٦٣٣١	٠٫٦٣٦٨	٠٫٦٤٠٦	٠٫٦٤٤٣	٠٫٦٤٨٠	٠٫٦٥١٧
٠٫٤	٠٫٦٥٥٤	٠٫٦٥٩١	٠٫٦٦٢٨	٠٫٦٦٦٤	٠٫٦٧٠٠	٠٫٦٧٣٦	٠٫٦٧٧٢	٠٫٦٨٠٨	٠٫٦٨٤٤	٠٫٦٨٧٩
٠٫٥	٠٫٦٩١٥	٠٫٦٩٥٠	٠٫٦٩٨٥	٠٫٧٠١٩	٠٫٧٠٥٤	٠٫٧٠٨٨	٠٫٧١٢٣	٠٫٧١٥٧	٠٫٧١٩٠	٠٫٧٢٢٤
٠٫٦	٠٫٧٢٥٧	٠٫٧٢٩١	٠٫٧٣٢٤	٠٫٧٣٥٧	٠٫٧٣٨٩	٠٫٧٤٢٢	٠٫٧٤٥٤	٠٫٧٤٨٦	٠٫٧٥١٧	٠٫٧٥٤٩
٠٫٧	٠٫٧٥٨٠	٠٫٧٦١١	٠٫٧٦٤٢	٠٫٧٦٧٣	٠٫٧٧٠٤	٠٫٧٧٣٤	٠٫٧٧٦٤	٠٫٧٧٩٤	٠٫٧٨٢٣	٠٫٧٨٥٢
٠٫٨	٠٫٧٨٨١	٠٫٧٩١٠	٠٫٧٩٣٥	٠٫٧٩٦٧	٠٫٧٩٩٥	٠٫٨٠١٣	٠٫٨٠٥١	٠٫٨٠٧٨	٠٫٨١٠٦	٠٫٨١٣٣
٠٫٩	٠٫٨١٥٩	٠٫٨١٨٦	٠٫٨٢١٢	٠٫٨٢٣٨	٠٫٨٢٦٤	٠٫٨٢٨٩	٠٫٨٣١٥	٠٫٨٣٤٠	٠٫٨٣٦٥	٠٫٨٣٨٩
١٫٠	٠٫٨٤١٣	٠٫٨٤٣٨	٠٫٨٤٦١	٠٫٨٤٨٥	٠٫٨٥٠٨	٠٫٨٥٣١	٠٫٨٥٥٤	٠٫٨٥٧٧	٠٫٨٥٩٩	٠٫٨٦٢١
١٫١	٠٫٨٦٤٣	٠٫٨٦٦٥	٠٫٨٦٨٦	٠٫٨٧٠٨	٠٫٨٧٢٩	٠٫٨٧٤٩	٠٫٨٧٧٠	٠٫٨٧٩٠	٠٫٨٨١٠	٠٫٨٨٣٠
١٫٢	٠٫٨٨٤٩	٠٫٨٨٦٩	٠٫٨٨٨٨	٠٫٨٩٠٧	٠٫٨٩٢٥	٠٫٨٩٤٤	٠٫٨٩٦٢	٠٫٨٩٨٠	٠٫٨٩٩٧	٠٫٩٠١٥
١٫٣	٠٫٩٠٣٢	٠٫٩٠٤٩	٠٫٩٠٦٦	٠٫٩٠٨٢	٠٫٩٠٩٩	٠٫٩١١٥	٠٫٩١٣١	٠٫٩١٤٧	٠٫٩١٦٢	٠٫٩١٧٧
١٫٤	٠٫٩١٩٢	٠٫٩٢٠٧	٠٫٩٢٢٢	٠٫٩٢٣٦	٠٫٩٢٥١	٠٫٩٢٦٥	٠٫٩٢٧٩	٠٫٩٢٩٢	٠٫٩٣٠٦	٠٫٩٣١٩
١٫٥	٠٫٩٣٣٢	٠٫٩٣٤٥	٠٫٩٣٥٧	٠٫٩٣٧٠	٠٫٩٣٨٢	٠٫٩٣٩٤	٠٫٩٤٠٦	٠٫٩٤١٨	٠٫٩٤٢٩	٠٫٩٤٤١
١٫٦	٠٫٩٤٥٢	٠٫٩٤٦٣	٠٫٩٤٧٤	٠٫٩٤٨٤	٠٫٩٤٩٥	٠٫٩٥٠٥	٠٫٩٥١٥	٠٫٩٥٢٥	٠٫٩٥٣٥	٠٫٩٥٤٥
١٫٧	٠٫٩٥٥٤	٠٫٩٥٦٤	٠٫٩٥٧٣	٠٫٩٥٨٢	٠٫٩٥٩١	٠٫٩٥٩٥	٠٫٩٦٠٨	٠٫٩٦١٦	٠٫٩٦٢٥	٠٫٩٦٣٣
١٫٨	٠٫٩٦٤١	٠٫٩٦٤٩	٠٫٩٦٥٦	٠٫٩٦٦٤	٠٫٩٦٧١	٠٫٩٦٧٨	٠٫٩٦٨٦	٠٫٩٦٩٣	٠٫٩٦٩٩	٠٫٩٧٠٦
١٫٩	٠٫٩٧١٣	٠٫٩٧١٩	٠٫٩٧٢٦	٠٫٩٧٣٢	٠٫٩٧٣٨	٠٫٩٧٤٤	٠٫٩٧٥٠	٠٫٩٧٥٦	٠٫٩٧٦١	٠٫٩٧٦٧
٢٫٠	٠٫٩٧٧٢	٠٫٩٧٧٨	٠٫٩٧٨٣	٠٫٩٧٨٨	٠٫٩٧٩٣	٠٫٩٧٩٨	٠٫٩٨٠٣	٠٫٩٨٠٨	٠٫٩٨١٢	٠٫٩٨١٧
٢٫١	٠٫٩٨٢١	٠٫٩٨٢٦	٠٫٩٨٣٠	٠٫٩٨٣٤	٠٫٩٨٣٨	٠٫٩٨٤٢	٠٫٩٨٤٦	٠٫٩٨٥٠	٠٫٩٨٥٤	٠٫٩٨٥٧
٢٫٢	٠٫٩٨٦١	٠٫٩٨٦٤	٠٫٩٨٦٨	٠٫٩٨٧١	٠٫٩٨٧٥	٠٫٩٨٧٨	٠٫٩٨٨١	٠٫٩٨٨٤	٠٫٩٨٨٧	٠٫٩٨٩٠
٢٫٣	٠٫٩٨٩٣	٠٫٩٨٩٦	٠٫٩٨٩٨	٠٫٩٩٠١	٠٫٩٩٠٤	٠٫٩٩٠٦	٠٫٩٩٠٩	٠٫٩٩١١	٠٫٩٩١٣	٠٫٩٩١٦
٢٫٤	٠٫٩٩١٨	٠٫٩٩٢٠	٠٫٩٩٢٢	٠٫٩٩٢٥	٠٫٩٩٢٧	٠٫٩٩٢٩	٠٫٩٩٣١	٠٫٩٩٣٢	٠٫٩٩٣٤	٠٫٩٩٣٦
٢٫٥	٠٫٩٩٣٨	٠٫٩٩٤٠	٠٫٩٩٤١	٠٫٩٩٤٣	٠٫٩٩٤٥	٠٫٩٩٤٦	٠٫٩٩٤٨	٠٫٩٩٤٩	٠٫٩٩٥١	٠٫٩٩٥٢
٢٫٦	٠٫٩٩٥٣	٠٫٩٩٥٥	٠٫٩٩٥٦	٠٫٩٩٥٧	٠٫٩٩٥٩	٠٫٩٩٦٠	٠٫٩٩٦١	٠٫٩٩٦٢	٠٫٩٩٦٣	٠٫٩٩٦٤
٢٫٧	٠٫٩٩٦٥	٠٫٩٩٦٦	٠٫٩٩٦٧	٠٫٩٩٦٨	٠٫٩٩٦٩	٠٫٩٩٧٠	٠٫٩٩٧١	٠٫٩٩٧٢	٠٫٩٩٧٣	٠٫٩٩٧٤
٢٫٨	٠٫٩٩٧٤	٠٫٩٩٧٥	٠٫٩٩٧٦	٠٫٩٩٧٧	٠٫٩٩٧٧	٠٫٩٩٧٨	٠٫٩٩٧٩	٠٫٩٩٧٩	٠٫٩٩٨٠	٠٫٩٩٨١
٢٫٩	٠٫٩٩٨١	٠٫٩٩٨٢	٠٫٩٩٨٢	٠٫٩٩٨٣	٠٫٩٩٨٤	٠٫٩٩٨٤	٠٫٩٩٨٥	٠٫٩٩٨٥	٠٫٩٩٨٦	٠٫٩٩٨٦
٣٫٠	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٧	٠٫٩٩٨٨	٠٫٩٩٨٨	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٨٩	٠٫٩٩٩٠	٠٫٩٩٩٠
٣٫١	٠٫٩٩٩٠	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩١	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٢	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٣
٣٫٢	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٣	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٤	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥
٣٫٣	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٥	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٦	٠٫٩٩٩٧
٣٫٤	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٧	٠٫٩٩٩٨