الدرس الأول : التكامل غير المحدود

الاقتران الأصلي

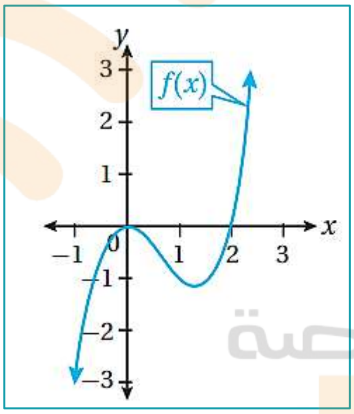
مفهوم أساسي الاقتران الأصلي

أذا كان $F(x)$ اقتراناً أصلياً للاقتران المتصل $f(x)$ فإن أي اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يكتب في صورة : $G(x) = F(x) + C$ حيث C ثابت :

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مسألة اليوم :

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، هل يمكنني تحديد قاعدة الاقتران إذا علمت أن مشتقته هي $f'(x) = 3x^2 - 4x$؟



✓ الحل

مثال1

أجد اقتراناً أصلياً لكل من الاقترانين الآتيين:

① $f(x) = 6x^5$

✓ الحل

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $6x^5$ ، أتذكر أن أس x في مشتقة اقتران القوة أقل بواحد من أس x في الاقتران الأصلي وبذلك فإن أس المتغير x في الاقتران الأصلي هو 6. وبما أن مشتقة x^6 فإن $F(x) = x^6$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

ومن ثم ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يكتب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^6 + C$$

② $f(x) = -3x^{-4}$

✓ الحل

عندما أبحث عن اقتران مشتقته $-3x^{-4}$ ، أتذكر أن أس x في مشتقة اقتران القوة أقل بواحد من أس x في الاقتران الأصلي وبذلك فإن أس المتغير x في الاقتران الأصلي هو -3. وبما أن مشتقة x^{-3} فإن $F(x) = x^{-3}$ هو اقتران أصلي للاقتران $f(x)$.

ومن ثم ، فإن أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ يكتب في الصورة الآتية:

$$G(x) = x^{-3} + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد اقتراناً أصلياً لكل من الاقترانين الآتيين:

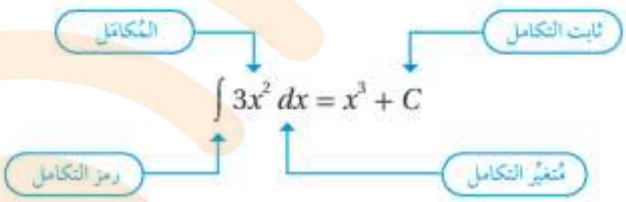
① $f(x) = 5x^4$

الحل ✓

② $f(x) = -9x^{-10}$

الحل ✓

التكامل غير المحدود



مفهوم أساسي

قواعد أساسية للتكامل غير المحدود

أذا كان k عدداً حقيقياً ، فأن :

① $\int k\,dx = kx + C$ تكامل الثابت

② $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \;, n \neq -1$

مثال2

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int 9\,dx$

الحل ✓

② $\int x^{10}\,dx$

الحل ✓

③ $\int \sqrt{x}\,dx$

الحل ✓

④ $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

الحل ✓

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية

ⓐ $\int 6\, dx$

الحل ✓

ⓑ $\int x^8\, dx$

الحل ✓

ⓒ $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

الحل ✓

ⓓ $\int \frac{1}{x^5}\, dx$

الحل ✓

خصائص التكامل غير المحدود

مفهوم أساسي

خصائص التكامل غير المحدود

إذا كان k ثابتاً ، فإن:

① $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

② $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

تكامل المجموع أو الفرق

مثال3

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

① $\int (6x^2 + 2x)dx$

✓ الحل

تكامل المجموع، واقتران القوة المضروب في ثابت

$$\int (6x^2 + 2x)dx = 6\int x^2 dx + 2\int x\, dx$$

تكامل اقتران القوة

$$= 6\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C$$

بالتبسيط

$$= 2x^3 + x^2 + C$$

② $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{5x^5}\right) dx$

✓ الحل

تكامل الفرق وتكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^5}\right) dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx - 3\int \frac{1}{x^5} dx$$

تعريف الأس السالب، والصورة الأسية

$$= \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx - 3\int x^{-5}\, dx$$

تكامل اقتران القوة

$$= 2x^{1/2} - 3\left(-\frac{1}{4}x^4\right) + C$$

بالتبسيط والصورة الجذرية

$$= 2\sqrt{x} + \frac{3}{4x^4} + C$$

أتحقّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملين الآتيين:

ⓐ $\int \left(x^3 - 2x^{\frac{5}{3}}\right) dx$

✓ الحل

ⓑ $\int \left(3x^2 - \frac{6}{\sqrt[5]{x}}\right) dx$

✓ الحل

مثال4

أجد كلاً من التكاملات الآتيه:

① $\int (x+2)\,(x-2)\,dx$

✓ الحل

بضرب المقدارين الجبريين

$$\int (x+2)(x-2)dx = \int (x^2-4)dx$$

تكامل اقتران القوة، وتكامل الثابت

$$= \frac{1}{3}x^3 - 4x + C$$

② $\int \frac{8x^3+5x}{x}\,dx$

✓ الحل

بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$\int \frac{8x^3+5x}{x}dx = \int \left(\frac{8x^3}{x}+\frac{5x}{x}\right)dx$$

بالتبسيط

$$= \int (8x^2+5)dx$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$= \frac{8}{3}x^3 + 5x + C$$

③ $\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)\,dx$

✓ الحل

بتوزيع الضرب على الجميع

$$\int x\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx = \int (x^3+2)\,dx$$

تكامل اقتران القوة ، وقاعدة تكامل الثابت

$$= \frac{1}{4}x^4 + 2x + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتيه:

ⓐ $\int \frac{x^4-8x^3}{x^2}\,dx$

✓ الحل

ⓑ $\int (3x+2)(x-1)\,dx$

✓ الحل

ⓒ $\int x(x^3-7)\,dx$

✓ الحل

أتدرب وأحل المسائل

أجد اقترانا أصلياً لكل من الاقترانات الآتية:

① $f(x) = x^7$

الحل ✓

② $f(x) = -2x^6$

الحل ✓

③ $f(x) = -10$

الحل ✓

④ $f(x) = 8x$

الحل ✓

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

⑤ $\int 6x \; dx$

الحل ✓

⑥ $\int (7x - 5) \; dx$

الحل ✓

⑦ $\int (3 - 4x) \; dx$

الحل ✓

⑧ $\int \frac{10}{\sqrt{x}} \; dx$

الحل ✓

⑨ $\int 2x^{3/2} \; dx$

الحل ✓

⑩ $\int (2x^4 - 5x + 10) \; dx$

الحل ✓

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

⑪ $\int (2x^3 - 2x)\, dx$

الحل ✓

⑫ $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{x^3}\right) dx$

الحل ✓

⑬ $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$

الحل ✓

⑭ $\int \frac{4x^3 - 2}{x^3}\, dx$

الحل ✓

⑮ $\int \frac{2x + 8}{\sqrt{x}}\, dx$

الحل ✓

⑯ $\int (x - 1)^2\, dx$

الحل ✓

⑰ $\displaystyle\int \frac{x^3+8}{x+2}\,dx$

الحل ✓

⑱ $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(x-1)\,dx$

الحل ✓

⑲ $\displaystyle\int (2x-3)(3x-1)\,dx$

الحل ✓

مهارات التفكير العليا

⑳ أكتشف الخطا أوجدت رنيم ناتج التكامل:

$$\int (2x+1)(x-1)\,dx$$

وكان حلها على النحو التالي:

$$\int (2x+1)(x-1)\,dx = \int (2x+1)\,dx \times \int (x-1)\,dx$$
$$= (x^2+x)\left(\tfrac{1}{2}x^2 - x\right) + C \quad \text{✗}$$

أكتشف الخطأ في حل رنيم ثم أصححه.

الحل ✓

تحد: أجد كل تكامل مما يأتي:

㉑ $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^2 dx$

الحل ✓

㉒ $\int (x-1)(x-3)(x+5)\ dx$

✓ الحل

㉓ تبرير : إذا كان :

$$\int \left(\frac{P}{2x^2} + Q\right) dx = \frac{2}{x} + 10x + C$$

فأجد قيمة كل من الثابت P والثابت Q ، مبرراً إجابتي.

✓ الحل

كتاب التمارين

أجد كلاً من التكاملات الآتية :

① $\int (4x+2)\ dx$

② $\int 2x^{-4}\ dx$

③ $\int (6x^2 - 4x)\ dx$

④ $\int (3 - x - 2x^5) dx$

⑤ $\int (x^{-2} + x^{5/2})\ dx$

⑥ $\int \left(3x^2 - \frac{2}{x^2}\right) dx$

أجد كلاً من التكاملات الآتية :

⑦ $\int (3x^{-2} + 6x^{-1/2} + x - 4)dx$

⑧ $\int (10x^4 + 8x^{-5})dx$

⑨ $\int \left(\frac{2}{x^3} - 3\sqrt{x}\right) dx$

⑩ $\int \left(8x^3 + 6x - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

⑪ $\int \left(\frac{7}{x^2} + \sqrt[3]{x^4}\right) dx$

⑫ $\int \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^2}\right) dx$

⑬ $\int \frac{4 + 2\sqrt{x}}{x^2} dx$

⑭ $\int \frac{4 - x^2}{2 + x} dx$

⑮ $\int \frac{x^2 - 1}{x^2} dx$

⑯ $\int x\sqrt{x}\, dx$

⑰ $\int \frac{x^2 - 1}{x - 1} dx$

⑱ $\int x^2\,(1 - x^3)dx$

⑲ $\int (x+4)^2\,dx$

⑳ $\int \frac{5-x}{x^5}\,dx$

㉑ $\int \frac{x^2+2x+1}{x+1}\,dx$

㉒ $\int x(x+1)^2\,dx$

㉓ $\int \frac{(x+3)^2}{\sqrt{x}}\,dx$

㉔ $\int (x-5)(x+5)\,dx$

الدرس الثاني : الشرط الأولي

الشرط الأولي ، وإيجاد قاعدة الاقتران

يتطلب حل بعض المسائل إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يحققها ، وهذا يعني ضرورة تحديد قيمة ثابت التكامل C يمكن تحديد هذه القيمة بتعويض نقطة تحقق الاقتران الأصلي وتعطى عادة في المسألة وتسمى الشرط الأولى

مسألة اليوم :

يمثل الاقتران : $S'(t) = 500\sqrt[4]{t}$ معدل تغير المبيعات الشهرية لهاتف جديد، حيث t عدد الأشهر من طرح الهاتف في الأسواق $S(t)$ عدد الهواتف المبيعة شهرياً . أجد $S(t)$ علماً بأن $S(0) = 0$.

✓ الحل

مثال1

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$ ومر منحناه بالنقطة $(2, 4)$.

✓ الحل

الخطوة 1 أجد تكامل الاقتران $f'(x)$

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

$$f(x) = \int (3x^2 + 4x - 3)\, dx$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت وتكامل الثابت.

الخطوة 2 أجد قيمة ثابت التكامل C.

لإيجاد قيمة الثابت التكامل C ، أستعمل الشرط الأولي المعطى في المسألة ، وهو النقطة $(2, 4)$ التي يمر بها منحنى الاقتران، وتحقق قاعدة الاقتران؛ أي أعوض $x = 2$ في قاعدة $f(x)$، ثم أحل المعادلة الناتجة لإيجاد قيمة C.

قاعدة الاقتران $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + C$

$4 = (2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + C$

بتعويض $x = 2\,, f(2) = 4$

بحل المعادلة لـ C $\quad C = -6$

إذن، قاعدة الاقتران هي :

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$$

أتحقّق من فهمي

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ إذا كان $f'(x) = 6x^2 + 5$ ، ومر منحناه بالنقطة $(1, 9)$.

✓ الحل

مثال 2 من الحياة

التكلفة الحدية : يمثل الاقتران $C'(x) = 3x^2 - 60x + 400$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل طابعة ملونة تنتجها إحدى الشركات، حيث x عدد الطابعات المنتجة و $C(x)$ تكلفة إنتاج x طابعة بالدينار. أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علماً بأن تكلفة إنتاج طابعة واحدة هي 583 JD.

✓ الحل

الخطوة 1 أجد تكامل الاقتران $C'(x)$

$$C(x) = \int C'(x)dx$$

$$C(x) = \int (3x^2 - 60x + 400)\, dx$$

$$= x^3 - 30x^2 + 400x + K$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت وتكامل الثابت.

الخطوة 2 أجد قيمة ثابت التكامل K.

قاعدة الاقتران

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + k$$

بتعويض $x = 1, C(1) = 583$

$$583 = (1)^3 - 30(1)^2 + 400(1) + K$$

بحل المعادلة لـ K

$$K = 212$$

إذن اقتران التكلفة هو:

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 212$$

أتحقّق من فهمي

التكلفة الحدية: يمثل الاقتران $C'(x) = 0.3x^2 + 2x$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطعة تنتج في إحدى الشركات حيث x عدد القطع المنتجة، و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار.
أجد اقتران التكلفة $C(x)$ علماً بأن تكلفة إنتاج 10 قطع هي 2200 JD.

✓ الحل

مثال3

يتحرك جســيم في مســـار مســـتقيم وتعطى سرعتـه المتجهـه بـالاقتران: $v(t) = t + 2$ ، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهه بالمتر لكل ثاني إذا كان الموقع الابتدائي للجســيم هو $11\ m$ فأجد موقع الجســيم بعد 8 ثوانٍ من بدء الحركة.

بمـا أن اقتران الموقع هو أقتران أصـــلي لاقتران الســـــــرعة المتجهه فإنه يمكنني إيجاد موقع الجسيم بعد t ثانية عن طريق التكامل.

✓ الحل

الخطوة1: أجد اقتران الموقع.

بايجاد تكامل اقتران السرعة المتجهه

$$s(t) = \int v(t)\,dx$$

بتعويض $v(t) = t + 2$

$$= \int (t+2)\,dt$$

تكامل الثابت ، وتكامل اقتران القوة

$$= \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$$

الخطوة2: أجد قيمة ثابت التكامل C.

بما أن الموقع الابتدائي للجســـيم هو $11\ m$ فإن $s(0) = 11$ وهذا يعد شركاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C:

اقتران الموقع $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + C$

بتعويض $t = 0, s(0) = 11$

$$11 = \frac{1}{2}(0)^2 + 2(0) + C$$

بحل المعادلة $C = 11$

إذن، اقتران t ثنية من بدء الحركة هو

$$s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$$

الخطوة 3: أجد موقع الجســـيم بعد 8 ثوانٍ من بدء الحركة.

اقتران الموقع $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 11$

بتعويض $t = 8$

$$s(8) = \frac{1}{2}(8)^2 + 2(8) + 11$$

بالتبسيط $= 59$

إذن ، موقع الجســيم بعد 8 ثوانٍ من بدء الحركة هو : $59\ m$

أتحقَّق من فهمي

يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته المتجهه بالاقتران $v(t) = 36t - 3t^2$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهه بالمتر لكل ثانية إذا بدأ الجســـيم حركته من نقطة الأصـــل فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

✓ الحل

مثال4

يتحرك جســيم في مســـار مســـتقيم ، ويعطى تســـارعه بالاقتران $a(t) = 6t$ حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع إذا كان الموقع لابتدائي للجسـيم هو $4\ m$ وكانت سرعته المتجهه هي $1\ m/s$ بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسـيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

✓ الحل

الخطوة1: أجد اقتران السرعة المتجهه.

* بما أن اقتران السرعة المتجهه هو اقتران أصلي لاقتران التسارع فإنه يمكنني إيجاد سرعة الجسيم بعد t ثانية عن طريق التكامل

بإيجاد تكامل اقتران التسارع

$$v(t) = \int a(t)\, dt$$

بتعويض $a(t) = 6t$

$$= \int 6t\, dt$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

$$= 3t^2 + C_1$$

* أجد قيمة ثابت التكامل C_1.

بما أن سرعة الجســيم المتجهه بعد ثانية واحدة من بـدء حركتـه هي $1\ m/s$ فـإن $v(1) = 1$ وهذا يعد شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_1

اقتران السرعة المتجهه $v(t) = 3t^2 + C_1$

بتعويض $t = 1 , v(1) = 1$

$1 = 3(1)^2 + C_1$

بحل المعادلة $C_1 = -2$

إذن اقتران السرعة المتجهه هو : $v = 3t^2 - 2$

الخطوة2: أجد اقتران الموقع.

بإيجاد تكامل اقتران السرعة المتجهه

$$s(t) = \int v(t)\, dx$$

بتعويض $v(t) = 3t^2 - 2$

$$= \int (3t^2 - 2)\, dt$$

تكامل الثابت،وتكامل اقتران القوة المضـــروب في ثابت

$$= t^3 - 2t + C_2$$

* أجد قيمة ثابت التكامل C_2 .

بما أن الموقع الابتدائي للجســيم هو 4m فإن $s(0) = 4$ وهذا يعد شرطاً أولياً لإيجاد قيمة ثابت التكامل C_2 :

اقتران الموقع $s(t) = t^3 - 2t + C_2$

بتعويض $t = 0 , s(0) = 4$

$4 = (0)^3 - 2(0) + C_2$

بحل المعادلة $C_2 = 4$

إذن اقران الموقع بعد t ثانية من بدء الحركة هو:

$$s(t) = t^3 - 2t + 4$$

الخطوة 3: أجد موقع الجســيم بعد ثانيتين من بدء الحركة.

اقتران الموقع $s(t) = t^3 - 2t + 4$

بتعويض $t = 2$

$s(2) = (2)^3 - 2(2) + 4$

بالتبسيط $= 8$

إذن موقع الجســيم بعد ثانيتين من بدء الحركة هو $8\ m$.

أتحقَّق من فهمي

يتحرك جسـيم في مسـار مسـتقيم ، ويعطى تسـارعه بالاقتران $a(t) = 4t - 4$ ، حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجسـيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها 5m/s فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

✓ الحل

أتدرب وأحل المسائل

في كل مما ياتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يمر بها منحنى $y = f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران.

① $f'(x) = x - 3 \; ; (2, 9)$

الحل ✓

② $f'(x) = x^2 - 4 \; ; (0, 7)$

الحل ✓

③ $f'(x) = 6x^2 - 4x + 2 \; ; (1, 9)$

الحل ✓

④ $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{4}x^2 \; ; (4, 11)$

الحل ✓

⑤ $f'(x) = (x+2)^2 \;\; ; (1, 7)$

✓ الحل

⑥ $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - x \; ; (4, 0)$

✓ الحل

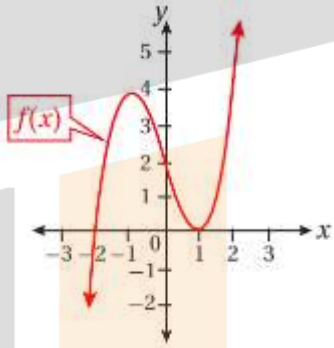
⑦ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو $\frac{dy}{dx} = 0.4x + 3$ ، فأجد قاعدة العلاقة y علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(0, 5)$.

✓ الحل

⑧ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x) = \frac{x^2+10}{x^2}$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(5, 2)$.

✓ الحل

⑨ يبين الشـــكل المجـاور منحنى الاقتران $f(x)$ حـيـث $f'(x) = 3x^2 - 3$ أجـد قاعدة الاقتران $f(x)$.



✓ الحل

بالون : عند نفخ بالون كروي الشـكل يصـبح نصف قطره y سنتيمتراً بعد t ثانية.

إذا كان $t > 0$, $\frac{dy}{dx} = 4t^{-\frac{2}{3}}$ وكان نصـــف قطر البـالون بعـد 8 ثوانٍ من بـدء نفخه 30 cm فأجد كلاً مما يأتي:

⑩ قاعدة العلاقة y بدلالة t.

✓ الحل

⑪ نصـــف قطر البالون بعد 27 ثانية من بدء نفخه.

✓ الحل

⑫ أشـجار : في دراسـة تناولت نوعاً معيناً من الأشجار ، تبين أن ارتفاع هذه الأشجار يتغيـر بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران:

$h'(t) = 0.2t^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x}$ حيث $h(t)$ ارتفاع الشجرة بالأقدام و t عدد السنوات منذ لحظة زراعة الشـــجرة إذا كان ارتفـاع إحـدى هـذه الأشجار عند زراعتها هو 2 ft فأجد $h(t)$.

✓ الحل

⑬ يتحرك جسيم في مسار مستقيم ، وتعطى سرعته بالاقتران $v(t) = 2t + 3$ ، حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل فأجد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة.

✓ الحل

⑭ يتحرك جسيم في مسار مستقيم ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = t^2$ حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو 3m وكانت سرعته المتجهة $1\ \text{m/s}$ بعد ثانية واحدة من بدء حركته، فأجد موقع الجسيم بعد ثانيتيـن من بدء الحركة.

✓ الحل

⑮ يتحرك جســـيم من الســـكون ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 9 - 2t$ حيث t الزمن بالثواني و a تسارعه بالمتر لكل ثانية إذا بدأ الجسـيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $2\ \mathrm{m/s}$ فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء الحركة.

✓ الحل

مهارات التفكير العليا

⑯ تبـــرير: تعطى مشـــتقة الاقتران $f(x)$ بالقاعدة $f'(x) = ax + b$ حيث a و b ثابتان إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(-2, 8)$ هو 7 وقطع منحنى الاقتران المحور y عند النقطة $(0, 18)$ فأجد قاعدة هذا الاقتران مبرراً إجابتي.

✓ الحل

⑰ تحد : إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $\left(4-\frac{100}{x^2}\right)$ وكان للاقتران نقطة حرجة عند النقطة $(a,10)$ ، حيث $a>0$ فأجد قاعدة هذا الاقتران.

الحل ✓

كتاب التمارين

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ منحناه بالنقطة المعطاة:

① $f'^{(x)} = 3x - 2; (-1, 2)$

② $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}; (4, 5)$

③ $f'(x) = -x(x+1); (-1, 5)$

④ $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

⑤ $f'(x) = x + \sqrt{x}; (1, 2)$

⑥ $f'(x) = -\frac{10}{x^2}; (1, 15)$

⑦ إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو : $f'(x) = \sqrt{x}$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ ، علماً بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة $(9, 25)$.

⑧ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو : $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^2}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(2, 4)$.

⑨ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو : $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$ ، ومَرَّ منحناها بنقطة الأصل، فأَجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x ، مُبرِّرًا إجابتي .

⑩ الإيراد الحدِّي: يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من مُنتَجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

⑪ يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة لكل ثانية. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بَدْء الحركة.

⑫ يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a التسارع بالمتر لكل ثانية تربيع. إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $72 m/s$ ، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بَدْء الحركة .

الدرس الثالث : التكامل المحدود

مسألة اليوم :

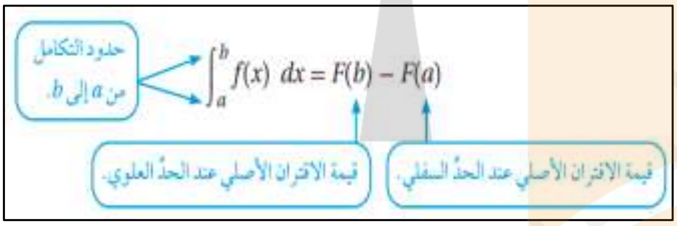
يمثل الاقتران $C'(x) = 500 - \frac{x}{3}$ التكلفة الحدية الشهرية (بالدينار) لكل دراجة نارية ينتجها أحد مصانع الدراجات حيث x عدد الدراجات المنتجه شهرياً و $C(x)$ تكلفة انتاج x دراجة شهرياً بالدينار. أجد مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الإنتاج من 300 دراجة إلى 600 دراجة شهرياً.

✓ الحل

التكامل المحدود

تعلمت من الدرس السابق أن $\int f(x)dx$ يسمى التكامل غير المحدود للاقتران $f(x)$ وتعلمت أيضاً كيف نجد التكامل غير المحدود للاقتران الثابت واقتران القوة.

يطلق على $\int_a^b f(x)\, dx$ اسم التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ حيث a الحد السفلي للتكامل و b الحد العلوي له.



عند أيجاد التكامل المحدود لأي اقتران $f(x)$ ألاحظ إلغاء ثابت التكامل C وهذا يعني أن الناتج هو نفسه بصرف النظرف عن الاقتران الاصلي المستعمل:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(b) - F(a)] - [F(a) + C]$$
$$= F(b) - F(a)$$

مفهوم أساسي **التكامل المحدود**

إذا كان الاقتران $f(x)$ متصلاً على الفترة $[a, b]$ وكان $F(x)$ يمثل أي اقتران أصلي للاقتران $f(x)$ فإن التكامل المحدود للاقتران $f(x)$ من a إلى b هو:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

يمكن التعبير عن الفرق : $F(b) - F(a)$

باستعمال الرمز $F(x)\Big|_a^b$

مثال1

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

① $\int_0^1 (2x-5)\,dx$

✓ الحل

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت، وتكامل الثابت

$$\int_0^1 (2x-5)\,dx = (x^2-5)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= \left((1)^2 - 5(1)\right) - \left((0)^2 - 5(0)\right)$$

$$= -4$$ بالتبسيط

② $\int_{-4}^3 x(4-3x)\,dx$

✓ الحل

بتوزيع الضرب على الجمع

$$\int_{-4}^3 x(4-3x)\,dx = \int_{-4}^3 (4x-3x^2)dx$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت

$$= (2x^2 - x^3)\Big|_{-4}^3$$

بالتعويض

$$= (2(3)^2 - (3)^3) - (2(-4)^2 - (-4)^3)$$

$$= -105$$ بالتبسيط

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل من التكاملين الآتيين:

ⓐ $\int_1^4 (8x - \sqrt{x})\,dx$

✓ الحل

ⓑ $\int_{-1}^2 (1-x)(1+3x)\,dx$

✓ الحل

مثال2

إذا كان $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$ فأجد قيمة الثابت k.

✓ الحل

التكامل المعطى $\int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 3$

الصورة الأسية $\int_1^k x^{-1/2}\,dx = 3$

تكامل اقتران القوة $2\,x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^k = 3$

الصورة الجذرية $2\sqrt{x}\Big|_1^k = 3$

بالتعويض $2\sqrt{k} - 2\sqrt{1} = 3$

بالتبسيط $2\sqrt{k} - 2 = 3$

بجمع 2 لطرفي المعادلة $2\sqrt{k} = 5$

بقسمة طرفي المعادلة على 2 $\sqrt{k} = \frac{5}{2}$

بتربيع طرفي المعادلة $k = \frac{25}{4}$

أتحقّق من فهمي

إذا كان $\int_0^k 6x^2\,dx = 2$ فأجد قيمة الثابت k

✓ الحل

خصائص التكامل المحدود

مفهوم أساسي

إذا كان الاقتران $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين متصلين على الفترة $[a,b]$ وكان k ثابتاً ، فإن :

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

① $\int_a^b k\,f(x)dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

تكامل المجموع أو الفرق

② $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

التكامل عن نقطة

③ $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

التبديل بين حدي التكامل

④ $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

التبديل بين حدي التكامل

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

مثال3

إذا كان

$$\int_5^7 f(x)dx = 3\ ,\ \int_0^5 g(x)dx = -4,\ \int_0^5 f(x)dx = 10$$

فأجد قيمة كل مما يلي :

① $\int_0^5 (4f(x)+g(x))\,dx$

✓ الحل

تكامل المجموع

$$\int_0^5 (4f(x)+g(x)) = dx$$

$$= \int_0^5 4(f(x)dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= 4\int_0^5 f(x)dx + \int_0^5 g(x)dx$$

$= 4(10)+(-4)$ بالتعويض

$= 36$ بالتبسيط

② $\int_5^0 5g(x)\,dx$

✓ الحل

بالتبديل بين حدي التكامل

$$\int_5^0 5g(x)\,fx = -\int_0^5 5g\,(x)\,dx$$

$$= \int_0^5 4(f(x)dx + \int_0^5 g(x)\,dx$$

تكامل الاقتران المضروب في ثابت

$$= -5\int_0^5 g(x)dx$$

$= -5\times -4$ بالتعويض

$= 20$ بالتبسيط

③ $\int_0^7 f(x)\,dx$

✓ الحل

بتجزئة التكامل

$$\int_0^7 f(x)\,fx = \int_0^5 f(x)\,dx + \int_5^7 f(x)\,dx$$

$= 10+3$ بالتعويض

$= 13$ بالتبسيط

أتحقَّق من فهمي

إذا كان:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = 5\ ,\ \int_4^1 f(x)dx = 2,$$

$$\int_{-1}^1 h(x)dx = 7$$

فأجد قيمة كل مما يأتي:

ⓐ $\int_{-1}^1 (f(x)+3h(x))\,dx$

✓ الحل

$b)\ \int_{-1}^{4} f(x)\, dx$

✓ الحل

ⓒ $\int_{1}^{-1} 4h\,(x)\, dx$

✓ الحل

تكاملات الاقترانات المتشعبة

مثال4

إذا كان $f(x) = \begin{cases} 12, & x < 2 \\ 3x^2, & x \geq 2 \end{cases}$ فأجد قيمة:

$$\int_{1}^{4} f(x)dx$$

✓ الحل

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{2} 12\, dx + \int_{2}^{4} 3x^2 dx$$

تكامل الثابت وتكامل اقتران القوة

$$= 12x\,\Big|_{1}^{2} + x^3\Big|_{2}^{4}$$

بالتعويض

$$= 12(2) - 12(1) + \left((4)^3 - (2)^3\right)$$

بالتبسيط

$$= 68$$

إذا كان $f(x) = |x-1|$ فأجد قيمة

$$\int_{0}^{5} f(x)dx$$

الخطوة 1 : أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} 1-x, & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$$

الخطوة 2: أجد قيمة التكامل المحدود

قاعدة تجزئة التكامل

$$\int_{0}^{5} f(x)\, dx = \int_{0}^{1} (1-x)dx + \int_{1}^{5} (x-1)\, dx$$

تكامل الثابت وتكامل اقتران القوة

$$= \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{0}^{1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\Big|_{1}^{5}$$

بالتعويض

$$= \left(\left(1 - \frac{1}{2}(1)^2\right) - \left(0 - \frac{1}{2}(0)^2\right)\right) +$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}(5)^2 - 5\right) - \left(\frac{1}{2}(1)^2 - 1\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{17}{2}$$

أتحقَّق من فهمي

ⓐ إذا كان $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x<1 \\ 2x &, x \geq 1 \end{cases}$ فأجد قيمة $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

✓ الحل

ⓑ إذا كان $f(x) = |x-3|$ فأجد قيمة

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$$

✓ الحل

التكامل المحدود ومقدار التغير

مفهوم أساسي مقدار التغير

إذا كان $f'(x)$ متصلاً على الفترة $[a,b]$ فإن مقدار التغير في $f(x)$ عند تغير x من $x=a$ إلى $x=b$ هو :

$$f(b)-f(a) = \int_{a}^{b} f'(x)\,dx$$

مثال5

التغير في الأرباح: يمثل الاقتران $P'(x) = 165 - 0.1x$ الربح الحدي الشهري (بالدينار) لكل جهاز لوحي تبيعه إحدى الشركات حيث x عدد الأجهزة اللوحية المبيعة شهرياً و $P(x)$ ربح بيع x قطعة شهرياً بالدينار. أجد مقدار إلى 1100 جهاز ،علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الآن هو 1000جهاز.

✓ الحل

صيغة مقدار التغير

$$P(b)-P(a) = \int_{a}^{b} P'(x)\,dx$$

بتعويض $a=1000$, $b=1100$

$$P(1100)-P(1000) = \int_{1000}^{1100} (160-0.1x)\,dx$$

تكامل الثابت ، وتكامل اقتران القوة المضـــروب في ثابت

$$= \left(165x - 0.05x^2\right)\Big|_{1000}^{1100}$$

بالتعويض

$$= \left(165(1100) - 0.05(1100)^2\right) - \left(165(100) - 0.05(1000)^2\right)$$

$$= 6000$$ بالتبسيط

إذن عند زيادة مبيعات الشركة من 1000 جهاز إلى 1100 جهاز ، فإن أرباح الشـــــركة ستزيد شـهرياً بمقدار JD 6000.

أتحقَّق من فهمي

معتمداً المعلومات الوارد ذكرها في المثال 5 ، أجد مقدار التغير الشـهري في أرباح الشركة عند زيادة مبيعاتها الشـــهرية إلى 1500 جهاز ، علماً بأن عدد الأجهزة المبيعة الأن هو 1400 جهاز

✓ الحل

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

① $\int_{-1}^{3} 3x^2 dx$

الحل ✓

② $\int_{-3}^{-2} 6dx$

الحل ✓

③ $\int_{0}^{2} (3x^2 + 4x + 3)\, dx$

الحل ✓

④ $\int_{1}^{8} 8\sqrt[3]{x}\, dx$

الحل ✓

⑤ $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}}\right) dx$

الحل ✓

⑥ $\int_{-2}^{3} (-x^2 + 4x - 5)\, dx$

الحل ✓

⑦ $\int_{1}^{3} (x - 2)(x + 2)\, dx$

الحل ✓

⑧ $\int_{-3}^{3} (9 - x^2)\, dx$

الحل ✓

⑨ $\int_{1}^{4} \frac{2 + \sqrt{x}}{x^2}\, dx$

الحل ✓

⑩ $\int_{1}^{4} x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)\,dx$

الحل ✓

⑪ $\int_{1}^{8} \left(x^{1/3}-x^{-1/5}\right)\,dx$

الحل ✓

⑫ $\int_{1}^{9} \left(2+\sqrt{x}\right)^2\,dx$

الحل ✓

⑬ $\int_{-1}^{4} |3x-6|\,dx$

الحل ✓

⑭ $\displaystyle\int_0^3 |x-2| \; dx$

✓ الحل

⑮ $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2-1}{x+1} \; dx$

✓ الحل

⑯ إذا كـان $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le 3 \\ 10-x, & x > 3 \end{cases}$

فأجد قيمة $\int_0^4 f(x)\,dx$

✓ الحل

⑰ إذا كـان $f(x) = \begin{cases} -x^2+5, & x < 0 \\ x+5 \quad , & x \ge . \end{cases}$

فأجد قيمة $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$

✓ الحل

إذا كان

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \int_1^5 f(x)dx = 6,$$
$$\int_1^5 g(x)dx = 8$$

فأجد قيمة كل مما يأتي:

⑱ $\int_2^2 g(x)dx$

الحل ✓

⑲ $\int_5^1 (g(x) - 2)\, dx$

الحل ✓

⑳ $\int_1^2 (3f(x) + x)\, dx$

الحل ✓

㉑ $\int_5^5 f(x)\, dx$

الحل ✓

㉒ $\int_1^5 (f(x) - g(x))\, dx$

الحل ✓

㉓ $\int_1^5 (4f(x) + g(x))\, dx$

الحل ✓

㉔ إذا كـان $\int_1^m (6x-10)\,dx = 4$ فـأجـد قيمة الثابت m.

✓ الحل

㉕ تغير التكلفة : يمثل الاقتران $C'(x) = 6x + 1$ التكلفة الحدية (بالدينار) لكل قطة تنتجها إحدى الشركات ، حيث x عدد القطع المنتجة و $C(x)$ تكلفة إنتاج x قطعة بالدينار. أجد مقدار التغير في التكلفة عند زيادة الشركة إنتاجها من 10 قطع إلى 20 قطعة شهرياً.

✓ الحل

㉖ تلوث : يلوث مصــنع بحيرة بمعـدل يمكن نمذجته بالاقتران $N'(t) = 280t^{3/2}$ حيث t عدد الاشهر منذ الآن و $N(t)$ عدد الكيلو غرامات من الملوثات التي يطرحها المصنع في البحيرة . كم غراماً من الملوثات يدخل البحيرة منذ الآن حتى 4 أشهر؟

✓ الحل

مهارات التفكير العليا

㉗ أكتشـــف الخطأ: أوجد خالد ناتج التكامل $\int_0^2 (x^2 + x)dx$ ، وكان حله على النحو الآتي:

$$\int_0^2 (x^2 + x)\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 + \frac{1}{2}(2)^2\right)$$
$$= -\frac{14}{3}$$

✗

أكتشف الخطأ في حل خالد ، ثم أصححه.

✓ الحل

㉘ تبرير : أثبت أن

$$\int_0^1 x^n\,(1 - x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

حيث $n > 0$ مبرراً إجابتي.

✓ الحل

㉙ تحد : إذا كان $\int_1^5 (2ax + 7)dx = 4a^2$ فأجد قيمة الثابت a .

✓ الحل

كتاب التمارين

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية :

① $\int_{1}^{5} 10x^{-2}\,dx$

② $\int_{0}^{2} (2x^3 - 4x + 5)dx$

③ $\int_{1}^{4} \frac{x^3 + 2x^2}{\sqrt{x}}dx$

④ $\int_{3}^{6} \left(x - \frac{3}{x}\right)^2 dx$

⑤ $\int_{0}^{5} (|x+3| - 5)dx$

⑥ $\int_{0}^{6} x(6-x)dx$

⑦ $\int_{1}^{2} \left(6x - \frac{12}{x^4} + 3\right) dx$

⑧ $\int_{0}^{7} |2x - 1|\,dx$

⑨ $\int_{-3}^{4} |x|\,dx$

⑩ $\int_{1}^{2} \frac{x^2 + x^3}{x}dx$

⑪ $\int_{3}^{4} (|6x^2 - 4x|)dx$

⑫ $\int_{10}^{10} \frac{x+1}{x^2}dx$

إذا كان:

$\int_{-3}^{2} f(x)dx = 5 , \int_{-3}^{1} f(x)dx = 4 , \int_{-3}^{2} g(x)dx = -2$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

⑬ $\int_{2}^{2} f(x)dx$

⑭ $\int_{1}^{2} (f(x) - 5)dx$

⑮ $\int_{-3}^{2} (-2f(x) + 5g(x))dx$

⑯ $\int_{2}^{-3} (g(x) + 2x)dx$

⑰ $\int_{2}^{-3} (f(x) + g(x))dx$

⑱ $\int_{-3}^{2} (4f(x) - 3g(x))dx$

⑲ إذا كان: $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ 8 - x & , x \geq 2 \end{cases}$ ، فأَجد قيمة : $\int_{-3}^{6} f(x)dx$.

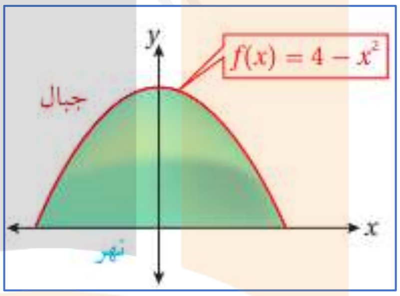
⑳ سكّان: أشارت دراسة إلى أنَّ عدد السكّان في إحدى القرى يزداد شهريًّا بمُعدَّلٍ يُمكِن نمذجته بالاقتران: $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$ ، حيث t عدد الأشهر من الآن، و $P(t)$ عدد السكّان. أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان القرية في الأشهر الثمانية القادمة .

㉑ إذا كان: $\int_{2}^{3} (x^2 - a)dx = 5$ ، فأجد قيمة الثابت a .

الدرس الرابع : المساحة

مسألة اليوم :

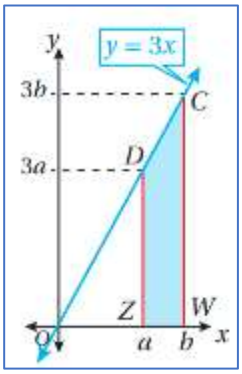
يمثل الجزء المظلل بالأخضـــر في الشكل المجاور حقول منطقة زراعية تحيط بها ســلســلة من الجبال ويمثل منحنى الاقتران: $f(x) = 4 - x^2$ الحد الفاصــل بين ســلســلة الجبال والمنطقة الزراعية ويمثل المحور x حافة النهر الذي يطل على المنطقة الزراعية. أجد المســاحة الكلية **للمنطقة الزراعية علماً بأن x و y مقيسان بالكيلو متر.**



✓ الحل

المساحة

في الشكل المجاور يمكن إيجاد مساحة المنطقة المظللة بين المســتقيم $y = 3x$ والمحور x والمســتقيمين $x = a$ و $x = b$ وذلك بطرح مساحة ΔOZD من مساحة ΔOWC كما يأتي:



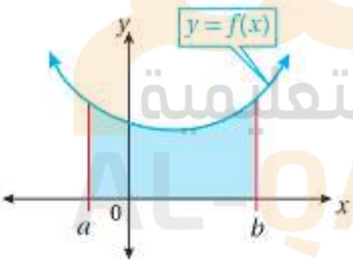
$$\frac{1}{2}(3b^2) - \frac{1}{2}(3a^2)$$

ألاحظ أنه يمكن التعبير عن الصيغة السابقة بالمقدار $\frac{1}{2}\ (3x^2)\ \Big|_a^b$ ثم التعبير عن المساحة بين المستقيم $y = 3x$ والمحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ بالتكامل الآتي:

$$\int_a^b 3x\ dx = \frac{1}{2}\ (3x^2)\ \Big|_a^b$$

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x وتقع فوق هذا المحور

يمكن إيجاد المســاحة المحصــورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمســتقيمين $x = a$ و $x = b$ وتقع فوق المحور x عن طريق التكامل الآتي:



$$A = \int_a^b f(x)\ dx\ ;\ a < b$$

مثال1

أجد مســاحة المنطقة المحصــورة بين منحنى الاقــتران $f(x) = x^2 + 1$ والــمــحــور x، والمستقيمين $x = 1$ و $x = 4$

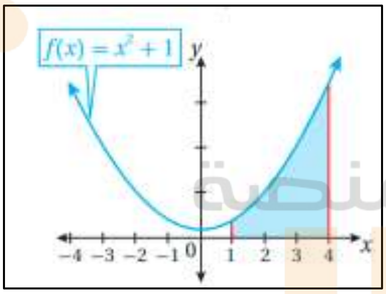
الخطوة 1 : أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إن وجدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 4]$ أساوي أولاً قاعدة الاقتران بالصفر ، ثم أحل المعادلة الناتجة

بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر $\quad f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = x^2 + 1$ $\quad x^2 + 1 = 0$

بما أن $x^2 + 1 \neq 0$ فإن منحنة الاقتران لا يتقاطع مع المحور x كما في الشكل المجاور.



الخطوة 2 : أجد المساحة عن طريق التكامل.

ألاحظ أن المساحة المطلوبة تقع فوق المحور x كما في الشكل المجاور ولذا أجد هذه المساحة كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x وتقع فوق هذا المحور.

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 + 1\, , a = 1, b = 4$

$$= \int_1^4 (x^2 + 1)\, dx$$

تكامل اقتران لقوة وتكامل الثابت

$$= \left(\frac{1}{3}\, x^3 + 4\right) \Big|_1^4$$

بالتعويض

$$= \left(\frac{1}{3}(4)^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3}(1)^3 + 1\right)$$

$$= 24 \quad \text{بالتبسيط}$$

إذن المساحة هي : 24 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مســاحة المنطقة المحصــورة بين منحنى الاقــتران $f(x) = x + 3$ والــمــحــور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$.

✓ الحل

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x وتقع أسفل هذا المحور

يمكن إيجاد المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = a$ و $x = b$ وتقع أسفل المحور x عن طريق التكامل الآتي:

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \ ; a < b$$

مثال2

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 8x$ والمحور x، والمستقيمين $x = 5$ و $x = 2$

الخطوة 1 : أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إن وجدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[2, 5]$ أساوي أولاً قاعدة الاقتران بالصفر ، ثم أحل المعادلة الناتجة

بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر $f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = x^2 - 8x$

$x^2 - 8x = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

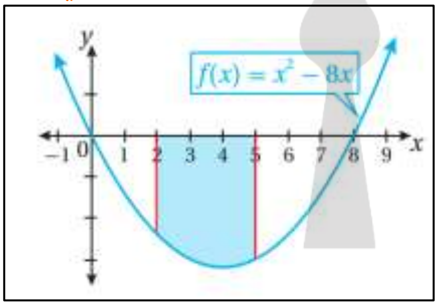
$x(x - 8) = 0$

خاصية الضرب الصفري

$x = 0 \quad or \quad x - 8 = 0$

بحل المعادلة لـ x $\quad x = 8$

إذن الإحداثي x لنقطتي تقاطع الاقتران $f(x)$ مع المحور x ليس ضمن الفترة المعطاة كما في الشكل.



الخطوة 2 : أجد المساحة عن طريق التكامل.

ألاحظ أن المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل المجاور؛ لذا أجد هذه المساحة كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x ليس وتقع أسفل هذا المحور

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 - 8x, a = 2 , b = 5$

$$= -\int_2^5 (x^2 - 8x)dx$$

تكامل اقتران القوة

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - 4x^2\right)\Big|_2^5$$

بالتعويض

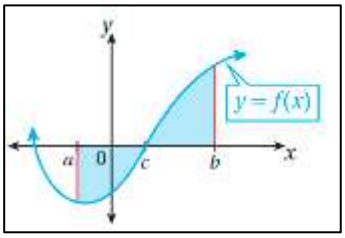
$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(5)^3 - 4(5)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(2)^3 - 4(2)^2\right)\right)$$

بالتبسيط $= 45$

إذن المساحة هي 45 وحدة مربعة.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران ومحور x ويقع أحد جزأيها فوق المحور x ويقع الجزء الآخر أسفل هذا المحور

قد يقع جزء من المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x أسفل هذا المحور، ويقع الجزء الآخر المتبقي منها فوقه كما في الشكل المجاور. وفي هذه الحالة يمكن إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x بتحديد المقطع x للاقتران ، ثم إيجاد المساحة باستعمال القاعدة الآتية :



$$A = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال3

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 12$ والمحور x، والمستقيمين $x = 1$ و $x = 3$

✓ الحل

الخطوة 1 : أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x في الفترة المعطاة (إن وجدت).

لإيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x في الفترة $[1, 3]$ أساوي أولاً قاعدة الاقتران بالصفر ، ثم أحل المعادلة الناتجة

$f(x) = 0$ بمساواة قاعدة الاقتران بالصفر

بتعويض $f(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0$

بقسمة طرفي المعادلة على 3

$x^2 - 4 = 0$

أتحقّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 4$ والمحور x والمستقيمين $x = -1$ و $x = 1$.

✓ الحل

بتحليل الفرق بين مربعين

$$(x+2)(x-2)=0$$

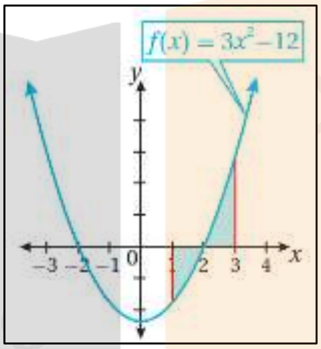
خاصية الضرب الصفري

$$x+2=0 \quad or \quad x-2=0$$

بحل كل معادلة لـ x

$$x=-2 \qquad x=2$$

إذن $x=2$ يقع ضمن الفترة $[1,3]$ كما في الشكل



الخطوة 2 : أجد المساحة عن طريق التكامل.

ألاحظ أن جزءاً من المساحة يقع فوق المحور x وأن الجزء الآخر المتبقي منها يقع أسفل هذا المحور؛ لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة إلى مجموع مساحتين فوق المحور x واسفله

$$A=-\int_1^2 (3x^2-12)\,dx+\int_2^3 (3x^2-12)dx$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت وتكامل الثابت

$$=-(x^3-12x)\Big|_1^2+(x^3-12x)\Big|_2^3$$

بالتبسيط

$$=(12x-x^3)\Big|_1^2+(x^3-12x)\Big|_2^3$$

بالتعويض

$$=(12(2)-2^3)-(12(1)-1^3)+\left(3^3-12(3)\right)-\left(2^3-12(2)\right)$$

بالتبسيط

$$=12$$

إذن المساحة هي 12 وحدة مربعة.

أتحقَّق من فهمي

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=x^2+2x$ والمحور x والمستقيمين $x=-1$ ، و $x=-3$.

الحل ✓

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران والمحور x ولا تكون محدودة بمستقيمين

ألاحظ أن المنطقة التي يراد إيجاد مساحتها بين منحنى الاقتران والمحور x في الأمثلة السابقة محدودة بالمستقيمين : $x = a$ و $x = b$ ولكن ، إذا كانت هذه المنطقة محصورة فقط بين منحنى الاقتران والمحور x فإنه يلزم عندئذٍ إيجاد الإحداثي x لنقاط تقاطع الاقتران مع المحور x لأنها تمثل حدود التكامل.

مثال4

① أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 - 3x$ والمحور x

✓ الحل

الخطوة 1 : أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x

أساوي أولاً قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحل المعادلة الناتجة.

بمساواة الاقتران بالصفر $f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = x^2 - 3x$

$x^2 - 3x = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$x(x-3) = 0$

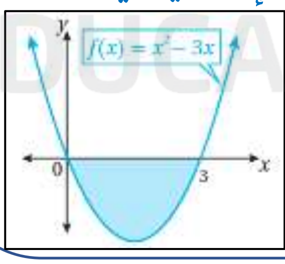
خاصية الضرب الصفري

$x = 0 \quad or \quad x - 3 = 0$

بحل المعادلة لـ x

$x = 3$

إذن الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو $x = 0\ , x = 3$ كما في الشكل المجاور، وهذا الإحداثيان يمثلان حدي التكامل.



الخطوة 2 : أجد المساحة عن طريق التكامل.

ألاحظ أن المساحة المطلوبة تقع أسفل المحور x كما في الشكل السابق؛ لذا أجد مساحتها كالآتي:

قانون المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x وتقع أسفل هذا المحور.

$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$

بالتعويض $f(x) = x^2 - 3x\ , a = 0, b = 3$

$$= -\int_0^3 (x^2 - 3x)\ dx$$

تكامل اقتران القوة

$$= -\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)\Big|_0^3$$

بالتعويض

$$= -\left(\left(\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}(3)^2\right) - \left(\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{3}{2}(0)^2\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= 4\frac{1}{2}$$

إذن المساحة هي $4\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

② أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - x$ والمحور x

✓ الحل

الخطوة 1 : أجد الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x

أساوي أولاً قاعدة الاقتران بالصفر، ثم أحل المعادلة الناتجة.

بمساواة الاقتران بالصفر $f(x) = 0$

بتعويض $f(x) = x^2 - x$

$x^3 - 3 = 0$

بإخراج العامل المشترك الأكبر

$x(x^2 - 1) = 0$

بتحليل الفرق بين مربعين

$x(x+1)(x-1) = 0$

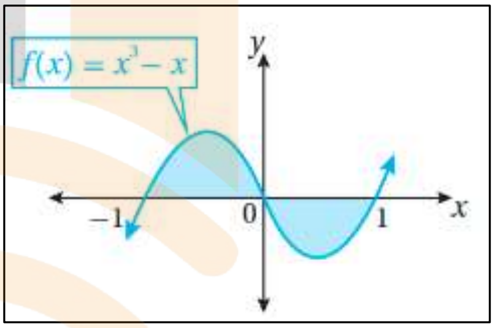
خاصية الضرب الصفري

$x = 0 \quad or \quad x+1 = 0 \quad or \quad x-1 = 0$

بحل كل معادلة لـ x

$x = -1 \quad or \quad x = 1$

إذن الإحداثي x لنقاط تقاطع منحنى الاقتران $f(x)$ مع المحور x هو $x = 0$, $x = -1$, $x = 1$ كما هو في الشكل المجاور، وهذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.



الخطوة 2 : أجد المساحة عن طريق التكامل.

ألاحظ أن جزءاً من المساحة المطلوبة يقع فوق المحور x وأن الجزء الآخر المتبقي منها يقع أسفل هذا المحور لذا أجد المساحة الكلية المطلوبة كالآتي:

بتجزئة المساحة مساحتين فوق المحور x وأسفله

$$A = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + (-\int_{0}^{1} (x^3 - x)dx$$

تكامل اقتران القوة

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) \Big|_{0}^{1}$$

بالتعويض

$$= \left((0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - (0)\right)\right)$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}$$

إذن المساحة هي $\frac{1}{2}$ وحدة مربعة.

أتحقّق من فهمي

a) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 5x + 4$ والمحور x

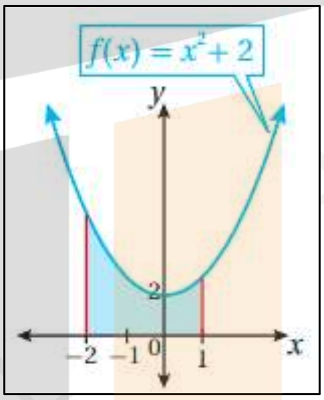
✓ الحل

b) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 9x$ والمحور x

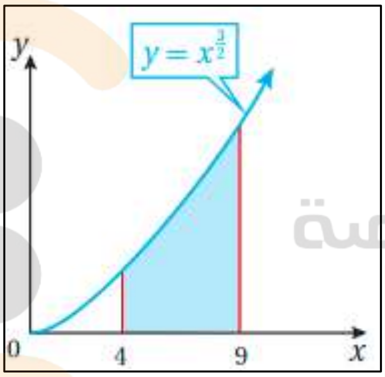
✓ الحل

أتدرب وأحل المسائل

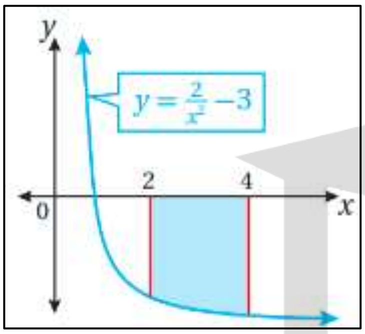
أجد مســـاحة المنطقة المظللة في مل من التمثيلات البيانية الآتية :

①


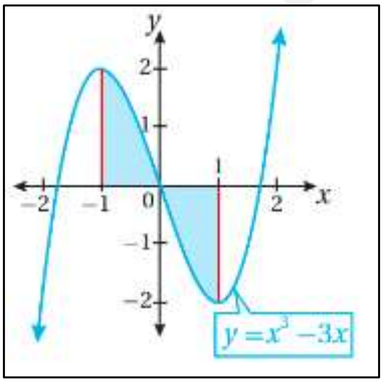
✓ الحل

②


✓ الحل

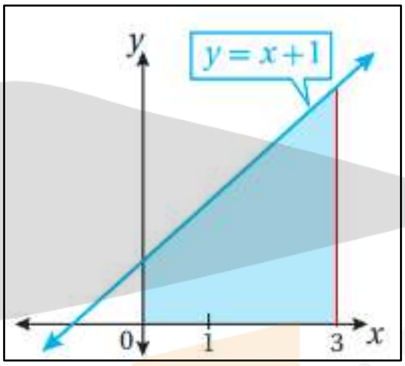
③


✓ الحل

④


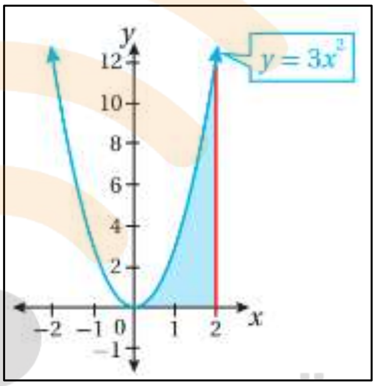
✓ الحل

⑤



✓ الحل

⑥



✓ الحل

⑦ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 3x^2 - 2 + 2$ والمحور x والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.

✓ الحل

أ : هيثم حرب 0797771137

⑧ أجد مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 9 - x^2$ والمحور x.

✓ الحل

⑨ أجد مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 + 4x$ والمحور x والمستقيمين $x = -1$ و $x = 2$.

✓ الحل

⑩ أجد مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الاقتران $f(x) = -7 + 2x - x^2$ والمحور x والمستقيمين $x = 1$ و $x = 4$.

✓ الحل

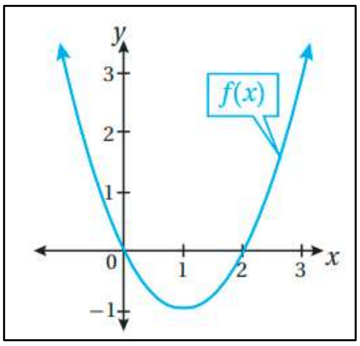
⑪ أجد مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 5 - x$ والمحور x والمستقيمين $x = 3$ و $x = 5$.

✓ الحل

⑫ أجد مســـاحة المنطقة المحصـــورة بين منحنى الاقتران $f(x) = (x+1)(x-4)$ والمحور x.

✓ الحل

يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران
$f(x) = x^2 - 2x$



⑬ أجد مساحة المنطقة الحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x.

✓ الحل

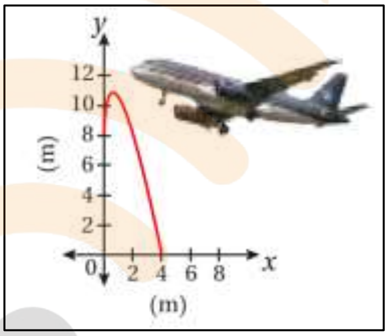
⑭ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x والمستقيم $x = 3$.

✓ الحل

⑮ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x والمستقيم $x = -1$.

✓ الحل

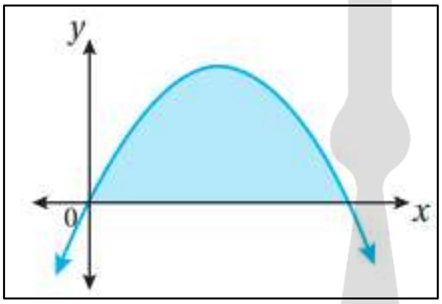
⑯ يبين الشكل التمثيل البياني المجاور شكل السطح العلوي لجناح طائرة ممثلاً بالمعادلة : $y = 8 + 8\sqrt{x} - 6x$ حيث: $0 \le x \le 4$
أجد مساحة السطح العلوي لجناح الطائرة.



✓ الحل

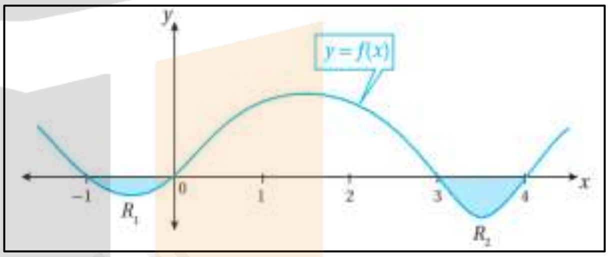
مهارات التفكير العليا

⑰ تحد : يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران $y = kx(4 - x)$ إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x هي 32 وحدة مربعة فأجد قيمة الثابت k.



✓ الحل

⑱ تبرير : يبين الشكل التالي منحنى الاقتران $f(x)$ إذا كانت مساحة المنطقة R_1 هي وحدتين مربعتين ومساحة المنطقة R_2 هي 3 وحدات مربعة ، وكان $\int_0^4 f(x)dx = 10$ فأجد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ مبرراً إجابتي.



✓ الحل

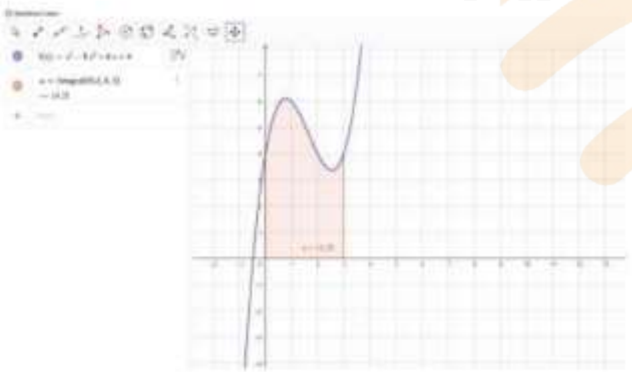
تطبيقات التكامل : المساحة

أستعمل برمجية جيو جبرا لإيجاد المساحة بين منحنى الاقتران والمحور x بوصفها تكاملاً محدوداً مراعياً تحويل إشارة الناتج السالبة إلى موجبة إذا وقعت المنطقة أسفل المحور x وتقسيم هذه المنطقة إلى جزأين إذا كان أحدهما واقعاً فوق المحور x والجزء الآخر تحته ثم حاب مساحة كل جزء على حدة ثم جمع المساحتين معاً.

مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران والمحور x

نشاط :

أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$ والمحور x والمستقيمين $x = 0$ و $x = 3$



① أكتب الاقتران $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 4$ في شريط الإدخال ثم أضغط على زر الإدخال (Enter).

② لإيجاد المساحة بين الاقتران $f(x)$ والمحور x والمستقيمين $x = 0$ و $x = 3$ أكتب في شرط الإدخال الصيغة الآتية:

$\boxed{\text{Integral }(f(x), 0, 3)}$ ثم أضغط على زر الإدخال (Enter).

③ ألاحظ تظليل المنطقة المطلوبة ، وظهور قيمة التكامل على الشكل ، وبذلك فإن مساحة المنطقة هي 14.25 وحدة مربعة.

أتدرّب

① أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = x^2 + 4$ والمحور x والمستقيمين $x = -1$ و $x = 2$

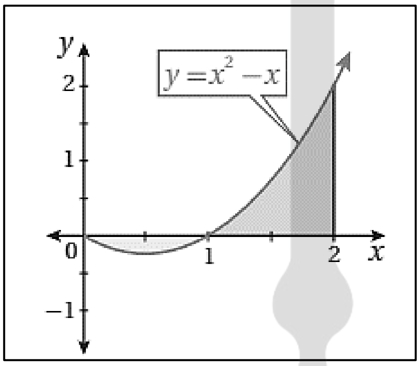
✓ الحل

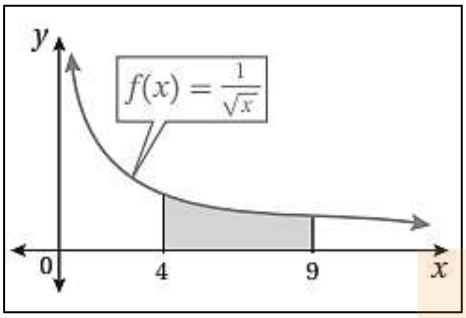
② أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = -\sqrt{x}$ والمحور x والمستقيمين $x = 9$

✓ الحل

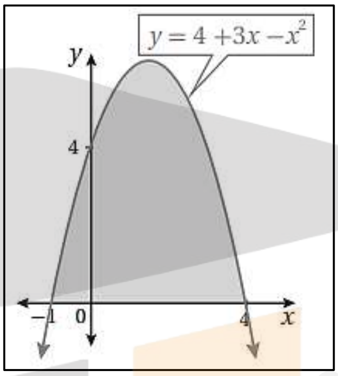
كتاب التمارين

أجد مســاحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية:

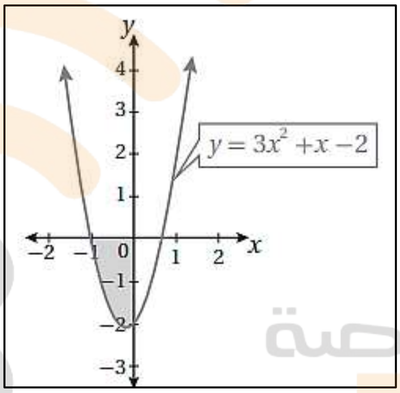
①


②


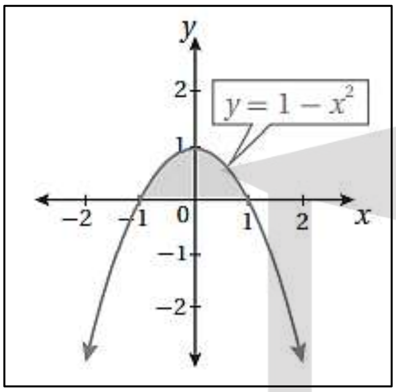
③



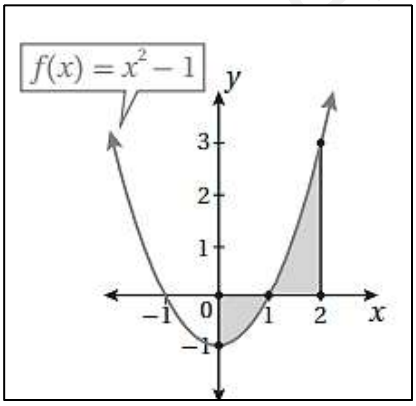
④



⑤



⑥



⑦ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = 3x^2 - 3$ ، والمحور x .

⑧ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 6x$ ، والمحور x .

⑨ أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x) = x^2(2 - x)$ ، والمحور x .

الدرس الخامس : تكامل اقترانات خاصة

مسألة اليوم :

يتغير عـدد الطلبـة الـذين يلتحقون بـإحـدى الجامعات الجديدة سنوياً بمعدل

$P'(t) = \frac{5000}{\sqrt{(t+1)^3}}$ حيـث $P(t)$ عـدد الطلبـة الملتحقين بالجامعة و t الزمن بالســنوات منذ تأسيس الجامعة .

أجد عدد الطلبة الذين درسـوا في الجامعة بعد 3 ســنوات من تأســيســها ، علماً بأن عددهم عن تأسيس الجامعة بلغ 2000 طالب.

✓ الحل

تكامـل الاقتـران الأسي الطـبيعي واقتران الجيب واقتران جيب التمام

تعلمت ســابقاً أن التكامل والاشــتقاق عمليتان عكســيتان؛ ما يســاعد على إيجاد صــيغ مباشرة لتكامل اقترانات نـاتجـة من اشــتقـاق اقترانات مشــهورة مثل: الاقتران الأسي الطبيعي ، واقتران الجيب ، واقتران جيب التمام.
فمثلاً : إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن $f'(x) = -\sin x$ وهذا يعني أن:

$$\int (-\sin x)dx = \cos x + C$$

ومن ثم فإن:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

يمكن إيجاد صيغة تكامل كل من الاقتران الأسي الطبيعي واقتران جيب التمام بطريقة مشابهة.

مفهوم أساسي

تكامل اقترانات أساسية

إذا كان e هو العدد النيبيري ، فإن :

① $\int e^x\, dx = e^x + C$

② $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

③ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

مثال1

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int (e^x + 8\,)dx$

الحل ✓

تكامل الاقتران الأسي الطبيعي ، وتكامل الثابت

$$\int (e^x + 8)dx = e^x + 8x + C$$

② $\int \left(5\cos x + \sqrt{x}\right) dx$

الحل ✓

بكتابة $\sqrt{x}$ في صورة أسية

$$\int (5\cos x + \sqrt{x})dx = \int \left(5\cos x + x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

تكامل $\cos x$ المضروب في ثابت ، وتكامل اقتران القوة

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

الصورة الجذرية

$$= 5\sin x + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

③ $\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx$

الحل ✓

تعريف الأس السالب

$$\int \left(4\sin x - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int (4\sin x - x^{-2})dx$$

تكامل $sin\ x$ المضروب في ثابت وتكامل اقتران القوة

$$= -4\cos x + x^{-1} + C$$

تعريف الأس السالب

$$= -4\cos x + \frac{1}{x} + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int (5x^2 + 7e^x\,)dx$

الحل ✓

ⓑ $\int \left(9\cos x + \frac{9}{x^3}\right) dx$

الحل ✓

ⓒ $\int \left(\sqrt[3]{x} - \sin x\right) dx$

✓ الحل

تكامل الاقتران $\frac{1}{x}$

تعلمت سابقاً أن $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ وهذا يعني أن

$\int \frac{1}{2} = \ln x + C$

بما أن $\ln x$ معرف فقط عندما يكون $x > 0$ فإن :

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C \quad , x > 0 \ldots\ldots ①$$

ولكن $\ln(-x)$ معرف عندما يكون $x < 0$

باستعمال قاعدة السلسلة فإن

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(-x)\right) = \frac{1}{-x} \times -1 = \frac{1}{x}$$

وهنا يعني أن :

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln(-x) + C \quad , x < 0 \ldots . ②$$

مفهوم أساسي

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C\,, \quad C \neq 0$$

مثال2

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx$

✓ الحل

تكامل $\frac{1}{x}$ وتكامل $\sin x$ المضروب في ثابت

$$\int \left(\frac{1}{x} + 6\sin x\right) dx = \ln|x| - 6\cos x + C$$

② $\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx$

✓ الحل

تكامل e^x المضضروب في ثابت وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$\int \left(2e^x + \frac{3}{x}\right) dx = 2e^x + 3\ln|x| + C$$

③ $\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx$

✓ الحل

بقسمة كل حد في البسط على المقام

$$\int \frac{2x^5 - 4}{x}\, dx = \int \left(\frac{2x^5}{x} - \frac{4}{x}\right) dx$$

$$= \int \left(2x^4 - \frac{4}{x}\right) dx \qquad \text{بالتبسيط}$$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت وتكامل $\frac{1}{x}$ المضروب في ثابت

$$= \frac{2}{5}x^5 - 4\ln|x| + C$$

أتحقّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int \left(\frac{1}{x} + 8\, e^{x}\right) dx$

الحل ✓

ⓑ $\int \left(\sin x - \frac{5}{x}\right) dx$

الحل ✓

ⓒ $\int \frac{x^2 - 7x + 2}{x^2}\, dx$

الحل ✓

تكامل اقترانات أساسية في صورة $f(ax + b)$

تعلمت سابقاً إيجاد تكامل اقتران القوة والاقتران الأسي الطبيعي ، واقتران الجيب ، واقتران جيب التمام واقتران $\frac{1}{x}$ والآن سأتعلم كيف أجد تكاملاتها إذا كانت في صورة $f(ax + b)$ ذلك أن كلا منها ناتج من اشتقاق اقتران أصلي باستعمال قاعدة السلسلة .

مفهوم أساسي

تكامل الاقترانات في صورة $f(ax + b)$

إذا كان a, b عددين حقيقيين و $a \neq 0$ و e العدد النيبير ، فأن :

① $\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{x(n+1)} (ax + b)^{n+1} + C \ , n \neq -1$

② $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax+b} + C$

③ $\int \sin\,(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos\,(ax + b) + C$

④ $\int \cos\,(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin\,(ax + b) + C$

⑤ $\int \frac{1}{ax + b}\, dx = \frac{1}{a} |ax + C \ , x \neq -\frac{b}{a}$

مثال3

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int (2x+7)^5 \, dx$

✓ الحل

تكامل $(ax+b)^n$

$$\int (2x+7)^5 \, dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}(2x+7)^6 + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{12}(2x+7)^6 + C$$

② $\int \frac{1}{\sqrt{4x-1}} \, dx$

✓ الحل

بكتابة المكامل في صورة أسية

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-2}} dx = \int (4x+2)^{-1/2} + C$$

تكامل $(ax+b)^n$

$$= \frac{2}{4}(4x-2)^{1/2} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2}(4x-2)^{1/2} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + C$$

③ $\int 2e^{4x+3} \, dx$

✓ الحل

تكامل e^{ax+b} المضروب في ثابت

$$\int 2e^{4x+3} dx = 2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$

بالتبسيط

$$= \frac{1}{2} e^{4x+3} + C$$

④ $\int 2\sin(4x+3) \, dx$

✓ الحل

تكامل $\sin(ax+b)$ المضروب في ثابت

$$\int 2\sin(4x+3) dx = -2 \times \frac{1}{4} e^{4x+3} + C$$

بالتبسيط

$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+3) + C$$

⑤ $\int \left(5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}\right) dx$

✓ الحل

تكامل $\sqrt[3]{x}$ في صورة أسية

$$\int (5\cos(2x+3) + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$= \int \left(5\cos(2x+3) + x^{\frac{1}{3}}\right) dx$$

تكامل $\cos(ax+b)$ المضروب في ثابت
وتكامل اقتران القوة

$$= 5 \times \frac{1}{2}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$$

الصورة الجذرية

$$= \frac{5}{5}\sin(2x+3) + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C$$

⑥ $\int 2\sin(4x+3)\ dx$

✓ الحل

تكامل $\frac{1}{ax+b}$

$$\int \frac{1}{8x-1}dx = \frac{1}{8}\ln|8x-1| + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int (7x-5)^6\ dx$

✓ الحل

ⓑ $\int \sqrt{2x+1}\ dx$

✓ الحل

ⓒ $\int 4\cos(3x-7)\ dx$

✓ الحل

ⓓ $\int (\sin 5x + e^{2x})\ dx$

✓ الحل

ⓔ $\int (6x^2 - 3e^{7x+1})\ dx$

✓ الحل

ⓕ $\int \frac{5}{3x+2}\ dx$

✓ الحل

تعلمت سابقاً أن الشرط الاولي هو نقطة تحقق الاقتران الأصلي ويمكن بتعويضها ثابت التكامل C ويمكن بها أيضاً تحديد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يحقق شرط المسألة علماً بأن الضريط الأولي يستعمل كثيراً لتحديد اقترانات تنمذج مواقف علمية وحياتية.

مثال4 من الحياة

بيئة : في دراسة أجرتها شركة نفطية ، تبين أن معدل إنتاج إحدى الآبار النفطية ينمذج بالاقتران $R'(t) = \frac{100}{t+1} + 5$ حيث $R(t)$ عدد البراميل المنتجة (بالآلاف) في السنة و t عدد السنوات منذ بدء ضخ النفط في البئر أجد عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء عملية الضخ من البئر علماً بأن $R(0) = 0$

✓ الحل

الخطوة 1 : أجد تكامل الاقتران $R'(t)$

$$R(t) = \int R'(t)dt$$

$$R(t) = \int \left(\frac{100}{t+1} + 5\right)dt$$

تكامل $\frac{1}{ax+b}$ المضروب في ثابت، وتكامل الثابت.

$$= 100 \ln|t+1| + 5t + C$$

الخطوة 2 : أجد ثابت التكامل C

قاعدة الاقتران

$$R(t) = 100 \ln|t+1| + 5t + C$$

بتعويض $t = 0 , R(0) = 0$

$$0 = 100 \ln|0+1| + 5(0) + C$$

بحل المعادلة لـ C

$$C = 0$$

إذن الاقتران الذي يمثل عدد براميل النفط (بالآلاف) في السنة هو :

$$R(t) = 100\, ln\,|t+1| + 5t$$

الخطوة 3 : أجد $R(9)$

قاعدة الاقتران

$$R(t) = 100 \ln|t+1| + 5t$$

بتعويض $t = 9$

$$R(9) = 100 \ln|9+1| + 5(9)$$

باستعمال الآلة الحاسبة

$$\approx 275$$

إذن عدد براميل النفط المنتجة بعد 9 سنوات من بدء الضخ من البئر هو : 275 ألف برميل تقريباً.

أتحقَّق من فهمي

سكان : أشارت دراسة إلى أن عدد السكان في إحدى القرى يتغير سنوياً بمعدل يمكن نمذجته بالاقتران $P'(t) = 105e^{0.03t}$ حيث t عدد السنوات منذ عام 2010 و $P(t)$ عدد السكان أجد عدد سكان القرية عام 2020 علماً بأن عدد سكانها عام 2010 م هو 3500 شخص.

✓ الحل

تكامل اقترانات صورة $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

تعلمت من الأمثلة السابقة أن

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

وهذا يمثل قاعدة يمكن استعمالها لإيجاد تكاملات مجموعة أوسع من الاقترانات مثل الاقترانات التي تكتب في صورة:

$$k\frac{f'(x)}{f(x)}$$

أي الاقترانات التي يمكن كتابتها في صورة يكون فيها السيط أحد مضاعفات مشتقة المقام؛ وذلك بملاحظة أن

$$\frac{d}{dx}(\ln|x| = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مفهوم أساسي

تكامل اقترانات في صورة $\frac{f'(x)}{f(x)}$

إذا كان $f(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، $f(x) \neq 0$ فإن

$$\int \frac{f'(x)}{dx}(\ln|f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال5

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$

✓ الحل

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \ln|x^3+5| + C$$

② $\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx$

الحل ✓

بإعادة كتابة الاقتران في صورة: $k\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{6x}{x^2+9}\,dx = 3\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

بالتبسيط

$$= 3\ln|x^2+9| + C$$

③ $\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx$

الحل ✓

بالضرب في 2 ، والقسمة على 2

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\times(x-1)}{x^2-2x+2}\,dx$$

باستعمال خاصية التوزيع

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx$$

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + C$$

④ $\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx$

الحل ✓

تكامل $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\int \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = \ln|e^x-1| + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاًّ من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx$

الحل ✓

ⓑ $\int \frac{9x^2}{x^3+8}\,dx$

الحل ✓

ⓒ $\int \frac{x+1}{4x^2+8x}\,dx$

الحل ✓

ⓓ $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$

الحل ✓

التكاملات المحدود للاقترانات الخاصة

يمكنني إيجاد التكامل المحدود لكل من الاقترانات الخاصة التي تعلمت إيجاد تكاملاتها غير المحدود في هذا الدرس .

مثال6

أجد قيمة كلاً من التكاملات الآتية:

① $\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)\,dx$

الحل ✓

تكامل الاقتران الأسي الطبيعي المضروب في ثابت واقتران القوة

$$\int_0^1 (6e^{-3x} + 12x^3)dx = (-2e^{-3x} + 3x^4)\Big|_0^1$$

بالتعويض

$$= \left(-2e^{-3(1)} + 3(1)^4\right) - \left(-2e^{-3(0)} + 3(0)^4\right)$$

بالتبسيط

$$= -2e^{-3} + 5$$

② $\int_{-1}^{2} (x+1)^3\,dx$

الحل ✓

③ $\int_2^3 \frac{1}{7-2x}\,dx$

الحل ✓

أتحقّق من فهمي

أجد قيمة كلاً من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int_0^2 (4e^{2x} + 7)\ dx$

الحل ✓

ⓑ $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{6x+1}}\ dx$

الحل ✓

ⓒ $\int_0^4 \frac{8x}{x^2+1}\ dx$

الحل ✓

أتدرب وأحل المسائل

أجد كلاً من التكاملات الآتية :

① $\int \left(\frac{1}{2}e^x + 3\right) dx$

الحل ✓

② $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right) dx$

الحل ✓

③ $\int (e^x + 1)^2\, dx$

الحل ✓

④ $\int \frac{1}{x}(x + 2)\, dx$

الحل ✓

⑤ $\int \left(\frac{4}{x^3} + \frac{5}{x}\right) dx$

الحل ✓

⑥ $\int \left(\sqrt{x} + 3e^{6x} - \frac{7}{x}\right) dx$

الحل ✓

⑦ $\int \left(\frac{3}{x+1} - 5e^{-2x}\right) dx$

الحل ✓

⑧ $\int \frac{1}{\sqrt{2x - 3}}\, dx$

الحل ✓

⑨ $\int (\sin(2x-3) + e^{6x-4})\, dx$

الحل ✓

⑩ $\int 4\cos(6x+1)\, dx$

الحل ✓

⑪ $\int \frac{\sin x + 3\cos x}{4}\, dx$

الحل ✓

⑫ $\int (e^{6x} + (1-2x)^6)\, dx$

الحل ✓

⑬ $\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

الحل ✓

⑭ $\int \frac{x^2}{x^3-3}\, dx$

الحل ✓

⑮ $\int \frac{x^2-x}{2x^3-3x^2+12}\, dx$

الحل ✓

⑯ $\int \frac{e^x + 7}{e^x} \, dx$

الحل ✓

⑰ $\int \frac{1}{5 - \frac{1}{4}x} \, dx$

الحل ✓

⑱ $\int \left(4x^3 + 2 + 3\sin(5 - 3x)\right) dx$

الحل ✓

⑲ $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3} \, dx$

الحل ✓

⑳ $\int \frac{3}{(1 - 4x)^2} \, dx$

الحل ✓

㉑ $\int \frac{1 + xe^x}{x} \, dx$

الحل ✓

أجد قيمة كلاً من التكاملات الآتية :

㉒ $\int_{1}^{2}\left(2x+3e^{x}-\frac{4}{x}\right)dx$

الحل ✓

㉓ $\int_{0}^{5}\frac{x}{x^{2}+10}dx$

الحل ✓

㉔ $\int_{3}^{4}(2x-6)^{4}dx$

الحل ✓

㉕ يتحرك جسيم في مسار مستقيم وتعطى سرعته المتجهه بالاقتران: $v(t)=e^{-2t}$ حيث t الزمن بالثواني و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم 2 m ، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

الحل ✓

في كل مما يأتي المشـــتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ونقطة يم بها منحنى $y=f(x)$ أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$.

(26) $f'(x)=5e^x \; ; \left(0,\frac{1}{2}\right)$

الحل ✓

(27) $f'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2} \; ; (1,-1)$

الحل ✓

(28) $f'(x)=e^{-x}+x^2 \; ; (0,4)$

الحل ✓

㉙ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{3}{x+e}$ فأجد قعدة العلاقة y علماً بأن منحناها يمر بالنقطة (e, e^2)

✓ الحل

بيئة : في دراسة تناولت أسماكاً في بحيرة تبين أن عدد الأسماك $P(t)$ يتغير بمعدل $P'(t) = -0.51e^{-0.03r}$ حيث t الزمن بالسنوات بعد بدء الدراسة :

㉚ أجد قاعدة الاقتران $P(t)$ عند أي زمن t علماً بأن عدد الأسماك عند بدء الدراسة هو 1000 سمكة.

✓ الحل

㉛ أجد عدد الأسماك بعد 10 سنوات من بدء الدراسة.

✓ الحل

طب: يلتئم جرح جلدي بمعدل يكن نمذجته بالاقتران $A'(t) = -0.9e^{-0.1t}$ حيث t عدد الأيام بعد الإصابة بالجرح و $A(t)$ مساحة سطح الجرح بالسنتيمتر المربع:

㉜ أجد قاعدة الاقتران $A(t)$ عند أي زمن t علماً بأن مساحة سطح الجرح عند الإصابة هي $9\ \text{cm}^2$

✓ الحل

㉝ أجد مساحة سطح الجرح بعد 5 أيام من الأصابة.

✓ الحل

مهارات التفكير العليا

㉞ أكتشف الخطأ : أوجد أحمد ناتج التكامل : $\int \frac{1}{2x}$ وكان حله على النحو التالي:

$$\int \frac{1}{2x}\,dx = \int \frac{2 \times 1}{2x}\,dx$$

$$= \int \frac{2}{2x}\,dx$$

$$= \ln|2x| + C$$

أكتشف الخطأ في حل احمد ثم أصححه

✓ الحل

تحدٍ: أجد كل تكامل مما يأتي:

㉟ $\int \sqrt{e^x}\ dx$

✓ الحل

㊱ $\int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\ dx$

✓ الحل

㊲ $\int (x^2+2x+1)^5 \, dx$

✓ الحل

㊳ أكتشـــف المختلف : أي التكاملات الآتية مختلف، مبرراً إجابتك؟

$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ $\quad \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

$\int (x-1)^3 \, dx$ $\quad \int \frac{1}{x+1} dx$

✓ الحل

كتاب التمارين

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية :

① $\int \frac{1-x^2}{5x} dx$

② $\int (5e^x+4)dx$

③ $\int (1-e^{2x-3})dx$

④ $\int (\sin 2x - \cos 2x)dx$

⑤ $\int \frac{3}{2x-1} dx$

⑥ $\int (5 - \sin(5 - 5x))dx$

⑦ $\int \dfrac{1}{\frac{1}{3}x - 2}\, dx$

⑧ $\int \left(2x - 1 + \dfrac{8}{5x + 4}\right) dx$

⑨ $\int \left(3\cos x + \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{x^2}\right) dx$

⑩ $\int (3x + 2)^5 dx$

⑪ $\int \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 5}\, dx$

⑫ $\int \left(e^{2x} - \dfrac{1}{2}\sin(2x - 1)\, dx\right)$

⑬ $\int (\sin(2x + 3) + \cos(3x + 2))dx$

⑭ $\int \left(\dfrac{1}{8}x^{3/2} - \dfrac{4}{x}\right) dx$

⑮ $\int \dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}\, dx$

? أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية :

⑯ $\int_0^1 \sqrt{1 + 7x}\, dx$

⑰ $\int_0^1 e^x (4 - e^x)dx$

⑱ $\int_1^3 \left(1+\frac{1}{x}\right) dx$

⑲ إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 6e^{2x} + 2e^{-x}$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علمًا بأنَّ منحناها يمرُّ بالنقطة $(0, 2)$.

أجد قاعدة الاقتران $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي،علمًا بأنَّ منحناه يمرُّ بالنقطة المعطاة:

⑳ $f'(x) = e^{-x}; (0, 3)$

㉑ $f'(x) = \frac{3}{x} - 4; (1, 0)$

㉒ $f'(x) = 4e^{x} - 2; (0, 1)$

㉓ تلوُّث: يُعالَج التلوُّث في بحيرة باستعمال مضاد للبكتيريا. إذا كان عدد الخلايا البكتيرية الضارَّة لكل ملّيلتر من الماء في البحيرة يتغيَّر بمُعدَّل: $N'(t) = -\frac{2000t}{1+t^2}$، حيث $N(t)$ عدد الخلايا البكتيرية لكل ملّيلتر من الماء بعد t يومًا من استعمال المضاد، فأجد $N(t)$، علمًا بأنَّ العدد الابتدائي للخلايا هو 5000 خلية لكل ملّيلتر.

㉔ أُحـدِّد أوجـه الاختلاف بين التكاملين الآتيين من دون إيجاد التكامل:

$\int (3 \sin (3x+1))\, dx$ $\qquad$ $\int (3 \sin 3x + 1)\, dx$

الدرس السادس : التكامل بالتعويض

الاقتران الأصلي

مفهوم أساسي الاقتران الأصلي

أذا كان $F(x)$ اقتراناً أصلياً للاقتران المتصل $f(x)$ فإن أي اقتران أصلي آخر للاقتران $f(x)$ يكتب في صورة : $G(x) = F(x) + C$ حيث C ثابت :

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x) + C]$$

مسألة اليوم :

يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض ، حيث C مَقيسة بالملّيغرام لكل سنتيمتر مُكعَّب (mg/cm^3) . اذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل : $C'(t) = \frac{0.3t}{\sqrt{t^2+16}}$ ، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثلاث الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض .

✓ الحل

التكامل بالتعويض

تعلمت سابقاً أن التكامل يستعمل في إيجاد اقتران أصلي للاقتران المُكامَل ، وذلك بالبحث عن اقتران ينتج من مشتقته الاقتران المُكامَل . غير أنَّه لا يمكن إيجاد اقتران أصلي لبعض التكاملات بصورة مباشرة ، مثل :

$$\int 2x(x^2-3)^5\,dx$$

لذا يتعيَّن استعمال طرائق أخرى للتكامل ، مثل التكامل بالتعويض (integration by substitution) ، وهي طريقة تتضمَّن استعمال مُتغيِّر جديد بدلاً من مُتغيِّر التكامل .

يُمكن إيجاد :

$$\int 2x(x^2-3)^5\,dx$$

باستعمال مُتغيِّر جديد ، وليكن u ، بدلاً من المُتغيِّر x ، باتِّباع الخطوات الآتية :

الخطوة 1 : أفترض أن u هو المقدار المرفوع إلى الأس 5 ؛ أي انَّ : $u = x^2 - 3$.

الخطوة 2 : أجد مشتقة u ، وهي : $\frac{du}{dx} = 2x$.

الخطوة 3 : أحُلُّ المعادلة لـ dx : $dx = \frac{du}{dx}$.

الخطوة 4 : أستعمل المُتغيِّر u بدلاً من المُتغيِّر x في التكامل .

بتعويض $u = x^2 - 3\,,\, dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x(x^2-3)^5 dx = \int 2x(u)^5 \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط

$$= \int u^5\,du$$

تكامل اقتران القوّة

$$= \frac{1}{6}u^6 + C$$

بتعويض $u = x^2 - 3$

$$= \frac{1}{6}(x^2-3)^6 + C$$

ألاحظ من : $\int 2x(x^2-3)^5\,dx$ أن $(2x)$ هو مشتقة (x^2-3) .

بوجه عام ، يُمكن حل أي تكامل بطريقة التعويض إذا أمكن كتابته في صورة :

$$\int f(g(x))\,g'(x)dx$$

مفهوم أساسي

التكامل بالتعويض للتكاملات غير المحدودة

أذا كان $u = g(x)$ اقتراناً قابلاً للاشتقاق ، ومداه الفترة I ، وكان f اقتراناً متصلاً على I ، فأن :

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)du$$

يمكن تلخيص خطوات حل التكامل بالتعويض كما يأتي :

مفهوم أساسي

خطوات حل التكامل بالتعويض

الخطوة 1 : أُحدِّد التعويض u الذي يُمكن به تبسيط المُكامَل .

الخطوة 2 : أُعبِّر عن المُكامَل بدلالة u و du ، وأحذف مُتغيِّر التكامل الأصلي ومشتقته حذفاً كاملاً ، ثم أكتب المُكامَل الجديد في أبسط صورة.

الخطوة 3 : أجد التكامل الجديد .

الخطوة 4 : أُعبِّر عن الاقتران الأصلي الذي أوجدته في الخطوة السابقة باستعمال المُتغيِّر الأصلي ، عن طريق التعويض .

مثال1

أجد كُلاً من التكاملات الآتية :

① $\int 3x^2(x^3+1)^7\,dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^3 + 1$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

بتعويض $u = x^3 + 1 \,, dx = \frac{du}{3x^2}$

$$\int 3x^2(x^3+1)^7\,dx = \int 3x^2(u)^7 \times \frac{du}{3x^2}$$

بالتبسيط $= \int u^7\,du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{1}{8}u^8 + C$

بتعويض $u = x^3 + 1$

$$= \frac{1}{8}(x^3+1)^8 + C$$

② $\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^2 + 6$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بتعويض $u = x^2 + 6 \,, dx = \frac{du}{2x}$

$$\int 2x\sqrt{x^2+6}\,dx = \int 2x\sqrt{u} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط $= \int \sqrt{u}\,du$

الصورة الأسية $= \int u^{1/2}\,du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{2}{3}u^{3/2} + C$

بتعويض $u = x^2 + 6$

$$= \frac{2}{3}(x^2+6)^{3/2} + C$$

الصورة الجذرية $= \frac{2}{3}\sqrt{(x^2+6)^3} + C$

③ $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = \sin x$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

بتعويض $u = \sin x \,, dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx = \int \cos x\, e^{u} \times \frac{du}{\cos x}$$

بالتبسيط $= \int e^u\,du$

تكامل الاقتران الأسي الطبيعي $= e^u + C$

بتعويض $u = \sin x$

$$= e^{\sin x} + C$$

④ $\int \frac{\ln x}{x} dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = \ln x$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x\,du$$

بإعادة كتابة المُكامَل

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \times \ln x\, dx$$

بتعويض $u = \ln x \;, dx = x\,du$

$$\int \frac{1}{x} \times u \times x\, dx = \int 3x^2 (u)^7 \times \frac{du}{3x^2}$$

بالتبسيط $= \int u\, du$

تكامل اقتران القوَّة $= \frac{1}{2} u^2 + C$

بتعويض $u = \ln x$ $= \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$

⑤ $\int x^4 \sin(x^5 - 8)\, dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^5 - 8$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4}$$

بتعويض $u = x^5 - 8 \,, dx = \frac{du}{5x^4}$

$$\int x^4 \sin(x^5 - 8)\, dx = \int x^4 \sin(u) \times \frac{du}{5x^4}$$

بالتبسيط $= \int \frac{1}{5} \sin u \; du$

تكامل $\sin u$ المضروب في ثابت

$$= -\frac{1}{5} \cos u + C$$

بتعويض $u = x^5 - 8$

$$= -\frac{1}{5} \cos(x^5 - 8) + C$$

⑥ $\int \sin^3 x \cos x\, dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = \sin x$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

بتعويض $u = \sin x \;, dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\int \sin^3 x \cos x\, dx = \int u^3 \times \cos x \times \frac{du}{\cos x}$$

بالتبسيط $= \int u^3\, du$

تكامل اقتران القوة $= \frac{1}{4} u^4 + C$

بتعويض $u = \sin x$

$$= \frac{1}{4} \sin^4 x + C$$

أتحقَّق من فهمي

أجد كلاً من التكاملات الآتية :

ⓐ $\int 6x^2\,(2x^3-3)^4\,dx$

✓ الحل

ⓑ $\int x\,e^{x^2+1}\,dx$

✓ الحل

ⓒ $\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x}}\,dx$

✓ الحل

ⓓ $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

✓ الحل

ⓔ $\int x^3 \cos(x^4 - 5)\ dx$

✓ الحل

ⓕ $\int \cos^4 x \sin x\ dx$

✓ الحل

تعلمت سابقاً أن الشـــرط الأوَّلي هو نقطة تُحقِّق الاقتران الأصـلي ، ويُمكن بتعويضـها إيجاد قيمة ثابت التكامل C ، ويُمكن بها أيضـاً إيجاد الاقتران الأصلي الوحيد الذي يُحقِّق شرط المسألة .

مثال2 من الحياة

أسعار: يُمثِّل الاقتران $p(x)$ سعر حذاء رياضي بالدينار، حيث x عدد الأحذية المَبيعة بالمئات.
إذا كان: $p'(x) = \dfrac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$ هو مُعدَّل التغير في سـعر الحذاء ، فأجد $p(x)$ ، علماً بأنَّ سـعر الحذاء الواحد 30 JD عندما يكون عدد الأحذية المَبيعة 400 حذاء.

✓ الحل

الخطوة 1 أجد تكامل الاقتران : $p'(x)$

$$p(x) = \int \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$p(x) = \int p'(x)dx$$

أفترض أنَّ: $u = 9 + x^2$. ومن ثم، فإنَّ:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

بتعويض $u = 9 + x^2\ , dx = \dfrac{du}{2x}$

$$p(x) = \int \frac{-136x}{\sqrt{9+x^2}}dx = \int \frac{-136x}{\sqrt{u}} \times \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط ، والصورة الأُسِّية

$$= -68 \int u^{-1/2} du$$

تكامل اقتـران القـوَّة المضروب في ثابت

$$= -136\, u^{-1/2+} C$$

$$= -136\sqrt{u} + C$$

الصورة الجذرية

بتعويض $9 + x^2 = u$

$$= -136\sqrt{9+x^2} + C$$

الخطوة 2 أجد ثابت التكامل C.

قاعدة الاقتران $P(x) = -136\sqrt{9+x^2} + C$

بتعويض $x = 4\ ,p(4) = 30$

$$30 = -136\sqrt{9+(4)^2} + C$$

بالتبسيط $30 = -680 + C$

بحل المعادلة $C = 710$

إذن، قاعدة الاقتران الذي يُمثل سعر الحذاء هو :

$$p(x) = -136\sqrt{9+x^2} + 710$$

أتحقَّق من فهمي

تجارة: يُمثل الاقتران $p(x)$ سعر القطعة الواحدة (بالدينار) من منتج معين، حيث x عدد القطع المَبيعــة (بالمئات) من المنتج. إذا كان : $p'(x) = \dfrac{-300x}{\sqrt{(36+x^2)^3}}$ هو معدل التغير في سـعر القطعة الواحدة من المنتج، فأجد $p(x)$، علماً بأنَّ سـعر القطعة الواحدة JD 75 عندما يكون عدد القطع المَبيعة 800 قطعة .

✓ الحل

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

توجـد طريقتـان لإيجـاد قيمـة تكامـل محـدود بالتعويض، همـــا : إيجاد التكامل أولاً ثم تعويض حدود التكامـــل، أو تغيير حدود التكامل عنـــد مُتغيِّر التكامل، وهـــذه الطريقة هي أكثر تفضيلاً .

مفهوم أساسي

التكامل بالتعويض للتكاملات المحدودة

إذا كان الاقتران g' متصلاً على الفترة $[a, b]$ وكان f متصلاً على مدى $u = g(x)$ ، فإنَّ :

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$$

مثال3

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية :

① $\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)^3\ dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^2 + 1$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

أغيِّر حدود التكامل :

الحد العلوي: $x = 2 \Rightarrow u = (2)^2 + 1 = 5$

الحد السفلي: $x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 1 = 2$

بتعويض $u = x^2 + 1\ , dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_{1}^{2} 4x(x^2+1)^3\, dx = \int_{2}^{5} 4x\,(u)^3 \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط $= 2\int_{2}^{5} u^3\ du$

تكامل اقتران القوة المضروب في ثابت $= \frac{1}{2}u^4 \Big|_{2}^{5}$

بالتعويض $= \frac{1}{2}(5^4 - 2^4)$

بالتبسيط $= 304.5$

② $\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^2 + 2x$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2}$$

أغيِّر حدود التكامل :

الحد العلوي: $x = 1 \Rightarrow u = (1)^2 + 2(1) = 3$

الحد السفلي: $x = 0 \Rightarrow u = (0)^2 + 2(0) = 0$

بتعويض $u = x^2 + 2x\ , dx = \frac{du}{2x+2}$

$$\int_{0}^{1} (x+1)\sqrt{x^2+2x}\, dx$$

$$= \int_{0}^{3} (x+1)\sqrt{u}\, \frac{du}{2x+2}$$

بإخراج 2 عاملاً مشتركاً من المقام

$$= \int_{0}^{3} (x+1)\sqrt{u}\, \frac{du}{2(x+1)}$$

بالتبسيط $= \frac{1}{2}\int_{0}^{3} \sqrt{u}\, du$

الصورة الأسية $= \frac{1}{2}\int_{0}^{3} u^{1/2}\, du$

تكامل اقتران القوة $= \frac{1}{3}u^{3/2}\Big|_{0}^{3}$

الصورة الجذرية $= \frac{1}{3}\sqrt{u^3}\Big|_{0}^{3}$

بالتعويض $= \frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{0^3})$

بالتبسيط $= \sqrt{3}$

③ $\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx$

✓ الحل

أفترض أنَّ : $u = x^2$. ومن ثم ، فإنَّ :

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

أغيِّر حدود التكامل :

الحد العلوي: $x = 3 \Rightarrow u = (3)^2 = 9$

الحد السفلي: $x = -1 \Rightarrow u = (-1)^2 = 1$

بتعويض $u = x^2 , dx = \frac{du}{2x}$

$$\int_{-1}^{3} 8x\, e^{x^2}\, dx = \int_{1}^{9} 8x\ e^{u}\ \frac{du}{2x}$$

بالتبسيط $= 4\int_1^9 e^u\ du$

تكامل الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي المضروب في ثابت

$$= 4\, e^u \Big|_1^9$$

بالتعويض $= 4\,(e^9 - e^1)$

أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة كلاً من التكاملات الآتية:

ⓐ $\int_{0}^{1} x^2 (x^3 - 1)^4\ \ dx$

✓ الحل

ⓑ $\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{(2 - x^4)^7}\ dx$

✓ الحل

ⓒ $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

✓ الحل

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

① $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

الحل ✓

② $\int x^2\,(2x^3+5)^4\,dx$

الحل ✓

③ $\int 3x\sqrt{x^2+7}\,dx$

الحل ✓

④ $\int x^6\,e^{1-x^7}\,dx$

الحل ✓

⑤ $\int \frac{x^4}{(x^5+9)^3}\,dx$

الحل ✓

⑥ $\int (3x^2-1)\,e^{x^3-x}\,dx$

الحل ✓

⑦ $\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-2x+4}}\,dx$

الحل ✓

⑧ $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

الحل ✓

⑨ $\int \sin x\,(1+\cos x)^4\,dx$

الحل ✓

⑩ $\int \sin^5 2x \cos 2x\ dx$

الحل ✓

⑪ $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx$

الحل ✓

⑫ $\int \frac{\cos x}{e^{\sin x}}\,dx$

الحل ✓

⑬ $\int e^x(2+e^x)^5 \, dx$

الحل ✓

⑭ $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$

الحل ✓

⑮ $\int (3x^2-2x-1)(x^3-x^2-x)^4 \, dx$

الحل ✓

أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

⑯ $\int_0^2 (2x-1)\, e^{x^2-2} \, dx$

الحل ✓

⑰ $\int_{1}^{2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\, dx$

✓ الحل

⑱ $\int_{e}^{e^3} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\, dx$

✓ الحل

⑲ $\int_{0}^{1} (x^3 + x)\sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$

✓ الحل

㉑ $\int_{1}^{2} \frac{2x+1}{(x^2+x+4)}\, dx$

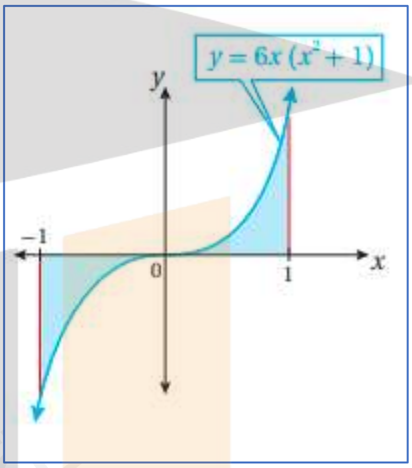
الحل ✓

⑳ $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$

الحل ✓

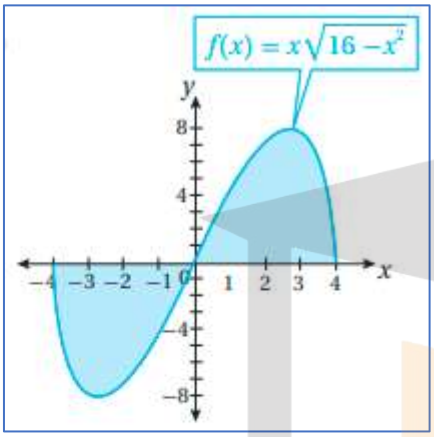
أجد مســـاحة المنطقة المُظلَّلة في كلٍّ من التمثيلين البيانيين الآتيين :

(22)



✓ الحل

(23)



✓ الحل

في كلٍّ مما يأتي المشـتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونـقـطـة يـمـرُّ بـهـا مـنـحـنى $y = f(x)$. أســـــتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

㉔ $f'(x) = xe^{4-x^2}; (-2, 1)$

الحل ✓

㉕ $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}; (0, -1)$

الحل ✓

㉖ يتحرك جُسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{-2t}{\sqrt{(1+t^2)^3}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجُسيم 4 m ، فأجد موقع الجُسيم بعد t ثانية من بَدء الحركة .

✓ الحل

㉗ زراعة: يمثل الاقتران $V(t)$ سعر دونم أرض زراعية في الأغوار الأردنية (بالدينار) بعد t سنة من الآن . إذا كان : $V'(t) = \frac{0.4t^3}{\sqrt[3]{0.2t^4 + 8000}}$ هو معدل التغير في سعر دونم الأرض ، فأجد $V(t)$ ، علماً بأنَّ سعره الآن JD 5000 .

✓ الحل

⑱ ســــكّان : أشارت دراســة إلى أن عدد السكّان في إحـدى المـدن يتغيّر ســنوياً بمعـدل يمكن نمـذجتـه بـالاقتران : $P'(t) = \frac{4e^{0.2t}}{\sqrt{4+e^{0.2t}}}$ ، حيث t عدد السـنوات منذ عام 2015، و $P(t)$ عدد الســكّان بالآلاف . أجد مقدار الزيادة في عدد سكّان المدينة من عام 2015م إلى عام 2025م.

✓ الحل

مهارات التفكير العليا

㉙ أكتشف المُختلف: أيُّ التكاملات الآتية مُختلف، مُبرِّراً إجابتي ؟

$\int 3x^2 e^{1+x^3}\, dx$	$\int \frac{2x+3}{(x^2+3x)^2}\, dx$
$\int x(x^3+1)\, dx$	$\int x\cos x^2\, dx$

✓ الحل

⑶⓪ **أكتشف الخطأ: أوجدت سعاد ناتج التكامل: $\int_0^1 8x(x^2+1)^3$ ، وكان حَلُّها على النحو الآتي:**

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx = \int_0^1 8x \times u^3 \times \frac{du}{2x}$$
$$= \int_0^1 4u^3\,du$$
$$= u^4 \Big|_0^1$$
$$= 1$$

أكتشف الخطأ في حل سعاد، ثم أصحِّحه .

✓ الحل

⑶① **تحدَّ: إذا كان : $\int_0^k kx^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{2}{3}(e^8 -)$ ، فأجد قيمة الثابت k .**

✓ الحل

كتاب التمارين

♦ أجد كلاً من التكاملات الآتية :

① $\int x\sqrt{x^2+3}\,dx$

② $\int x^4 e^{x^5+2}\,dx$

③ $\int (x+1)(x^2+2x+5)^4\,dx$

④ $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

⑤ $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx$

⑥ $\int \sin x\sqrt{1+3\cos x}\,dx$

♦ أجد قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية :

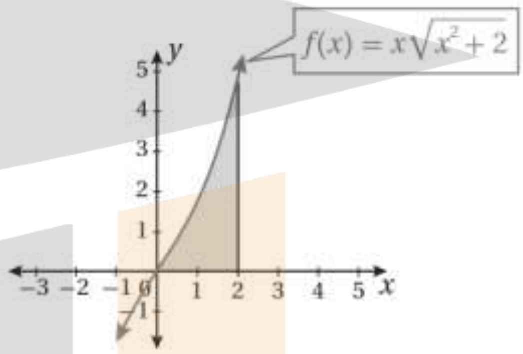
⑦ $\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+1)^2}\,dx$

⑧ $\int_0^1 x\sqrt{3x^2+2}\,dx$

⑨ $\int_e^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

⑩ $\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5\,dx$

⑪ أجد مساحة المنطقة المُظلَّلة في التمثيل البياني المجاور.



⑫ الإيراد الحدّي: يُمثِّل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.1x^2}$ الإيراد الحدّي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علمًا بأنَّ $R(0) = 0$.

♦ يُمثِّل الاقتران $f'(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المارِّ بالنقطة المعطاة. أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

⑬ $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$

⑭ $f'(x) = x^2\, e^{-0.2x^3}, \left(0, \frac{3}{2}\right)$

⑮ يتحرَّك جُسَيْم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا بدأ الجُسَيْم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بَدْء الحركة.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي :

① قيمة : $\int \frac{x^3-1}{x^2}$ هي :

ⓐ $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+C$ ⓑ $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

ⓒ $x^2-\frac{1}{x}+C$ ⓓ $x^2+\frac{1}{x}+C$

② اذا كان : $\int_0^2 kx\,dx = 6$ ، فإن قيمة الثابت k هي :

ⓐ 1 ⓑ 2

ⓒ 3 ⓓ 4

③ قيمة : $\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$ هي :

ⓐ $3\frac{3}{4}$ ⓑ $21\frac{1}{4}$

ⓒ $4\frac{1}{2}$ ⓓ $22\frac{1}{2}$

④ قيمة : $\int_0^2 e^{2x}\,dx$ هي :

ⓐ e^4-1 ⓑ e^4-2

ⓒ $2e^4-2$ ⓓ $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}$

⑤ قيمة : $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ هي :

ⓐ -2 ⓑ $-\frac{7}{16}$

ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 2

⑥ التكامل المحدود الذي يُمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران : $f(x)=4x-x^2$ ، والمحور x هو :

ⓐ $\int_4^0 (4x-x^2)\,dx$

ⓑ $\int_0^4 (4x-x^2)\,dx$

ⓒ $\int_1^0 (4x-x^2)\,dx$

ⓓ $\int_0^1 (4x-x^2)\,dx$

أجد كُلًّا من التكاملات الآتية :

⑦ $\int 3x^{-1/2}\,dx$

⑧ $\int (8x-10x^2)\,dx$

⑨ $\int \frac{5}{x^3}\,dx$

⑩ $\int \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

⑪ $\int (5x^2 - 2e^{7x})\, dx$

⑫ $\int \left(2x + 3e^{4x+5}\right) dx$

⑬ $\int \frac{x^2 - 6}{2x} dx$

⑭ $\int \frac{1}{(x-1)^3} dx$

⑮ $\int \frac{e^x}{e^x + 4} dx$

⑯ $\int 2x\, e^{x^2-1}\, dx$

⑰ $\int 4e^x\,(3 + e^{2x})\, dx$

⑱ $\int \frac{1+x}{(4+2x+x^2)^8}\, dx$

⑲ $\int x \sin(3 + x^2)\, dx$

⑳ $\int (3 \sin 3x - 4 \cos x)\, dx$

㉑ $\int (x - \sin(7x+2))\; dx$

㉒ $\int (e^{3x} - e^{-3x})\, dx$

㉓ $\int \frac{2}{1-5x} dx$

㉔ إذا كان ميـل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 4x - 2$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(0, 3)$.

㉕ الإيراد الحدِّي : يمثل الاقتران $R'(x) = 4x - 1.2x^2$ الإيراد الحدِّي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المَبيعة، و$R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(20) = 30000$.

㉖ يتحرك جُسيم من السكون ، ويعطى تسارعه بالاقتران : $a(t) = \cos(3t - \pi)$ حيث t الزمن بالثواني، و a تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجُسيم بعد t ثانية من بَدء الحركة .

إذا كان :

$$\int_{-5}^{-1} f(x)\, dx = 4 \,,\ \int_{-5}^{5} f(x)\, dx = 10 \,,\ \int_{-5}^{-1} g(x)\, dx = 11$$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي :

㉗ $\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$

㉘ $\int_{-5}^{-1} 7f(x)\, dx$

㉙ $\int_{-1}^{-5} (3f(x) - g(x))\, dx$

أجد قيمة كُلٍّ من التكاملات الآتية :

㉚ $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)\, dx$

㉛ $\int_{1}^{3} \frac{x^3+2x^2}{x}\,dx$

㉜ $\int_{1}^{5} |3-x|\,dx$

㉜ $\int_{1}^{5} |3-x|\,dx$

㉝ $\int_{1}^{4} \frac{20}{\sqrt{x}}\,dx$

㉞ $\int_{2}^{5} 3x(x+2)\,dx$

㉟ $\int_{2}^{3} 2\,xe^{-x^2}\,dx$

㊱ $\int_{0}^{2} \frac{3x^2}{(x^3+1)^5}\,dx$

㊲ $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2+1}\,dx$

㊳ اذا كـان : $f(x)=\begin{cases} x^2+4\,, x<0 \\ 4-x\,, x\geq 0 \end{cases}$ ،
فأجد قيمة :

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx$$

㊴ يتحرك جُسيم في مســـــار مستقيم، وتعطى ســـرعته المتجهـــة بالاقتران : $v(t)=5+e^{t-2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v ســـــرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية . إذا بدأ الجُسيم حركته مـــن نقطة الأصل ، فأجـــد موقعه بعد 3 ثوانٍ من بدء الحركة .

في كلٍّ مما يأتي المشـــــــــتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمرُّ بها منحنى $y = f(x)$. أســـتعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

40) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2\ ; (0, 6)$

41) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{20}}{x^2}\ ; (1, 400)$

42) $f'(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\ ; (1, 1)$

43) $f'(x) = 5e^x - 4\ ; (0, -1)$

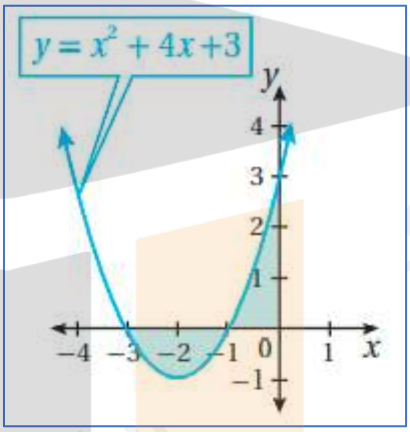
44) $f'(x) = x\sqrt{x^2 + 5}\ ; (2, 10)$

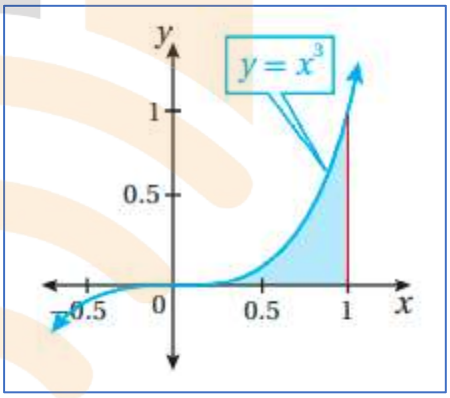
45) أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران : $f(x) = x^2 - x - 2$ ، والمحـور x ، والمســتقيمين : $x = -2$ و $x = 1$.

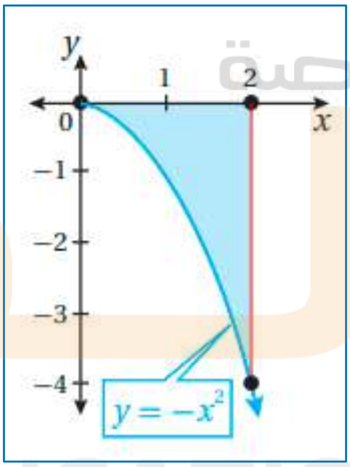
46) طـب : يمثل الاقتران $C(t)$ تركيز دواء فـــي الدم بعد t ســاعة حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالملّيغرام لكل ســــــنتيمتر مُكعَّـــب (mg/cm^3) . إذا كان تركيـــز الـــدواء فـــي دم المريض يتغيَّـــــر بمُعدَّل : $C'(t) = \dfrac{3t}{\sqrt{(t^2 + 36)^3}}$ ، فأجد مقدار التغيُّر في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

47) أجد مســاحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران : $f(x) = 3x^2 - 3x$ ، والمحور x .

أجد مســـاحة المنطقة المُظلّلة في كلٍّ من التمثيلات البيانية الآتية :

48


49


50


51