مكشف الفخامة

الفصل الاول

آ. فادي الشاقلدي

0795260051

الوحدة الأولى: الاقترانات الأسية و اللوغاريتمية

الدرس الأول: الاقترانات الأسية

1 إذا كان: $f(x) = 3^x - 1$ ، فإن $f(3)$؟

(a) 27 (b) 26

(c) 81 (d) 80

2 إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4$، فإن $f(-1)$؟

(a) -7 (b) 4

(c) $\frac{13}{3}$ (d) 7

3 إذا كان: $f(x) = 2(4)^{-x} + 5$، فإن $f(2)$؟

(a) $-\frac{39}{8}$ (b) $\frac{41}{8}$

(c) 37 (d) -37

4 إذا كان: $f(x) = 1 + 2(13)^x$، فإن $f(0)$؟

(a) 2 (b) 1

(c) 3 (d) 35

خصائص الإقتران الأسي في الصورة العامة:

(المجال و المدى)

$$f(x) = a(b)^{x-h} + k$$

- ✓ **المجال:** $R = (-\infty, \infty)$ مجموعة الأعداد الحقيقية.
- ✓ **المدى:** (k, ∞)

- ✓ ملاحظة: إذا كانت a سالبة فإن المدى $(-\infty, k)$
- ✓ ملاحظة: دائمًا إذا كان الرقم مرفوع لقوة سالبة اعكس أولًا.

5 إذا كان: $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$، فإن مجال الاقتران؟

(a) R (b) R^+

(c) R^- (d) $\{0\}$

6 إذا كان: $f(x) = -3(4)^x + 1$،فإن مجال الاقتران:

(a) $(0, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$

(c) $(-\infty, 0)$ (d) $\{0\}$

7 إذا كان: $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$،فإن مدى الاقتران:

(a) $(-\infty, 1)$ (b) $(1, \infty)$

(c) $(-\infty, 3)$ (d) $(3, \infty)$

T . FADI AL-SHAQLDI

8 إذا كان: $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$، فإن مدى الاقتران:

ⓐ $(7, \infty)$ ⓑ $(-\infty, 7)$

ⓒ $(-\infty, -7)$ ⓓ $(-7, \infty)$

9 إذا كان: $f(x) = 3 + 4(2)^x$، فإن مدى الاقتران هو:

ⓐ $(-\infty, 4)$ ⓑ $(4, \infty)$

ⓒ $(-\infty, 3)$ ⓓ $(3, \infty)$

10 إذا كان: $f(x) = -3\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 5$، فإن مدى الاقتران:

ⓐ $(5, \infty)$ ⓑ $(-\infty, 5)$

ⓒ $(-\infty, -3)$ ⓓ $(-\infty, 3)$

11 إذا كان: $f(x) = 2 - (5)^x$، فإن مدى الاقتران هو:

ⓐ $(-\infty, 2)$ ⓑ $(2, \infty)$

ⓒ $(-\infty, 1)$ ⓓ $(1, \infty)$

خصائص الإقتران الأسي في الصورة العامة

(التزايد و التناقص)

$$f(x) = a(b)^{x-h} + k$$

- ✓ يكون الاقتران **متزايدًا**: إذا كانت $b > 1$
- ✓ يكون الاقتران **متناقصًا**: إذا كانت $b < 1$

- ✓ ملاحظة:
  - إذا كانت a سالبة يكون الاقتران **متزايدًا**: إذا كانت $0 < b < 1$
  - إذا كانت a سالبة يكون الاقتران **متناقصًا**: إذا كانت $b > 1$

12 أي من الآتية هو اقتران متزايد على جميع قيم x:

ⓐ $f(x) = 7^{x-2} + 1$

ⓑ $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

ⓒ $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

ⓓ $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 5$

13 أي من الآتية هو اقتران متناقص على جميع قيم x:

ⓐ $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$

ⓑ $f(x) = (5)^{x-1} + 2$

ⓒ $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

ⓓ $f(x) = 4(5)^{-x}$

T : FADI AL-SHAQLDI

14 أي من الآتية هو اقتران متزايد على جميع قيم x:

ⓐ $f(x) = -2(3)^x + 1$

ⓑ $f(x) = -(6)^x - 4$

ⓒ $f(x) = -2(0.25)^x + 7$

ⓓ $f(x) = -2\left(\frac{9}{2}\right)^x - 1$

15 أي من الآتية هو اقتران متناقص على جميع قيم x:

ⓐ $f(x) = -\left(\frac{1}{4}\right)^x$

ⓑ $f(x) = -\frac{1}{4}(3)^{x-1} + 2$

ⓒ $f(x) = -3(0.75)^x + 2$

ⓓ $f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$

16 أي الاقترانات الآتية متزايد على جميع قيم x:

ⓐ $f(x) = -2(3)^{x+1}$

ⓑ $g(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

ⓒ $h(x) = -\left(\frac{1}{8}\right)^{-x}$

ⓓ $y = -(10)^x$

خصائص الإقتران الأسي في الصورة العامة:

$$f(x) = a(b)^{x-h} + k$$

- ✓ المقطع y: هو تعويض $x = 0$ في المعادلة
- ✓ خط التقارب الأفقي : $y = k$
- ✓ الاقتران الأسي هو اقتران واحد لواحد (حفظ)

- ✓ ملاحظة: الاقتران الأسي الذي في صورة $f(x) = b^x$ لا يقطع المحور x

17 إذا كان: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$، فإن المقطع y يساوي:

ⓐ 1 ⓑ $\frac{1}{2}$

ⓒ -1 ⓓ $-\frac{1}{2}$

18 إذا كان: $f(x) = 2(3)^{x+2} - 1$، فإن الاقتران يقطع المحور y في النقطة:

ⓐ $(0, 19)$ ⓑ $(0, 8)$

ⓒ $(0, 11)$ ⓓ $(0, 17)$

19 إذا كان: $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+6} - 6$، فإن خط التقارب الأفقي هو:

ⓐ $x = -6$ ⓑ $x = 6$

ⓒ $y = -6$ ⓓ $y = 6$

T . FADI AL-SHAQLDI

20 إذا كان: $f(x) = 1 - 2(10)^x$، فإن خط التقارب الأفقي هو:

ⓐ $y = 1$ ⓑ $y = -2$

ⓒ $y = 10$ ⓓ $y = 0$

21 خط التقارب الأفقي للاقتران: $f(x) = 4(3)^x$ هو:

ⓐ $y = 4$ ⓑ $y = 3$

ⓒ $y = 1$ ⓓ $y = 0$

22 الاقتران الأسي الذي في صورة: $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$، $b \neq 1$، يحقق أي من الآتية:

ⓐ يقطع المحورين الاحداثيين x, y

ⓑ يقطع المحور y و لا يقطع المحور x

ⓒ يقطع المحور x و لا يقطع المحور y

ⓓ لا يقطع المحورين

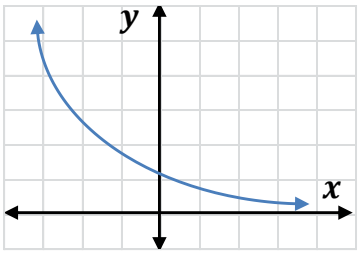
الإجابات

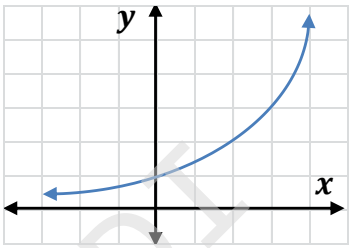
1.	a	**b**	c	d
2.	a	b	c	**d**
3.	a	**b**	c	d
4.	a	b	**c**	d
5.	**a**	b	c	d
6.	a	**b**	c	d
7.	a	**b**	c	d
8.	a	b	c	**d**
9.	a	b	c	**d**
10.	a	**b**	c	d
11.	**a**	b	c	d
12.	**a**	b	c	d
13.	a	b	c	**d**
14.	a	b	**c**	d
15.	a	**b**	c	d
16.	a	**b**	c	d
17.	**a**	b	c	d
18.	a	b	c	**d**
19.	a	b	**c**	d
20.	**a**	b	c	d
21.	a	b	c	**d**
22.	a	**b**	c	d

T. FADI AL-SHAQLDI

الخصائص من الرسم:

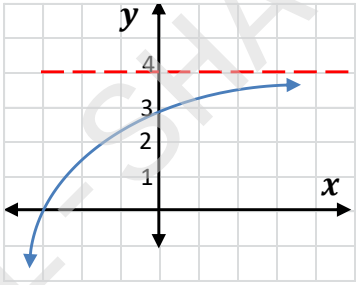
23 حدّد أي الاقترانات الآتية متزايد و أيها متناقص:

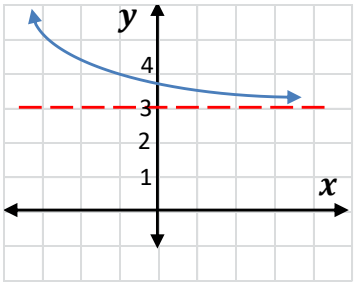




_____ _____

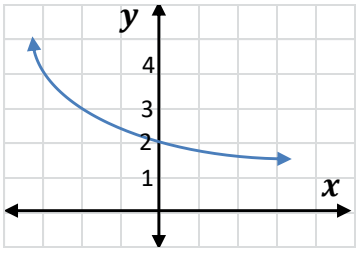
24 حدّد خط التقارب الأفقي لكل من الاقترانات الآتية:

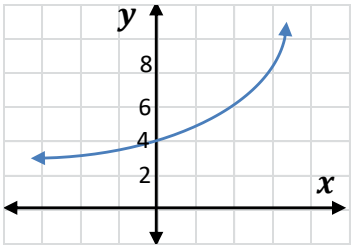




_____ _____

25 حدّد نقاط التقاطع لكل من الاقترانات الآتية





_____ _____

الأسئلة الكلامية:

ملاحظة: $0.5 = \frac{1}{2}$, $0.75 = \frac{3}{4}$, $0.25 = \frac{1}{4}$

ملاحظة: (عند بدء)← عوّض صفر في المعادلة.

(بعد كم) ← ساوي الاقتران بالقيمة المعطاة.

26 يمثل الاقتران: $f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

1. جد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة.
2. جد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.
3. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية؟

27 يمثل الاقتران: $f(x) = 7000(1.2)^{x}$ عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية، حيث x الزمن بالساعات:

1. جد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة.
2. جد عدد الخلايات البكتيرية بعد 12 ساعة.
3. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية؟

T . FADI ALSHAQLDI

27 يمثل الاقتران: $f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء المتبقية في خزّان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

1. جد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة.

2. ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{8}\ m^3$ تقريبًا؟

28 يمثل الاقتران: $P(t) = 100(0.3)^t$ نسبة المتعافين من مرضى سرطان البنكرياس، ممن هم في المرحلة المتقدمة، حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأولي للمرض:

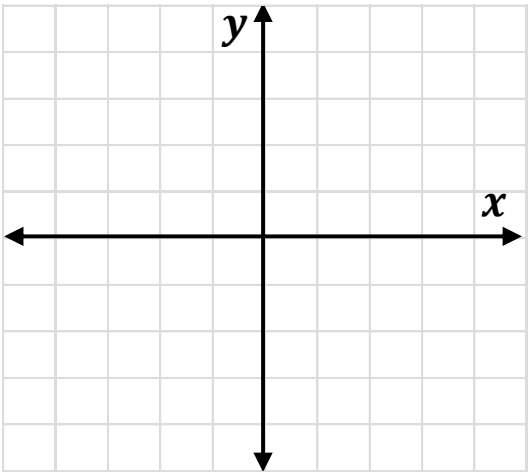
1. جد نسبة المتعافين بعد سنة من التشخيص الأولي للمرض.

2. بعد كم سنة تصبح نسبة المتعافين 9%؟

الرسم البياني:

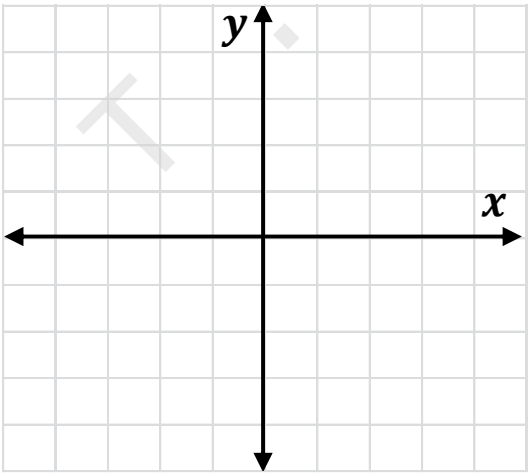
29 ارسم بيانيًا الاقتران: $f(x) = 2^x$.

x					
$f(x)$					



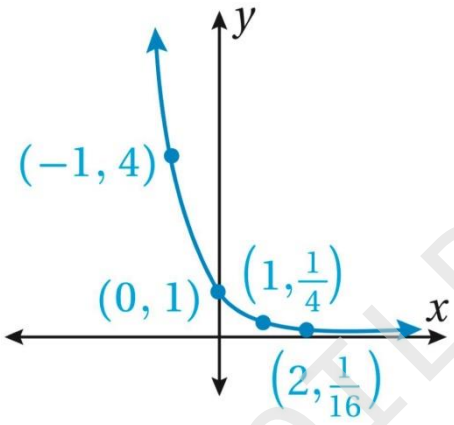
30 ارسم بيانيًا الاقتران: $f(x) = 3^{-x}$.

x					
$f(x)$					



FADI AL-SHAQLDI

31 يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران: $f(x) = a\,b^x$. جد $f(3)$.



32 اي الاقترانات الآتية مختلف؟

$y = 3^x$ $f(x) = 2(4)^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $y = 5(3)^x$

33 إذا كان الاقتران: $f(x) = a\,b^x$ أسيًّا، فاثبت أن:

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = b$$

T . FADI AL-SHAQLDI

الدرس الثاني:
النمو و الاضمحلال الأسي

النسب المئوية:

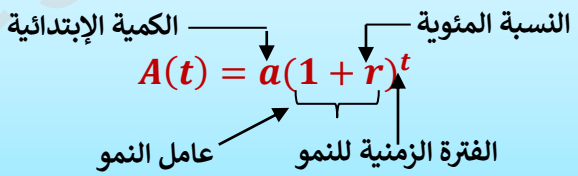
$a.bc\% = 0.0abc$

$a.b\% = 0.0ab$

$ab\% = 0.ab$

$a\% = 0.0a$

اقتران النمو الأسي



1 أي من الآتية يمثل اقتران النمو الأسي؟

ⓐ $A(t) = a(1-r)^t$ ⓑ $A(t) = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

ⓒ $A(t) = Pe^{rt}$ ⓓ $A(t) = a(1+r)^t$

2 الاقتران الذي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية هو:

ⓐ اقتران الاضمحلال الأسي

ⓑ اقتران النمو الأسي

ⓒ اقتران الربح المركب

ⓓ اقتران الربح المركب المستمر

3 في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقار ، تبيّن أن عددها في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنويًا، فإن اقتران النمو الأسي بعد t سنة يساوي: علمًا أن عددها عند بدء الدراسة هو 327 بقرة:

ⓐ $A(t) = 327(1.18)^t$

ⓑ $A(t) = 327(11.8)^t$

ⓒ $A(t) = 327(1.018)^t$

ⓓ $A(t) = 327(1.0018)^t$

4 في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام تبيّن أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنويًا، فإن عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة هو، علمًا أن عددها عند بدء الدراسة هو 1524

ⓐ 5888 ⓑ 5882

ⓒ 588 ⓓ 5880

5 استخدم 50 ألف شخصًا موقعًا إلكترونيًا تعليميًا سنة 2019 م ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة، فإن عدد مستخدمي الموقع سنة 2025 م؟

ⓐ $A(t) = 50(1.15)^6$

ⓑ $A(t) = 50000(1.15)^6$

ⓒ $A(t) = 50(1.15)^{2025}$

ⓓ $A(t) = 50000(1.15)^{2025}$

T. FADI AL-SHAQILDI

6 إذا كان الاقتران: $A(t) = a(1+r)^t$ هو اقتران النمو الأسي، فإن أي من الآتية يمثل عامل النمو:

ⓐ t ⓑ $1+r$

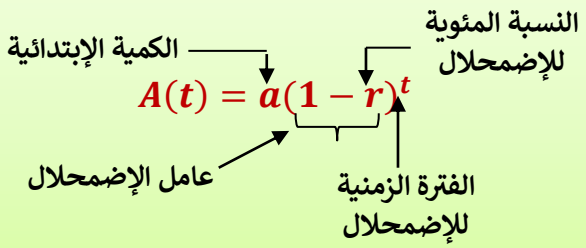
ⓒ a ⓓ r

7 استخدم 35 ألف شخصًا موقعًا إلكترونيًا تعليميًا هذه السنة، وكان الإقتران الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة هو: $A(t) = 35000(1.02)^t$ فإن النسبة المئوية لعدد مستخدمي الموقع هو:

ⓐ 0.2% ⓑ 0.02%

ⓒ 2% ⓓ 0.002%

اقتران الإضمحلال الأسي



8 أي من الآتية يمثل اقتران الإضمحلال الأسي؟

ⓐ $A(t) = a(1-r)^t$

ⓑ $A(t) = p(1+\frac{r}{n})^{nt}$

ⓒ $A(t) = pe^{rt}$

ⓓ $A(t) = a(1+r)^t$

10 الاقتران الذي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية هو:

ⓐ اقتران الاضمحلال الأسي

ⓑ اقتران النمو الأسي

ⓒ اقتران الربح المركب

ⓓ اقتران الربح المركب المستمر

11 إذا كان الاقتران: $A(t) = a(1-r)^t$ هو اقتران الاضمحلال الأسي، فإن أي من الآتية يمثل عامل الاضمحلال:

ⓐ t ⓑ $1-r$

ⓒ a ⓓ r

12 تتناقص $5g$ من عنصر الكروم بما نسبته 2.45% يوميًا نتيجة تفاعله مع الهواء، فإن كمية الكروم بعد 3 أيام تساوي

ⓐ 4.2 ⓑ 3

ⓒ 4 ⓓ 4.6

13 ينفق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 5% نتيجة إصابته بمرض ما، فإن العدد المتبقي منه بعد 4 أيام من بدء المرض: (علمًا بأن العدد الأولي في المزرعة هو 1550 دجاجة):

ⓐ $1550(0.50)^4$

ⓑ $1550(0.995)^4$

ⓒ $1550(0.95)^4$

ⓓ $1550(0.9995)^4$

T. FADI AL-SHAQLDI

14 اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ $28500\ JD$، إذا كان اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل سعر السيارة بعد t سنة هو: $A(t) = 28500(0.9755)^t$ فإن النسبة المئوية لسعر السيارة يساوي:

ⓐ 24.5% ⓑ 2.45%

ⓒ 0.245% ⓓ 0.0245%

15 يقاس الضغط الجوي بوحدة تسمى هيكتو باسكال hpa و يبلغ هذا الضغط عند سطح البحر $1000\ hpa$ و يتناقص بنسبة 12% لكل كيلومتر فوق سطح البحر:

1. اكتب اقتران الاضمحلال الأسي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلومترًا عن سطح البحر.

2. عند أي ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوي نصف قيمته عند سطح البحر؟

اقتران الربح المركب

$$A = p(1 + \frac{r}{n})^{nt}$$

المبلغ الأصلي — جملة المبلغ — عدد السنوات — عدد مرات إضافة الربح في السنة

حيث: $n = \frac{12}{\text{عدد الأشهر}}$

16 أي من الآتية يمثل اقتران الربح المركب؟

ⓐ $A(t) = a(1 - r)^t$

ⓑ $A(t) = p(1 + \frac{r}{n})^{nt}$

ⓒ $A(t) = pe^{rt}$

ⓓ $A(t) = a(1 + r)^t$

17 الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يسمى رأس المال و الفوائد المستحقة سابقًا يسمى:

ⓐ اقتران الاضمحلال الأسي

ⓑ اقتران النمو الأسي

ⓒ اقتران الربح المركب

ⓓ اقتران الربح المركب المستمر

T. FADI AL-SHAQLDI

18 استثمرت تهاني مبلغ $JD5000$ في شركة بنسبة ربح مركب تبلغ 2.25% و تضاف كل 6 أشهر، فإن الصيغة التي تمثّل جملة المبلغ بعد t سنة:

(a) $A = 5000(1.01125)^{2t}$

(b) $A = 5000(1.0225)^{12t}$

(c) $A = 5000(1.00375)^{6t}$

(d) $A = 5000(1.001875)^{12t}$

19 استثمر سليمان مبلغ $JD\ 9000$ في شركة صناعية، بنسبة ربح مركب تبلغ 1.46%، و تضاف كل 3 أشهر، فإن جملة المبلغ بعد 3 سنوات:

(a) 9402 (b) 9401

(c) 9403 (d) 9402.21

20 استثمرت هند مبلغ $JD\ 6200$ في شركة، بنسبة ربح مركب تبلغ 8.4% و تضاف كل يوم، فإن جملة المبلغ بعد t سنة:

(a) $A = 6200\left(1 + \frac{0.084}{12}\right)^{12t}$

(b) $A = 6200\left(1 + \frac{8.4}{12}\right)^{12t}$

(c) $A = 6200\left(1 + \frac{0.084}{365}\right)^{365t}$

(d) $A = 6200\left(1 + \frac{8.4}{365}\right)^{356t}$

اقتران الربح المركب المستمر

$A = pe^{rt}$

المبلغ الأصلي — عدد السنوات

جملة المبلغ — النسبة المئوية

21 أي من الآتية يمثل اقتران الربح المركب المستمر؟

(a) $A(t) = a(1-r)^t$

(b) $A(t) = p(1+\frac{r}{n})^{nt}$

(c) $A(t) = pe^{rt}$

(d) $A(t) = a(1+r)^t$

22 عملية حساب جملة المبلغ بعد إضافة الربح المركب إلى رأس المال عددًا لا نهائيًا من المرات في السنة يسمى:

(a) اقتران الاضمحلال الأسي

(b) اقتران النمو الأسي

(c) اقتران الربح المركب

(d) اقتران الربح المركب المستمر

23 أودع علي مبلغ $JD\ 4500$ في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4%، فإن جملة المبلغ بعد 10 سنوات :

(a) $A = 4500e^{0.4}$ (b) $A = 4500e^{0.04}$

(c) $A = 4500e^{0.004}$ (d) $A = 4500e^{0.0004}$

FADI AL-SHAQLDI

24 أودعت ليلى مبلغ $JD\ 8200$ في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.9% فإن جملة المبلغ بعد 9 سنوات:

ⓐ 8200 ⓑ 12745

ⓒ 12744.94 ⓓ 12775

25 أعدّ باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة، و توصّل أنه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران: $P(t) = 20e^{0.03t}$، حيث P عدد الذباب التقريبي بعد t سنة، فإن عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة، مقربًا اجابتك إلى أقرب عدد صحيح:

ⓐ 173 ⓑ 173.4

ⓒ 172 ⓓ 171

26 أوجد رامي جملة مبلغ مقداره $JD\ 250$ بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات، بنسبة ربح مركّب تبلغ 1.25%، و تضاف كل 3 أشهر، كما يأتي:

$$A = 250\left(1 + \frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$

$$= 6533.29$$ ✗

اكتشف الخطأ في حل رامي، ثم صحّحه.

27 اكتب اقترانًا يمثّل عدد المصابين بالإنفلونزا الموسمية بعد t أسبوعًا ، علمًا بأن العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع.

T . FADI AL-SHAQALDI

الدرس الثالث:
الاقترانات اللوغاريتمية

التحويل بين الصورة الأسية و الصورة اللوغاريتمية:

- إذا كان: $b^y = x \leftarrow \log_b x = y$
- إذا كان: $\log_b x = y \leftarrow b^y = x$

1 حوّل كل مما يلي من صورة لوغاريتمية إلى صورة أسية:

ⓐ $\log_2 16 = 4$

ⓑ $\log_3 \left(\frac{1}{243}\right) = -5$

ⓒ $\log_9 1 = 0$

ⓓ $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$

ⓔ $\log_{36} 6 = 0.5$

2 حوّل كل مما يلي من صورة أسية إلى صورة لوغاريتمية:

ⓐ $7^3 = 343$

ⓑ $(2)^{-5} = \frac{1}{32}$

ⓒ $17^0 = 1$

ⓓ $5^{-3} = 0.008$

ⓔ $49^{\frac{1}{2}} = 7$

ⓕ $(32)^1 = 32$

إيجاد قيمة اللوغاريتمات باستخدام الفرض:

3 جد قيمة كل مما يلي من دون استخدام الآلة الحاسبة:

① $\log_2 64$

② $\log_{36} 6$

③ $\log_{13} \sqrt{13}$

④ $\log_{10} 0.1$

T . FADI AL-SHAQLDI

4 جد قيمة كل مما يلي من دون استخدام الآلة الحاسبة:

① $\log_3 1$

② $\log_{17} \sqrt{17}$

③ $\log_5 5$

④ $7^{\log_7 5}$

⑤ $\log_b \sqrt[7]{b}$

⑥ $\log_{10}(1 \times 10^{-5})$

⑦ $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3^6}}$

⑧ $\log_{\frac{5}{3}} 1$

⑤ $\log_3 \frac{1}{27}$

⑥ $\log_5 25$

⑦ $\log_{10} 0.0001$

⑧ $\log_{49} 343$

⑨ $\log_{\frac{1}{6}} 6$

خصائص الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة:

$$f(x) = \log_b x$$

1. مجال الاقتران هو الأعداد الحقيقية الموجبة R^+: $(0, \infty)$.
2. مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.

خصائص أساسية للوغاريتمات

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^x = x$
4. $b^{\log_b x} = x$

T . FADI AL-SHAQILDI

5 مجال الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة: $f(x) = \log_b x$، هو:

(a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(0, \infty)$

(c) $(-\infty, 0)$ (d) $zero$

6 مجال الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة: $f(x) = \log_b x$، هو:

(a) R^+ (b) R^-

(c) R (d) $zero$

7 مدى الاقتران اللوغاريتمي هو:

(a) R^+ (b) R^-

(c) R (d) $R - \{0\}$

خصائص الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة:

$$f(x) = \log_b x$$

3. الاقتران متزايد إذا كانت $b > 1$.
4. الاقتران متناقص إذا كانت $0 < b < 1$.

8 أي من الاقترانات الآتية متزايدًا:

(a) $\log_{\frac{1}{2}} x$ (b) $\log_{\frac{1}{4}} x$

(c) $\log_{\frac{2}{3}} x$ (d) $\log_5 x$

9 أي من الاقترانات الآتية متناقصًا:

(a) $\log_5 x$ (b) $\log_{\frac{1}{5}} x$

(c) $\log_4 x$ (d) $\log_6 x$

خصائص الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة:

$$f(x) = \log_b x$$

5. خط التقارب الرأسي للاقتران $f(x) = \log_b x$ هو: المحور y أو $x = 0$.
6. الاقترن اللوغاريتمي الذي بصورة: $f(x) = \log_b x$ يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$ ولا يقطع محور y.

10 خط التقارب الرأسي للاقتران $f(x) = \log_b x$ هو:

(a) المحور y (b) المحور x

(c) المحورين الإحداثيين (d) لا يتقارب رأسي

11 خط التقارب الرأسي للاقتران $f(x) = \log_b x$ هو:

(a) $y = 0$ (b) $x = 0, y = 0$

(c) $x = 0$ (d) $x = 1$

12 الاقتران اللوغاريتمي الذي في صورة $f(x) = \log_b x$ حيث b عدد حقيقي و $b > 0, b \neq 1$ تمر جميع منحنياتها بالنقطة:

(a) $(1, 1)$ (b) $(1, 0)$

(c) $(0, 1)$ (d) $(0, 0)$

T. FADI AL-SHAQLDI

المجال و خطوط التقارب الرأسي للاقتران:

$$f(x) = \log_b g(x)$$

13 حدّد خطوط التقارب الرأسية لكل من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = \log_4(x+3)$
2. $f(x) = \log_5(8-2x)$
3. $f(x) = \log_3(x)$
4. $f(x) = \log_7(5-x)$
5. $f(x) = \log_3(x^2-x-2)$
6. $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$
7. $f(x) = \log_3(x^2)$
8. $f(x) = \log_2(-x)$

14 حدّد مجال كل اقتران لوغاريتمي في كل مما يلي:

1. $\log_4(x+3)$
2. $\log(8-2x)$
3. $f(x) = 5 - 2\log_7(x+1)$
4. $f(x) = \log_3(x^2-x-2)$
5. $f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$
6. $f(x) = \log_3 x^2$ مهم

15 جد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران:

$f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة $(32, 5)$

T FADI AL-SHAQILDI

16 جد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران: $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{4}, -4\right)$.

17 يمثّل الاقتران:

$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج. و تعني القيمة : $P(1) = 19$ أن إنفاق $100\ JD$ على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها $19000\ JD$ من بيع المنتج:

1. جد:

$P(4) =$

$P(24) =$

$P(124) =$

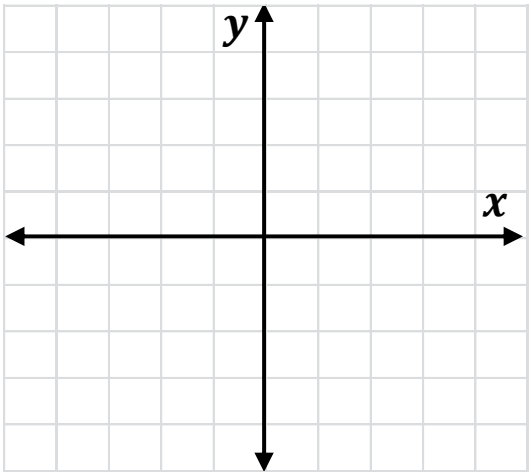
2. فسّر معنى القيم التي أوجدتها في الفرع السابق.

التمثيل البياني للاقتران اللوغاريتمي:

18 مثّل بيانيًا كل من الاقترانات الآتية:

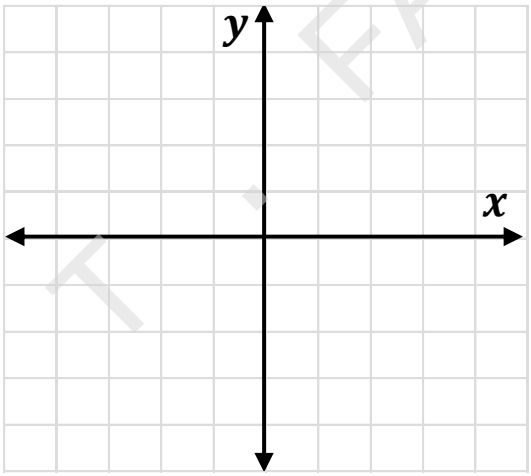
1. $f(x) = \log_2 x$

x					
$f(x)$					



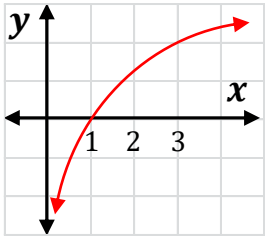
2. $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

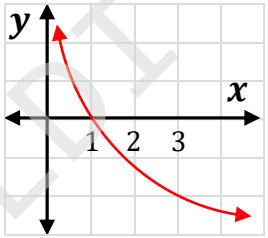
x					
$f(x)$					



T. FADI AL-SHAQLDI

19 حدّد أي من الاقترانات الآتية متزايد و أيهما متناقص:



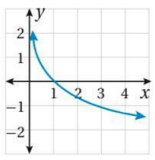


_____ _____

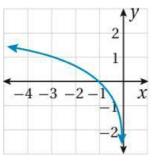
20 اكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب:

1. $f(x) = \log_3(x)$
2. $f(x) = \log_3(-x)$
3. $g(x) = -\log_3 x$

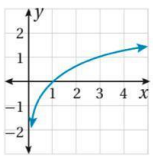
a)



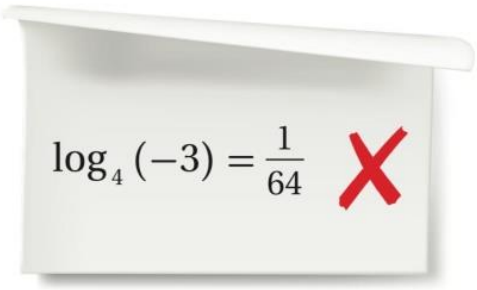
b)



c)



21 كتبت منى المعادلة الأسية: $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي:



اكتشف الخطأ الذي وقعت فيه منى، ثم صحّحه.

22 تمثّل المعادلة: $\log_{10}\left(\frac{I}{12}\right) = -0.0125x$ العلاقة بين شدة الضوة I بوحدة $lumen$ و العمق x بالأمتار في إحدى البحيرات. كم تبلغ شدة الضوء عند عمق $10\ m$؟

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الرابع:
قوانين اللوغاريتمات

قانون الضرب:

$$\log_b xy = \log_b x + \log_b y$$

قانون القسمة:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

قانون القوة:

$$\log_b x^p = p \log_b x$$

1 اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بالصورة المطولة:

1. $\log_5 x^7 y^2$
2. $\log_4 \frac{xy^3}{z^2}$
3. $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{a^5}}$
4. $\log_5 \frac{(x+1)^3}{8}$
5. $\log_a \frac{(x^2 y^3)^2}{(x^2 y^3)^3}$
6. $\log_a \sqrt{\frac{x^{12} y}{y^3 z^4}}$
7. $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$
8. $\log\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$
9. $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$
10. $\log_a \frac{(x^{-1} y^2)^4}{(x^5 y^{-2})^3}$

2 اكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بالصورة المختصرة:

1. $3 \log_2 x + 4 \log_2 y$
2. $5 \log_b x + \frac{1}{2} \log_b y - 9 \log_b z$
3. $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$
4. $\log_b 1 + 2 \log_b b$

T . FADI AL-SHAQLDI

3 أثبت أن:

1. $\log_a(x^2-4)-\log_a(x+2)=\log_a x-2$

حيث $x>2$

2. $\log_b(b-3)+\log_b(b^2+3b)-\log_b(b^2-9)=1$

4 إذا كان: $\log_a 6\approx 0.778$، وكان $\log_a 5\approx 0.699$، جد:

1. $\log_a \frac{5}{6}$

2. $\log_a 30$

3. $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

4. $\log_a \frac{1}{6}$

5. $\log_a 900$

6. $\log_a \frac{18}{15}$

7. $\log_a(6a^2)$

8. $\log_a \sqrt[4]{25}$

9. $(\log_a 5)(\log_a 6)$

5 أحد الآتية يكافئ المقدار:

$$\log_a 27-\log_a 9+\log_a 3$$

ⓐ $\log_a 3$ ⓑ $\log_a 6$

ⓒ $\log_a 9$ ⓓ $\log_a 27$

6 أحد الآتية يكافئ المقدار: $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$

ⓐ $5\log_a x-3\log_a y+1$

ⓑ $a\log_a x^5-\log_a y^3$

ⓒ $5a\log_a x-3\log_a y$

ⓓ $1-5\log_a x-3\log_a y$

T . FADI AL-SHAQILDI

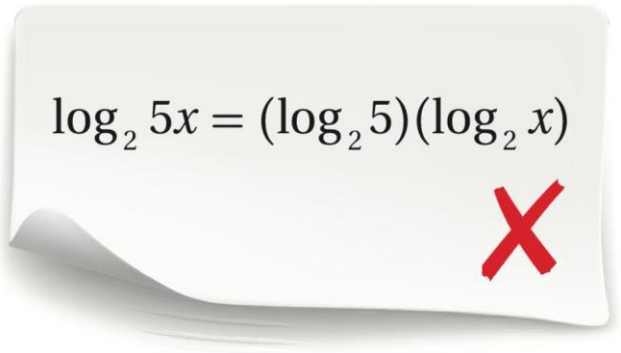
7 يمثل الاقتران:

$f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$، النسبة المئوية لطول الطفل الذكر الآن من طوله عند البلوغ، حيث x عمره بالسنوات. جد النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ، علمًا بأن: $\log_6 2 \approx 0.3869$.

8 أثبت أن: $\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$.

9 اكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم صحّحه.

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$



T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الخامس:
المعادلات الأسية

1 استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة:

1. $\log 2.7$
2. $\log(3.1 \times 10^4)$
3. $ln\ 0.25$

خاصية تغيير الأساس: (لاستخدام الآلة الحاسبة)

$$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$$

2 استعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من مئة:

1. $\log_3 16$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 10$
3. $\log_3 e^2$
4. $\log_7 \frac{1}{7}$

خاصية المساواة اللوغاريتمية:

3 حل المعادلات الأسية الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1. $2^x = 13$
2. $2^{x+4} = 5^{3x}$
3. $5e^{3x} = 125$
4. $-3e^{4x} = -27$
5. $27^{2x+3} = 2^{x-5}$
6. $8^x = 2$

T . FADI AL-SHAQILDI

المعادلة الأسية:

4 حل كلًّا من المعادلات الأسية الآتية مقربًا إجابتك إلى أقرب 4 منازل عشرية:

1. $4^x + 2^x - 12 = 0$

2. $25^x + 5^x - 42 = 0$

3. $49^x + 7^x - 72 = 0$

4. $64^x + 2(8)^x - 3 = 0$

5. $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

5 تناقصت أعداد حيوان الكوالا في إحدى الغابات وفق الاقتران: $N = 873e^{-0.078t}$، حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة. بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيوانًا من الكوالا؟

6 يمثّل الاقتران: $A(t) = 10e^{-0.0862t}$ كتلة اليود (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $10\ g$ بعد t يومًا من بدء التفاعل. بعد كم يومًا سيظل من العينة $0.5\ g$؟

T . FADI AL-SHAQILDI

7 انتشر فيروس في شبكة حواسيب وفق الاقتران: $v(t) = 30e^{0.1t}$، حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة، و t الزمن بالدقائق. جد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

8 يمثّل الاقتران: $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بعد t يومًا:

1. جد العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة.
2. جد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام.
3. بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 1400 خلية؟
4. بعد كم يومًا يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة ضعف العدد الأصلي؟

9 أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي، بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5%:

1. بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي؟
2. بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي؟

10 تمثّل المعادلة: $T = 27 + 219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسيليسيوس °C) بعد t دقيقة من بدء تبريده، متى تصبح درجة حرارة المعدن 100°C؟

11 توصّلت دراسة إلى أن عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران: $N(t) = \frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة:

1. جد عدد الأرانب في المحمية عند بدء الدراسة.
2. بعد كم سنة يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب؟

T. FADI AL-SHAQILDI

12 قيمة $\log 10$ تساوي:

ⓐ $2 \log 5$ ⓑ 1

ⓒ $\log 5 \times \log 2$ ⓓ 0

13 إذا كان: $e^{x^2} = 1$، فإن قيمة x:

ⓐ 0 ⓑ 1

ⓒ 2 ⓓ 4

14 إذا كان: $\log_5 4 = k$، فاكتب ما يلي بدلالة k:

ⓐ $\log_5 16$

ⓑ $\log_5 256$

15 جد قيمة كل h, k إذا وقعت النقطة $(-2, k)$، و النقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران :

$$f(x) = e^{0.5x+3}$$

T . FADI AL-SHAQILDI

الوحدة الثانية: التفاضل

الدرس الأول:
قاعدة السلسلة

- مشتقة الثوابت:

إذا كان :

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

أمثلة على الثوابت:

$f(x)$	$f'(x)$
k	
$3k^2$	
$\frac{1}{b}$	
$\sqrt{a}$	
$a^2 + b^2$	
6	

- مشتقة المتغيرات اللي فيها x:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$f(x)$	$f'(x)$
x^3	
$2x^2$	
$5x$	
$\frac{1}{4}x^4$	
$\sqrt{2}x^7$	
kx^5	
$k^2\ x^3$	

- مشتقة القوة السالبة:

$f(x)$	$f'(x)$
x^{-2}	
x^{-5}	
x^{-1}	
x^{-4}	
$3x^{-3}$	
bx^{-7}	
$-6x^{-2}$	

بس تخلص اشتقاق رجعها تحت (موجب)

- مشتقة القوة الكسرية الموجبة و السالبة:

$f(x)$	$f'(x)$
$x^{\frac{7}{2}}$	
$x^{\frac{4}{3}}$	
$x^{\frac{1}{2}}$	
$x^{-\frac{3}{2}}$	
$x^{\frac{5}{7}}$	
$x^{\frac{8}{3}}$	

T . FADI AL-SHAQLDI

جهّزها ← اشتقها ← رجّعها

جهّزها	اشتقها	رجّعها	
$f(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f'(x)$
$\sqrt[3]{x^5}$			
$\sqrt[4]{x}$			
$\sqrt[7]{x^2}$			
$\frac{1}{x^2}$			
$\frac{3}{x^5}$			
$\frac{7}{x^{-3}}$			
$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$			

"مشكّــل"

1 إذا كان: $f(x)=x^3-2x+1$ فإن $f'(x)$؟

ⓐ $f'(x)=3x^2-2x$ ⓑ $f'(x)=3x^2-2$

ⓒ $f'(x)=3x^2+1$ ⓓ $f'(x)=3x^2$

2 إذا كان: $y=3kx^2-1$ فإن $\frac{dy}{dx}$؟

ⓐ $6kx$ ⓑ 0

ⓒ 6 ⓓ $3k$

3 إذا كان: $g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ فإن $g'(x)$؟

ⓐ $2\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}$ ⓑ $\sqrt{x}-\frac{1}{x^2}$

ⓒ $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ ⓓ $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$

4 إذا كان: $f(x)=x-\frac{1}{x}$ فإن $f'(2)$؟

ⓐ $\frac{5}{4}$ ⓑ $\frac{1}{4}$

ⓒ $-\frac{5}{4}$ ⓓ $\frac{3}{4}$

5 إذا كان: $f(x)=k^3x^3-1$ وكان $f'(-1)=81$ فإن قيمة الثابت k تساوي:

ⓐ 3 ⓑ 9

ⓒ 27 ⓓ 81

- مشتقة الجذر التربيعي:

$$f(x)=\sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

FADI AL-SHAQILDI

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{4-3x}$	
$\sqrt{x^3+4x}$	
$\sqrt{7-x}$	
$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{16-x^2}$	

6 إذا كان: $f(x)=(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}$ فإن $f'(x)$؟

ⓐ $\frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$ ⓑ $\frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$

ⓒ $\frac{4x}{\sqrt{1-2x^2}}$ ⓓ $\frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

7 إذا كان: $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ فإن $f'(2)$؟

ⓐ 4 ⓑ 2

ⓒ 3 ⓓ 1

8 إذا كان: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ وكان $g(2)=4$، $g'(2)=8$، فإن $f'(2)$:

ⓐ 2 ⓑ 8

ⓒ 4 ⓓ 6

مشتقة القوس:

$$f(x)=\big(g(x)\big)^n$$
$$\downarrow$$
$$f'(x)=n(g(x))^{n-1}.g'(x)$$

$f(x)$	$f'(x)$
$(x^2+1)^3$	
$(x^3+2x)^7$	
$5(1-x^2)^3+4x+7$	
$\big(\sqrt{x}+5\big)^4$	
$(3-2x^2)^{-5}$	
$(x^2-7x+1)^{\frac{3}{2}}$	
$\sqrt[3]{2x+x^5}+(14-x)^2$	

9 جد مشتقة كل مما يلي:

1. $f(x)=(2x+1)^3-\sqrt{3x^2-2x}$

2. $\sqrt[3]{2x-1}-(x-3)^3$

3. $f(x)=\sqrt{x}+2(x^2-x+1)^3$

T . FADI AL-SHAQLDI

4. $f(x)=\frac{1}{(4x+1)^2}$, $x=\frac{1}{4}$

10 إذا كان: $y=u^3-7u^2$ ، $u=x^2+3$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ ؟

11 إذا كان: $y=\sqrt{7-3u}$ ، $u=x^2-9$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ ؟

12 إذا كان: $y=u^3-2u+1$ ، $u=2\sqrt{x}$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=4$؟

13 إذا كان: $f(x)=u^3-5(u^3-7u)^2$ ، $u=\sqrt{x}$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=4$

14 إذا كان: $y=(1+u^2)^3$ ، $u=2x-1$ ، جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=1$؟

15 إذا كان: $h'(3)=-2$ ، $h(3)=2$ ، $g'(2)=6$ ، $g(2)=-3$ ، وكان: $f(x)=g(h(x))$ ، فإن $f'(3)$ ؟

ⓐ 12 ⓑ 6

ⓒ -6 ⓓ -12

T . FADI AL-SHAQILDI

16 إذا كان: $h'(5)=6$، $h(5)=-2$، $g'(-2)=4$، $g(-2)=8$، وكان: $f(x)=g(h(x))$، فإن: $f'(5)$ ؟

(a) -12 (b) 24

(c) -24 (d) 12

17 إذا كان: $h'(3)=-2$، $h(3)=2$، $g'(2)=6$، $g(2)=-3$، وكان: $f(x)=(h(x))^3$ فإن: $f'(3)$؟

(a) 12 (b) -12

(c) -24 (d) 24

18 إذا كان: $h'(5)=6$، $h(5)=-2$، $g'(-2)=4$، $g(-2)=8$، وكان: $f(x)=4(h(x))^2$ فإن: $f'(5)$؟

(a) 96 (b) -96

(c) 16 (d) -16

19 يمثّل الاقتران: $C(x)=1000\sqrt{x^2-0.1x}$ تكلفة إنتاج x قطعة من منتج معين (بآلاف الدنانير):

1. جد معدّل تغير تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة.

2. جد معدّل تغيّر تكلفة الإنتاج بالنسبة إلى عدد القطع المنتجة عندما يكون عدد القطع المنتجة 20 قطعة.

20 يمثّل الاقتران: $P(t)=\sqrt{10t^2+t+229}$ إجمالي الأرباح السنوية لإحدى الشركات الصناعية (بآلاف الدنانير)، حيث t عدد السنوات بعد عام 2015 م:

1. جد معدّل تغيّر إجمال الأرباح السنوي للشركة بالنسبة إلى الزمن t.

2. جد معدّل تغيّر إجمالي الأرباح السنوي للشركة عام 2020 م، مفسرًا معنى النتائج.

FADI AL-SHAQILDI

21 توصّلت دراسة بيئية إلى نمذجة متوسّط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بإحدى القرى عن طريق الاقتران:
$C(p) = 0.6\sqrt{0.5p^2 + 17}$، حيث p عدد السكان بالألف نسمة، علمًا بأن C يقاس بالجزء من المليون ($C = 5$ تعني 5 أجزاء من المليون مثلًا):

1. جد معدّل تغيّر متوسّط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان.

2. جد معدّل تغيّر متوسّط المستوى اليومي لغاز أول أكسيد الكربون في الهواء بالنسبة إلى عدد السكان عندما يكون عدد السكان 4 آلاف نسمة، مفسراً معنى الناتج.

22 يمثّل الاقتران: $N(t) = 20 - \frac{30}{\sqrt{9-t^2}}$ عدد السلع التقريبي التي يمكن لمحاسب مبتدئ في أحد المحال التجارية أن يمرّرها فوق الماسح الضوئي في الدقيقة الواحدة بعد t ساعة من بدئه العمل. جد سرعة المحاسب في أداء هذه المهمة بعد زمن مقداره t ساعة.

23 توصّلت دراسة بيئية إلى نمذجة مقدار التلوّث في إحدى البحيرات باستعمال الاقتران:
$P(t) = (t^{\frac{1}{4}} + 3)^3$، حيث t الزمن بالسنوات، علمًا بأن P يقاس بأجزاء من المليون:

1. جد معدّل تغيّر مقدار التلوّث في البحيرة بالنسبة إلى الزمن.

2. جد معدّل تغيّر مقدار التلوّث في البحيرة بعد 16 عامًا.

24 إذا كان: $h(x) = f(g(x))$، حيث:
$f(u) = u^2 - 1$، وكان: $g'(2) = -1$،
$g(2) = 3$، فجد $h'(2)$، مبرّرًا إجابتك.

25 جد مشتقة الاقتران: $y = (x^2 - 4)^5$، عندما $y = 0$، مبرّرًا إجابتك.

T: FADI AL-SHAQILDI

26 أي الاقترانات الآتية مختلف، مبرّرًا إجابتك:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$h(x) = (x^2 + 1)^3$$

$$g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$$

$$p(x) = x^2 + 1$$

26 جد مشتقة الاقتران:

$$f(x) = \sqrt[3]{2x + (x^2 + x)^4}$$

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الثاني:
مشتقتا الضرب و القسمة

مشتقة الضرب:

إذا كان: $f(x) = g(x).h(x)$

فإن: $f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$

مشتقة الأول × الثاني + مشتقة الثاني × الأول =

1 جد مشتقة كل مما يلي:

1. $f(x) = (x^3 + 4)(7x^2 - 4x)$
2. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(3x - 2)$
3. $f(x) = x(1 + 3x)^5$
4. $f(x) = (2x + 1)^5(3x + 2)^4$
5. $f(x) = 5x^{-3}(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$

2 جد مشتقة كل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = x^2(1 - 3x)^3 \quad , \quad x = 1$
2. $f(x) = 3x\sqrt{5 - x} \quad , \quad x = 4$

مشتقة القسمة:

إذا كان: $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

فإن: $f'(x) = \frac{h(x).g'(x) - g(x).h'(x)}{(h(x))^2}$

$$= \frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} + \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

حالة خاصة (1): إذا كان: $f(x) = \frac{\text{رقم}}{\text{مقام}}$

$$f'(x) = \frac{-\text{مشتقة المقام} \times \text{الرقم}}{(\text{المقام})^2}$$

حالة خاصة (2): إذا كان: $f(x) = \frac{\text{بسط}}{\text{رقم}}$

$$f'(x) = \frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{رقم}}$$

T. FADI AL-SHAQLDI

3 جد مشتقة كل مما يلي:

1. $f(x)=\frac{2}{3x^2+1}$
2. $f(x)=\frac{-2}{4x+1}$
3. $f(x)=\frac{1}{1-x^3}$
4. $f(x)=\frac{1}{x}$
5. $f(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$
6. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$
7. $f(x)=\frac{x^3-2x+1}{5}$
8. $f(x)=\frac{2x+1}{3}$
9. $f(x)=\frac{3x+1}{x-2}$
10. $f(x)=\frac{x^{-3}}{x^2+1}$
11. $f(x)=\frac{x}{5+2x}-2x^4$
12. $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+2)^4}$
13. $f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}}$
14. $f(x)=\left(x+\frac{2}{x}\right)(x^2-3)$

T. FADI AL-SHAQILDI

4 جد مشتقة كل مما يلي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x)=\frac{x-1}{2x+1}$, $x=2$

2. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x+4}}$, $x=12$

5 إذا كان: $f(x)=x-\frac{1}{x}$، فإن $f'(x)$:

(a) $1+\frac{1}{x^2}$ (b) $1-\frac{1}{x^2}$

(c) $1+\frac{1}{x}$ (d) $1-\frac{1}{x}$

6 إذا كان: $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$، فإن $f'(x)$:

(a) $\frac{2}{(x-1)^2}$ (b) $\frac{1}{(x-1)^2}$

(c) $\frac{-2}{(x-1)^2}$ (d) $\frac{-1}{(x-1)^2}$

7 استعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي عند قيمة x المعطاة:

1. $y=u(u^2+3)^3$, $u=(x+3)^2$, $x=-2$

2. $y=\frac{u^3}{u+1}$, $u=(x^2+1)^3$, $x=1$

8 إذا كان: $g(2)=3$, $g'(2)=2$
$f(2)=4$, $f'(2)=-1$
فجد كلًّا مما يأتي:

1. $(fg)'(2)$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$

3. $(3f+fg)'(2)$

T. FADI AL-SHAQILDI

9 إذا كان $f(x), g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$، وكان: $g'(0) = 2$، $g(0) = 1$، $f'(0) = -4$، $f(0) = 3$، فجد كلًّا مما يأتي:

1. $(fg)'(0)$

2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

3. $(3f - 4fg)'(0)$

10 إذا كان: $y = uv$، وكان: $v'(1) = 1$، $v(1) = -1$، $u'(1) = 3$، $u(1) = 2$، فإن $y'(1)$

(a) -4 (b) -1

(c) 1 (d) 4

11 يمثل الاقتران: $S(t) = \frac{2000t}{4+0.3t}$، إجمالي المبيعات (بآلاف الدنانير) لشركة جواهر و حلي، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020م:

1. جد معدّل تغيّر إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن.

2. جد معدّل تغيّر إجمالي المبيعات للشركة عام 2030م، مفسرًا معنى الناتج.

12 يمثّل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 12(2t^2 + 100)(t + 20)$، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن، و P عدد السكان بالآلاف:

1. جد معدّل تغيّر عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t.

2. جد معدّل تغيّر عدد السكان في البلدة عندما $t = 6$، مفسرًا معنى الناتج.

T . FADI AL-SHAQILDI

13 يمثل الاقتران: $N(t) = 1000\left(1 - \frac{3}{t^2+50}\right)$، عدد الخلايا البكتيرية بعد t يومًا في مجتمع بكتيري:

1. جد معدّل تغيّر N بالنسبة إلى الزمن t.

2. جد معدّل تغيّر N بالنسبة إلى الزمن t عندما $t = 1$.

14 جد مشتقة الاقتران:

$$f(x) = x(4x-3)^6(1-4x)^9$$

15 إذا كان: $f(x) = \frac{2x}{x+5} + \frac{6x}{x^2+7x+10}$، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1. أثبت أن: $f(x) = \frac{2x}{x+2}$، مبرّرًا اجابتك.

2. جد $f'(3)$.

16 إذا كان: $f(x) = \frac{2x+8}{\sqrt{x}}$، فجد قيمة x عندما $f'(x) = 0$.

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الثالث:
مشتقة الاقتران
الأسي و اللوغاريتمي

مشتقة الاقتران الأسي:

إذا كان:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

إذا كان:

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

1 جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1. $f(x) = e^x + \ln x$
2. $f(x) = 2e^x + 3$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x} + e^x$
4. $y = xe^x$
5. $y = \frac{e^x}{x+1}$
6. $f(x) = x \ln x$
7. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$
8. $f(x) = x^4 \ln x - \frac{1}{2}e^x$
9. $f(x) = (e^x + 2)(e^x - 1) + 3\ln x$
10. $f(x) = (\ln x)^4$
11. $f(x) = (x^2 + 3x - 9)e^x$

T . FADI AL-SHAQLDI

مشتقة الاقتران الأسي و اللوغاريتمي:

إذا كان:

$$f(x) = e^{g(x)} \rightarrow f'(x) = e^{g(x)} . g'(x)$$

إذا كان:

$$f(x) = ln\ g(x) \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

2 جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1. $f(x) = e^{4x}$
2. $f(x) = 5e^{\sqrt{x}}$
3. $f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$
4. $f(x) = e^{7x+1}$
5. $f(x) = ln\ (x^3)$
6. $f(x) = ln\ (9x + 2)$
7. $f(x) = x^2 ln\ (4x)$
8. $f(x) = ln\ (e^x - 2)$
9. $f(x) = (ln\ 3x)(ln\ 7x)$
10. $f(x) = ln\ (3x^2 - 2)$
11. $f(x) = (2e^{3x} - 1)^2$

ملاحظة:

يمكن استخدام قوانين اللوغاريتمات للتسهيل قبل عملية الاشتقاق:

- $ln\ (x\ y) = ln\ (x) + ln\ (y)$
- $ln\ \left(\frac{x}{y}\right) = ln\ (x) - ln\ (y)$
- $ln\ x^n = n\ ln\ x$

T. FADI AL-SHAQLDI

3 جد مشتقة كل مما يلي:

1. $f(x) = ln\, x^3$

2. $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

3. $f(x) = ln\sqrt{x^2-1}$

4. $f(x) = ln\,(xe^x)$

5. $f(x) = \frac{ln\, x}{x^2}$

6. $f(x) = (ln\, x)^5$

7. $f(x) = (ln\, x)(ln\, 7x)$

4 جد مشتقة كل مما يلي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = e^{2x-1}ln(2x-1)$, $x = 1$

2. $f(x) = \frac{ln\, x^2}{x}$, $x = 4$

3. $f(x) = \frac{1}{1+e}$, $x = 2$

4. $f(x) = x^2\, e^{-1}$, $x = -1$

5. $f(x) = ln\,(x^2+1)$, $x = 3$

6. $f(x) = 3\, ln\, x + \frac{1}{x}$, $x = e$

T . FADI AL-SHAQILDI

5 جد مشتقة كل مما يلي:

1. $y = e^{2u} + 3 \ , \ u = x^2 + 1$

2. $y = ln\,(u+1) \ , u = e^x$

6 إذا كان: $f(x) = e^{g(x)}$، وكان $g'(1) = 4$، $g(1) = 3$، فإن $f'(1)$؟

ⓐ e^3 ⓑ $4e^3$

ⓒ 4 ⓓ 3

7 إذا كان: $f(x) = be^{x^3-1}$، وكان $f'(1) = 3e$، فإن قيمة b؟

ⓐ $3e$ ⓑ 3

ⓒ e ⓓ 1

8 إذا كان: $y = \sqrt{ln\,(x)}$، فإن $\frac{dy}{dx}$:

ⓐ $\frac{x}{2\sqrt{ln\,(x)}}$ ⓑ $\frac{1}{\sqrt{ln\,(x)}}$

ⓒ $\frac{1}{2x\sqrt{ln\,(x)}}$ ⓓ $\frac{-1}{2\sqrt{ln\,x}}$

9 إذا كان: $f(x) = ln\,(20x + a)$ وكان: $f'(0) = 4$، فإن قيمة الثابت a؟

ⓐ 5 ⓑ 20

ⓒ 4 ⓓ 10

10 يمكن نمذجة انتشار الإنفلونزا في إحدى المدارس باستعمال الاقتران: $P(t) = \frac{100}{1+e^{3-t}}$، حيث $P(t)$ العدد الكلي للطلبة المصابين بعد t يومًا من ملاحظة الإنفلونزا أول مرة في المدرسة. جد سرعة انتشار الإنفلونزا في المدرسة بعد 3 أيام.

T . FADI AL-SHAQILDI

10 يُستعمل الاقتران:

$m(t) = t\ ln\ t + 1, 0 < t \leq 4$ لقياس قدرة الأطفال على التذكّر، حيث m مقياس من 1 إلى 7، و t عمر الطفل بالسنوات. جد معدّل تغيّر قدرة الأطفال على التذكّر بالنسبة إلى عمر الطفل t.

11 يمثّل الاقتران: $N(t) = 1000\left(30 + e^{-\frac{t}{30}}\right)$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

1. جد العدد الأولي للخلايا البكتيرية في المجتمع.
2. جد معدّل تغيّر عدد الخلايا البكتيرية بالنسبة إلى الزمن؟
3. جد معدّل تغيّر نمو المجتمع بعد 20 ساعة.

12 يمكن نمذجة درجة استجابة المستهلكين لمنتج ما عن طريق الإعلانات باستعمال الاقتران:

$N(a) = 2000 + 500\ ln\ a\ ,\ a \geq 1$

الذي يمثل عدد الوحدات المبيعة من المنتج، حيث a المبلغ الذي أنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير:

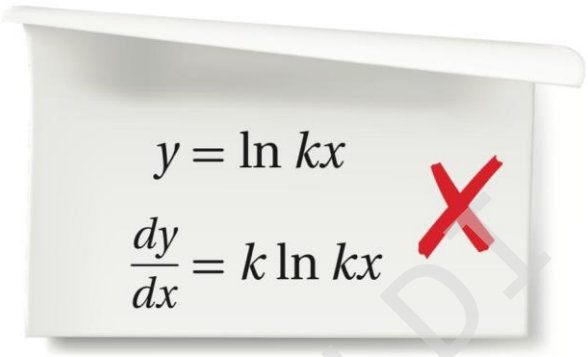
1. جد معدّل تغيّر عدد الوحدات المبيعة بالنسبة إلى المبلغ a الذي أنفِق على الإعلانات بآلاف الدنانير.
2. جد معدّل تغيّر عدد الوحدات المبيعة عندما $a = 10$.

13 يستعمل خبراء علم الاجتماع المعادلة:

$N = P\left(1 - e^{-0.15d}\right)$ لتقدير عدد الأشخاص الذين سمعوا شائعة انتشرت في مجتمع عدد أفراده P نسمة بعد d يومًا من انطلاقها. جد معدّل تغيّر عدد الأشخاص الذين يسمعون شائعة إلى الزمن d في مجتمع عدد أفراده 10000 نسمة.

FADI AL-SHAQILDI

14 اكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم صحّحه:



15 إذا كان: $y = \frac{7\ lnx - x^3}{e^{3x}}$ برهن فاثبت أن:

$\frac{dy}{dx} = \frac{7}{e^3}$ عندما $x = 1$.

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الرابع:
مشتقة اقتران
الجيب و جيب التمام

إذا كان:

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$
$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

1 جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1. $f(x) = \sin x + \cos x$
2. $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$
3. $f(x) = \frac{\sin x}{2} - 3\cos x$
4. $f(x) = 7 + \sin x$
5. $f(x) = x^2 \sin x$
6. $f(x) = e^x \cos x$
7. $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$
8. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
9. $f(x) = \sin x \cos x$
10. $f(x) = \frac{e^x}{\cos x}$
11. $f(x) = \frac{(\ln x)^2}{\sin x}$
12. مهم $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$
13. $f(x) = 4\sqrt{\cos x + \sin x}$
14. $f(x) = 2x^3 \sin x - 3x\cos x$

T . FADI AL-SHAQLDI

إذا كان:

$$f(x) = \sin\left(g(x)\right)$$
$$\downarrow$$
$$f'(x) = \cos\left(g(x)\right).g'(x)$$

$$f(x) = \cos\left(g(x)\right)$$
$$\downarrow$$
$$f'(x) = -\sin\left(g(x)\right).g'(x)$$

2 جد مشتقة كل اقتران مما يلي:

1. $f(x) = \sin 4x$
2. $f(x) = \cos(5x)$
3. $f(x) = e^{\sin 2x}$
4. $f(x) = \ln(\cos(3x))$
5. $f(x) = \cos(5x - 2)$
6. $f(x) = \sin(3x) + \cos(6x)$
7. $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$
8. $f(x) = e^{2x}.\sin(10x)$
9. $f(x) = (\cos(2x) - \sin x)^2$
10. $f(x) = 5\sin\sqrt{x}$
11. $f(x) = \sin\sqrt{x} + \sqrt{\sin 2x}$
12. $f(x) = \sin(x^2 + 1)$
13. $f(x) = (\cos x^2)(\ln x)$
14. $f(x) = \cos(\ln x)$ مهم

T . FADI AL-SHAQLDI

15. $f(x) = sin\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

ملاحظة:

إذا كان اقتران الجيب أو جيب التمام مرفوع لقوة فهو مشتقة قوس.

16. $f(x) = cos^3 x$

17. $f(x) = 4sin^2 x$

مهم

18. $f(x) = sin^3(5x-1)$

19. $f(x) = cos\,(1-2x)^2$

20. $f(x) = cos^2 x + cosx^2$

21. $f(x) = cos^3 2x \,.\, cos\, x$

3 إذا كان: $y = sin\ 4t$، فإن: $\frac{dy}{dx}$

ⓐ $cos\ 4t$ ⓑ $-cos\ 4t$

ⓒ $4cos\ 4t$ ⓓ $-4cos\ 4t$

---

4 إذا كان: $f(x) = xcos\ x$، فإن: $f'(x)$

ⓐ $cos\ x - x\ sin\ x$ ⓑ $cos\ x + x\ sin\ x$

ⓒ $sin\ x - x\ cos\ x$ ⓓ $sin\ x + x\ sin\ x$

---

5 إذا كان: $f(x) = sin^4 3x$، فإن: $f'(x)$

ⓐ $4sin^3 3x\ cos\ 3x$ ⓑ $12sin^3\ cos\ 3x$

ⓒ $12\ sin3x\ cos3x$ ⓓ $2cos^3 3x$

---

6 يمثّل الاقتران: $D(t) = 1500 + 400sin0.4t$ عدد الغزلان في إحدى الغابات بعد t سنة من بدء دراسة لأحد الباحثين عليها. جد معدّل تغيّر عدد الغزلان في الغابة بالنسبة إلى الزمن t.

T . FADI AL-SHAQLDI

7 يمكن إيجاد عدد ساعات النهار H في أي يوم t من العام في إحدى المدن باستعمال الاقتران:

$H(t) = 12 + 2.4sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$. جد معدّل تغيّر عدد تغيّر عدد ساعات النهار بالنسبة إلى الزمن t في هذه المدينة.

8 يمكن نمذجة ضغط الدم لمريض في حالة الراحة باستعمال الاقتران: $P(t) = 100 + 20sin\, 2\pi t$ حيث P ضغط الدم بالملّيمتر من الزئبق، و t الزمن بالثواني. جد معدّل تغيّر ضغط دم المريض بالنسبة إلى الزمن t.

9 يمثل الاقتران:

$C(t) = 30 + 21.6sin\left(\frac{2\pi t}{365} + 10.9\right)$ الاستهلاك اليومي من الوقود (باللليترات) لإحدى السيارات، حيث t الزمن بالأيام. جد معدّل تغيّر استهلاك السيارة للوقود بالنسبة إلى الزمن t.

10 يمثل الاقتران:

$h(t) = 85sin\frac{\pi}{20}(t - 10) + 90$ الارتفاع (بالأقدام) لشخص يركب في عجلة دوّارة، حيث t الزمن بالثواني. جد معدّل تغيّر ارتفاع الشخص بالنسبة إلى الزمن t.

T . FADI AL-SHAQILDI

11 اكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم صحّحه:

$$f(x) = \cos x \sin x$$
$$f'(x) = \cos x \cos x + \sin x\,(-\sin x)$$
$$= \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 1$$

12 إذا كان: $y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$، فاثبت أن: $\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$.

13 جد مشتقة الاقتران: $f(x) = e^x \sin^2 x \cos x$

14 اكتشف الخطأ في الحل الآتي، ثم صحّحه:

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \times$$
$$f'(x) = \frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

T . FADI AL-SHAQILDI

الوحدة الثالثة:
تطبيقات التفاضل

الدرس الأول:
المماس و العمودي على المماس

ميل المماس:

اشتق و عوّض $f'(x_1)$

1 إذا كان: $f(x)=\frac{8}{x^2+4}$ فإن ميل المماس عندما $x=-2$ يساوي؟

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ -1

ⓒ 4 ⓓ -4

2 إذا كان: $f(x)=ln(x+e)$ فإن ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ يساوي؟

ⓐ $-e$ ⓑ $\frac{1}{e}$

ⓒ e ⓓ $-\frac{1}{e}$

3 إذا كان: $f(x)=3kx^2+2x+1$، وكان ميل المماس عندما $x=1$ يساوي 14 فإن قيمة الثابت k:

ⓐ $k=3$ ⓑ $k=-2$

ⓒ $k=2$ ⓓ $k=4$

ميل العمودي:

اشتق← عوّض←شقلب←سلّب $\frac{-1}{f'(x_1)}$

4 إذا كان: $f(x)=(ln\ x)^3$ فإن ميل العمودي على المماس عندما $x=e$ يساوي؟

ⓐ $3e$ ⓑ 1

ⓒ 3 ⓓ $\frac{-e}{3}$

5 إذا كان: $f(x)=\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن ميل العمودي على المماس عند النقطة $(4,1)$ يساوي؟

ⓐ -9 ⓑ 9

ⓒ $\frac{1}{9}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

المماس الأفقي أو المماس الموازي:

اشتق و ساوي بالصفر $f'(x)=0$

6 إذا كان: $f(x)=x^3+6x^2$ فإن قيم x التي يكون عندها للإقتران $f(x)$ مماسًا أفقيًا هي:

ⓐ $x=\{4\}$ ⓑ $x=\{0\}$

ⓒ $x=\{0,-4\}$ ⓓ $x=\{0,4\}$

T . FADI AL-SHAQLDI

7 إذا كان: $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$ فإن إحداثي النقاط التي يكون عندها للإقتران $f(x)$ مماسًا أفقيًا؟

ⓐ $\{(0,-2),(2,2)\}$ ⓑ $\{(0,1),(2,1)\}$

ⓒ $\{(0,5),(0,-5)\}$ ⓓ $\{(0,-2)\}$

8 إذا كان: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2$ فإن قيم x التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور x؟

ⓐ $x = \{4\}$ ⓑ $x = \{0\}$

ⓒ $x = \{0,4\}$ ⓓ $x = \{0,-4\}$

9 إذا كان: $f(x) = \sqrt{x}$، فما إحداثيات النقطة الواقعة على الاقتران $f(x)$ و التي يكون عندها ميل المماس يساوي $\frac{1}{2}$ ؟

ⓐ $(2,2)$ ⓑ $(3,3)$

ⓒ $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ⓓ $(1,1)$

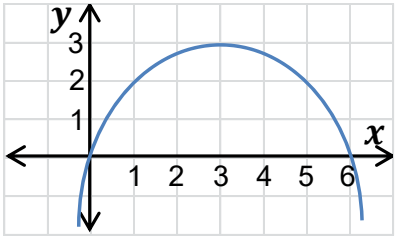
10 إذا كان: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ فما إحداثيات النقطة الواقعة على الإقتران $f(x)$ و التي يكون عندها ميل المماس يساوي $-\frac{1}{4}$ ؟

ⓐ $(4,-1)$ ⓑ $(4,1)$

ⓒ $(2,1)$ ⓓ $(2,-1)$

المماس الأفقي و المماس الموازي من الرسم "قمة و قاع"

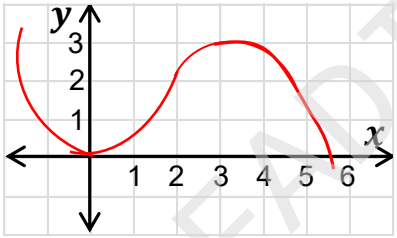
11 معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ما قيم x التي يكون عندها للإقتران مماس أفقي؟



ⓐ 4 ⓑ 2

ⓒ 3 ⓓ 5

12 معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقتران $f(x)$ ما قيم x التي يكون عندها للإقتران مماسًا موازيًا للمحور x ؟



ⓐ $x = \{0,3\}$ ⓑ $x = \{3\}$

ⓒ $x = \{0\}$ ⓓ $x = \{4\}$

T . FADI AL-SHAQLDI

ميل المماس و ميل العمودي عندما يقطع الاقتران $f(x)$ المحاور:

يقطع المحور $y \leftarrow x = 0$

يقطع المحور $x \leftarrow y = 0$

13 إذا كان: $f(x) = 5e^{2x+1}$ فإن ميل المماس للإقتران عند تقاطعه مع المحور y يساوي؟

(a) $5e$ (b) $10e$

(c) $2e$ (d) $4e$

14 إذا كان: $f(x) = ln(x+5)$ فإن ميل العمودي على المماس للإقتران عند تقاطعه مع المحور y يساوي؟

(a) -5 (b) $\frac{1}{5}$

(c) $-\frac{1}{5}$ (d) 5

15 إذا كان: $f(x) = x^3 - 8$ فإن ميل المماس للإقتران $f(x)$ عند تقاطعه مع المحور x يساوي؟

(a) -12 (b) $\frac{1}{12}$

(c) $-\frac{1}{12}$ (d) 12

16 إذا كان: $f(x) = ln(2x-7)$ فإن ميل العمودي على المماس للإقتران $f(x)$ عند تقاطعه مع المحور x يساوي؟

(a) -2 (b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

تقاطع، يمس، يوازي للإقترانات:

$f(x) = g(x) \leftarrow g(x)$ يقطع $f(x)$

$f'(x) = g'(x) \leftarrow g(x)$ يوازي $f(x)$

$f'(x) = g'(x) \leftarrow g(x)$ مماسًا لـ $f(x)$

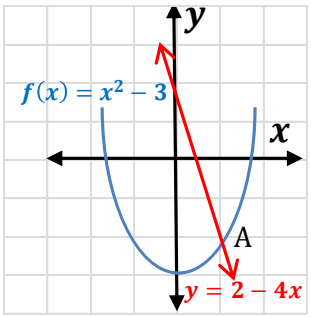
17 إذا كان: $f(x) = x^3 - 1$ يقطع الاقتران $g(x) = 7$ فإن نقطة تقاطع الاقترانين تساوي؟

(a) $(1,0)$ (b) $(3,26)$

(c) $(2,7)$ (d) $(0,-1)$

T . FADI AL-SHAQLDI

18 معتمدًا الشكل المجاور الذي يمثل منحنى الاقترانين $f(x), y$، جد احداثيات النقطة A؟



ⓐ $(1, -2)$ ⓑ $(1, 2)$

ⓒ $(1, -3)$ ⓓ $(1, 3)$

19 ما إحداثيات النقطة الواقعة على منحنى الإقتران: $f(x) = \sqrt{x} - 1$ و التي يكون عندها مماس منحنى الاقتران موازيًا للمستقيم $y = 2x - 1$؟

ⓐ $(16, 3)$ ⓑ $\left(\frac{1}{16}, \frac{-3}{4}\right)$

ⓒ $(4, 2)$ ⓓ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

20 إذا كان: $f(x) = kx^3 + h$ حيث: h, k ثابتان، فإن قيمة k التي تجعل المستقيم: $y = 2x + 5$ مماسًا لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند $x = 1$؟

ⓐ $k = 1$ ⓑ $k = -1$

ⓒ $k = \frac{3}{2}$ ⓓ $k = \frac{2}{3}$

معادلة المماس و العمودي على المماس:

معادلة المماس:

$$(y - f(x_1)) = f'(x_1)(x - x_1)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$(y - f(x_1)) = \frac{-1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

21 إذا كان: $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$، فجد كلًّا مما يلي:

1. معادلة المماس للإقتران $f(x)$ عندما $x = 4$.

2. معادلة العمودي على المماي للإقتران عندما $x = 4$.

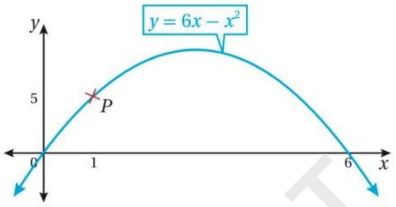
22 إذا كان: $f(x) = ln(x + e)$ فجد كلًّا مما يلي:

1. معادلة المماس للإقتران $f(x)$ عند النقطة $(0, 1)$.

2. معادلة العمودي على المماس للإقتران $f(x)$ عند النقطة $(0, 1)$

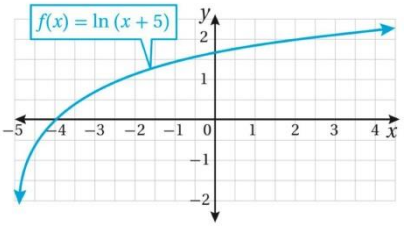
T . FADI AL-SHAQALDI

23 يبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $y = 6x - x^2$:



1. جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.
2. جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة P.

24 يبيّن الشكل منحنى الاقتران: $f(x) = ln(x + 5)$:



1. جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور x.
2. جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

25 إذا كان: $f(x) = 4e^{2x+1}$، فجد كلًّ مما يأتي:

1. معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم: $x = -1$.
2. معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند نقطة تقاطعه مع المحور y.

26 جد إحداثي النقطة الواقعة على منحنى الاقتران: $f(x) = x^2 - x - 12$، التي يكون عندها ميل المماس 3، ثم اكتب معادلة هذا المماس.

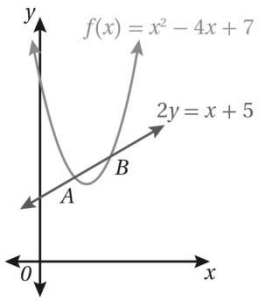
T . FADI AL-SHAQILDI

27 إذا كان: $f(x) = 6x - x^2$، فجد كلًّ مما يأتي:

1. معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة $(-1, 5)$ و النقطة $(1, 5)$.

2. نقطة تقاطع المماسين من الفرع السابق.

28 يبيّن الشكل منحنى الاقتران:
$f(x) = x^2 - 4x + 7$، و المستقيم:
$2y = x + 5$:



1. جد إحداثي كل من النقطة A و النقطة B.

2. جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عند كل من النقطة A و النقطة B.

T . FADI AL-SHAQILDI

29 إذا كان: f اقتران قابلًا للاشتقاق عندما $x = 1$، و كان $f(1) = 3$، $f'(1) = 4$، فإن معادلة المماس عندما $x = 1$ هي:

ⓐ $(y - 3) = 4(x - 1)$

ⓑ $(y - 4) = 3(x - 1)$

ⓒ $(y - 1) = 4(x - 3)$

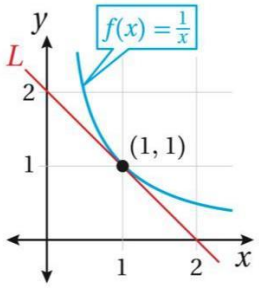
ⓓ $(y - 1) = 3(x - 4)$

30 إذا كان f اقتران قابلًا للاشتقاق عندما $x = 0$ وكان: $f(0) = 4$، $f'(0) = 0$، فإن معادلة المماس عندما $x = 0$ هي:

ⓐ $y = 0$ ⓑ $x = 4$

ⓒ $y = 4$ ⓓ $x = 0$

31 يبيّن الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$:



1. جد ميل منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$.
2. جد ميل المستقيم L.
3. ما العلاقة بين منحنى الاقتران $f(x)$ عند النقطة $(1, 1)$ و ميل المستقيم L؟

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الثاني:
المشتقة الثانية و السرعة المتجهة و التسارع

1 جد المشتقة الثانية لكل من الاقترانات الآتية:

1. $f(x) = x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \sin x$
2. $f(x) = \ln x + e^x$
3. $f(x) = \sin x^2$
4. $f(x) = x^3 - \frac{5}{x}$
5. $f(x) = x^3(x+6)^6$
6. $f(x) = \frac{x}{x+2}$
7. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$
8. $f(x) = e^x \sin x$
9. $f(x) = (x-1)(2x+3)$

2 جد المشتقة الثانية لكل مما يلي عند قيمة x المعطاة:

1. $f(x) = 8x^3 - 3x + \frac{4}{x}$, $x = -2$
2. $f(x) = \frac{1}{2x-4}$, $x = 3$
3. $f(x) = \frac{4}{\sqrt{4x-2}}$, $x = 2$
4. $f(x) = 1 - 7x^2$, $x = -3$

T . FADI AL-SHAQILDI

3 إذا كان: $f(x) = ax^4 - 3x^2$، و كانت: $f''(2) = 42$ فجد قيمة a؟

4 إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$ و كان: $f''(2) = -1$ فجد قيمة الثابت p.

الموقع $s(t)$، السرعة $v(t)$، التسارع $a(t)$

$s(t)$ $\xrightarrow{\text{اشتق}}$ $v(t)$ $\xrightarrow{\text{اشتق}}$ $a(t)$

5 يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 2$؟
2. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$؟
3. ما تسارع الجسم عندما $t = 2$؟
4. جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

T . FADI AL-SHAQILDI

6 يمثّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$؟
2. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$؟
3. ما تسارع الجسم عندما $t = 3$؟
4. جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

7 يمكن نمذجة موقع أسد جبال يطارد فريسته على أرض مستوية متحركًا في خط مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار:

1. ما سرعة أسد الجبال المتجهة بعد 4 ثوانٍ من بَدءْ حركته؟
2. ما تسارع أسد الجبال بعد 4 ثوانٍ من بَدءْ حركته؟
3. جد قيم t التي يكون عندها أسد الجبال في حالة سكون لحظي؟

T . FADI AL-SHAQILDI

8 يمثّل الاقتران: $s(t) = (t-3)^3 \, , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 5$؟
2. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$؟
3. ما تسارع الجسم عندما $t = 5$؟
4. جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

9 يمثّل الاقتران:
$s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t - 7 \, , t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 1$؟
2. في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 1$؟
3. ما تسارع الجسم عندما $t = 1$؟
4. جد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون.

10 إذا كان: $s(t) = t^2 - 5t + 1$ يمثل اقتران الموقع، في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 1$.

ⓐ يمين ⓑ يسار

ⓒ ساكن ⓓ لا شيء

T. FADI AL-SHAQILDI

11 إذا كان: $s(t) = t^3 - t^2 + 2$ يمثل اقتران الموقع، لجسم يتحرك في مسار مستقيم، في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 0$.

(a) يمين (b) يسار

(c) ساكن (d) لا شيء

12 يمثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم ، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني، في أي اتجاه يحرك الجسم عندما $t = 2$؟

يمثل الاقتران: $s(t) = 2 + 7t - t^2, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

13 اللحظة التي تكون فيها حركة الجسم في الاتجاه السالب هي:

(a) $t = 1$ (b) $t = 2$

(c) $t = 3.5$ (d) $t = 4$

14 اللحظة التي يكون فيها الجسم في حالة سكون لحظي هي:

(a) $t = 1$ (b) $t = 2$

(c) $t = 3.5$ (d) $t = 4$

15 إذا كان : $s(t) = t^2 - 8t + 1$، يمثل اقتران الموقع لجسم يتحرك في مسار مستقيم ، جد قيمة (t) التي تجعل سرعة الجسم تساوي صفر.

16 إذا كان: $s(t) = t^3 - 3t^2$ يمثل اقتران الموقع لجسم يتحرك في مسار مستقيم، جد قيم (t) التي تجعل تسارع الجسم يساوي صفرًا.

17 إذا مثّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 12t - 9, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني، فما سرعة الجسم عندما يكون تسارعه صفرًا (ينعدم التسارع).

T . FADI AL-SHAQLDI

18 إذا مثّل الاقتران: $s(t) = 2t^3 - 24t - 10, t \geq 0$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار و t الزمن بالثواني، فما تسارع الجسم عندما تكون سرعته تساوي صفرًا (تنعدم سرعته)

19 يمكن نمذجة موقع شخص يقود دراجة في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$، حيث s الموقع بالامتار، و t الزمن بالثواني:

1. ما سرعة الشخص المتجهة بعد 3 ثوانٍ من بدءِ حركته؟
2. ما تسارع الشخص بعد 3 ثوانٍ من بَدءِ حركته؟
3. جد قيم t التي يكون عندها الشخص في حالة سكون لحظي.

20 إذا كان: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(5-3x^2)^6}$، فاثبت أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{5+33x^2}{(5-3x^2)^7}$$

21 يمكن نمذجة موقع دراجة نارية تتحرك في مسار مستقيم باستعمال الاقتران: $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 15t$، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالأمتار. جد الزمن t الذي تكون فيه السرعة المتجهة للدراجة $15m/s$.

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الثالث:
تطبيقات القيم القصوى

تطبيقات اقتصادية:

الربح $P(x)$ ← الربح الحدي $P'(x)$

الإيراد $R(x)$ ← الإيراد الحدي $R'(x)$

التكلفة $C(x)$ ← التكلفة الحدية $C'(x)$

العلاقة التي تربط بين الربح و الإيراد و التكلفة:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

التكلفة – الإيراد = الربح

1 إذا كان الاقتران: $P(x) = x^2 - 5x + 1$ يمثل اقتران الربح حيث x تمثل عدد القطع المبيعة من منتج ما، فإن الربح الحدي يساوي:

ⓐ $P'(x) = x^2 - 5$

ⓑ $P'(x) = 2x + 1$

ⓒ $P'(x) = 2x - 5$

ⓓ $P'(x) = 2x - 1$

2 إذا كان الاقتران: $P(x) = 2x^3 + 6x$ يمثل اقتران الربح، حيث x تمثل عدد القطع المبيعة من منتج ما، فإن الربح الحدي الناتج من بيع 3 قطع يساوي:

ⓐ 60 ⓑ 54

ⓒ 50 ⓓ 44

3 إذا كان الاقتران: $R(x) = 7x^2 - 1$ يمثل اقتران الإيراد لبيع x حاسوبًا من منتج معين، حيث x عدد الأجهزة المبيعة، فإن الإيراد الحدي الناتج من 5 أجهزة يساوي:

ⓐ 60 ⓑ 70

ⓒ 50 ⓓ 40

4 إذا كان الاقتران: $C(x) = 0.2x^2 + 6$ يمثل اقتران تكلفة انتاج x قطعة من منتج معين، فإن التكلفة الحدية من بيع 4 قطع يساوي:

ⓐ 16 ⓑ 0.16

ⓒ 0.016 ⓓ 1.6

عندما يكون الإيراد مجهول و يعطيك في السؤال سعر القطعة الواحدة:

$$R(x) = x \cdot S(x)$$

الإيراد = x . سعر القطعة

T. FADI AL-SHAQLDI

5 يمثل الاقتران: $P(x) = 500 - 0.002x$ سعر منتج لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة فإن الاقتران الذي يمثل اقتران الإيراد هو:

(a) $R(x) = 500x + 0.002x^2$

(b) $R(x) = 500x - 0.002x^2$

(c) $R(x) = 500 - 0.002x^2$

(d) $R(x) = 500 + 0.002x^2$

6 وجد خبير تسوق أنه لبيع x تلفون من نوع جديد فإن سعر التلفون الواحد بالدينار يجب أن يكون : $S(x) = 1000 - x$ حيث x عدد الأجهزة المبيعة فإن الإيراد الحدي الناتج من بيع x جهاز جديد؟

(a) $R'(x) = 1000 - 2x$

(b) $R'(x) = 1000 - x$

(c) $R'(x) = 1000x - x^2$

(d) $R'(x) = 1000 + 2x$

عندما يكون الربح مجهول و يعطيك السؤال الإيراد و التكلفة، فإن:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

التكلفة – الإيراد = الربح

7 وجد خبير تسوّق أنه لبيع x ثلاجة من نوع جديد فإن اقتران الإيراد هو: $R(x) = 1750x - 2x^2$، حيث: x عدد الأجهزة المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x قطعة من هذه الأجهزة يساوي: $C(x) = 2250 + 18x$، فإن أي من الآتية يمثّل اقتران الربح؟

(a) $P(x) = -2x^2 + 1768x - 2250$

(b) $P(x) = -x^2 + 1768x - 2250$

(c) $P(x) = -2x^2 + 1732x - 2250$

(d) $P(x) = -x^2 + 1732x - 2250$

8 يمثّل الاقتران: $S(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حددته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المبيعة، و يمثل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة، فإن اقتران الربح الحدي هو:

(a) $P'(x) = 150 + x$

(b) $P'(x) = 150 + \frac{3}{2}x$

(c) $P'(x) = 150 - x$

(d) $P'(x) = 150 - \frac{3}{2}x$

9 إذا كان $R(x)$ يمثل الإيراد لمنتج ما و $C(x)$ يمثل التكلفة، فإن اقتران الربح الحدي لبيع x قطعة من منتج معين يساوي:

(a) $P'(x) = R'(x) - C'(x)$

(b) $P'(x) = R'(x) + C'(x)$

(c) $P'(x) = C'(x) - R'(x)$

(d) $P'(x) = R'(x).C'(x)$

T : FADI AL-SHAQLDI

10 إذا كان $R(x)$ يمثّل اقتران الإيراد لمنتج ما، و $C(x)$ يمثّل اقتران التكلفة لهذا المنتج. إذا كان الإيراد يساوي 3 أمثال التكلفة فإن أي من الآتية يمثّل اقتران الربح الحدي؟

(a) $P'(x) = 2R'(x)$ (b) $P'(x) = 4R'(x)$

(c) $P'(x) = 2C'(x)$ (d) $P'(x) = 4C'(x)$

اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية

القيم الحرجة:

اشتق و ساوي بالصفر: $f'(x) = 0$

11 إذا كان: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$ فإن قيم x الحرجة هي:

(a) $x = \{2\}$ (b) $x = \{4\}$

(c) $x = \{-4\}$ (d) $x = \{-1\}$

12 إذا كان: $f(x) = x^3(x-2)$ فإن قيم x الحرجة هي:

(a) $x = \{0, \frac{-3}{2}\}$ (b) $x = \{0, \frac{3}{2}\}$

(c) $x = \{0, 3\}$ (d) $x = \{0, -3\}$

13 إذا كان: $f(x) = x^2 - kx + 1$ ، وكان للاقتران $f(x)$ قيمة حرجة عند $x = 1$، فإن قيمة الثابت k تساوي:

(a) $k = 2$ (b) $k = -2$

(c) $k = 1$ (d) $k = -1$

القيم القصوى (عظمى محلية، صغرى محلية) (باستخدام المشتقة الثانية)

1) طلّع القيم الحرجة

2) اشتق المشتقة الثانية

3) عوّض القيم الحرجة

أكبر من صفر
صغرى محلية

أصغر من صفر
عظمى محلية

T . FADI AL-SHAQILDI

14 إذا كان: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

15 إذا كان: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران f.

16 إذا كان: $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$، فاستعمل اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للاقتران $f(x)$.

17 قيمة x التي يكون عندها قيمة صغرى محلية للاقتران: $f(x) = x^4 - 32x$ هي:

(a) 2 (b) -2

(c) 1 (d) -1

18 القيمة الصغرى المحلية للإقتران: $f(x) = x^2 - 2x + 5$، هي:

(a) 1 (b) 4

(c) 5 (d) -1

T . FADI AL-SHAQILDI

19 قيمة x التي يكون عندها قيمة عظمى محلية للاقتران: $f(x) = (3x-2)^3 - 9x$ هي:

ⓐ -116 ⓑ $\frac{1}{3}$

ⓒ -1 ⓓ -8

عند ذكر كلمة أكبر ما يمكن أو أصغر ما يمكن في أي سؤال استخدم اختبار المشتقة الثانية.

20 وجد خبير تسويق أنه لبيع x حاسوبًا من نوع جديد، فإن سعر الحاسوب الواحد (بالدينار) يجب أن يكون: $s(x) = 1000 - x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 3000 + 20x$، فجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها و بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

21 وجدت خبيرة تسويق أنه لبيع x ثلاجة من نوع جديد، فإن سعر الثلاجة الواحدة (بالدينار) يجب أن يكون: $s(x) = 1750 - 2x$، حيث x عدد الأجهزة المبيعة. إذا كانت تكلفة إنتاج x من هذه الأجهزة تعطى بالاقتران: $C(x) = 2250 + 18x$، فجد عدد الأجهزة التي يجب إنتاجها و بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن.

22 يمثل الاقتران: $P(x) = 500 - 0.002x$ سعر منتج لإحدى الشركات، حيث x عدد القطع المنتجة. و يمثل الاقتران: $C(x) = 300 + 1.10x$ تكلفة إنتاج x قطعة:

1. جد اقتران الإيراد.
2. جد اقتران الربح.
3. جد عدد القطع اللازم بيعها من المنتج لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم جد أكبر ربح ممكن.
4. جد سعر الوحدة الواحدة من المنتج الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

T . FADI AL-SHAQLDI

23 يمثّل الاقتران: $s(x) = 150 - 0.5x$ سعر البدلة الرجالية الذي حدّدته شركة لإنتاج الملابس، حيث x عدد البدلات المبيعة. و يمثّل الاقتران: $C(x) = 4000 + 0.25x^2$ تكلفة إنتاج x بدلة:

1. جد اقتران الإيراد.

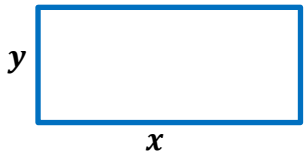
2. جد اقتران الربح.

3. جد عدد البدلات اللزم بيعها لتحقيق أكبر ربح ممكن، ثم جد أكبر ربح ممكن.

4. جد سعر البدلة الواحدة الذي يحقق أكبر ربح ممكن.

" قوانين "

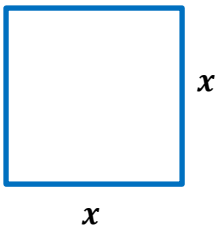
المستطيل:



المساحة: $A = x \cdot y$

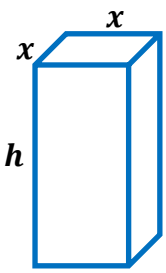
المحيط: $P = 2x + 2y$

المربع:



المساحة: $A = x^2$

المحيط : $P = 4x$



متوازي المستطيلات (قاعدته مربعة)

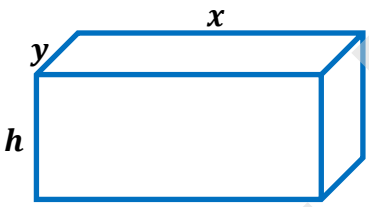
المساحة الكلية: $A = 2x^2 + 4xh$

الحجم: $V = x^2 \cdot h$

متوازي المستطيلات (قاعدته مستطيل):

المساحة الكلية: $A = 2xh + 2yh + 2xy$

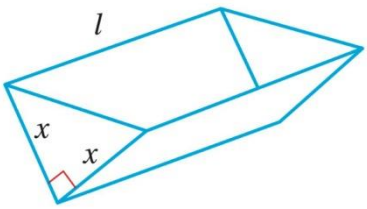
الحجم: $V = y\ x\ h$



منشور ثلاثي (مفتوح من الأعلى):

مساحته الجانبية: $A = 2xl + x^2$

الحجم: $V = \frac{1}{2}x^2 . h$

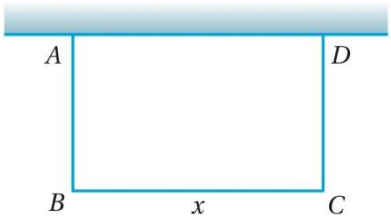


T. FADI AL-SHAQILDI

24 بنى نجار سقفًا خشبيًا لحظيرة حيوانات، وكان السقف على شكل مستطيل محيطه $54m$، جد أكبر مساحة ممكنة لسطح الحظيرة؟

25 اشترى مزارع سياجًا طوله $800\ m$ لتسييج حقل مستطيل الشكل من مزرعته، وكان هذا الحقل مقابلًا لطريق زراعي محاط به سياج من قبل. جد أكبر مساحة ممكنة للحقل يمكن للمزارع أن يحيط السياج بها.

26 يمثّل الشكل المجاور مخططًا لحديقة منزلية على شكل مستطيل أنشِئَت مقابل جدار. إذا كان محيط الحديقة من دون الجدار $300\ m$، فجد كلًّا مما يأتي:

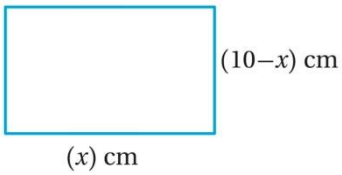


1. المقدار الجبري الذي يمثل طول الضلع AB بدلالة x.
2. اقتران مساحة الحديقة بدلالة x.
3. بعدي الحديقة اللذين يجعلان مساحتها أكبر ما يمكن.

T . FADI AL-SHAQILDI

27 خطّط مزارع لتسييج حظيرة مستطيلة الشكل قرب نهر كما في الشكل التالي، و حدّد مساحة الحظيرة بـ $245000\ m^2$، لتوفير كمية عشب كافية لأغنامه. جد أبعاد الحظيرة التي تجعل طول السياج أقل ما يمكن، علمًا بأن الجزء المقابل للنهر لا يحتاج إلى تسييج.

28 سلك طوله $20\ m$. إذا أريد ثني السلك ليحيط بالمستطيل التالي، فجد أكبر مساحة مغلقة يمكن إحاطة السلك بها.



29 أراد مصنع إنتاج علب من الكرتون على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها $1000\ cm^3$، و قاعدتها مربعة الشكل. جد أبعاد العلبة الواحدة التي تجعل كمية الكرتون المستعملة لصنعها أقل ما يمكن.

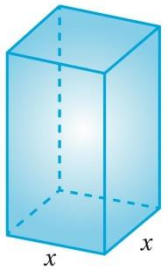
30 أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزانات معدنية على شكل متوازي مستطيلات مغلق، بحيث يكون حجم كل منها $2\ m^3$، و قاعدته مربعة الشكل. جد أبعاد الخزان الواحد التي تجعل كمية المعدن المستعملة لصنعه أقل ما يمكن.

T . FADI AL-SHAQLDI

31 لدى حدّاد صفيحة معدنية مساحتها $36\ m^2$. أراد الحدّاد أن يصنع منها خزان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، و أن تكون قاعدة الخزان مربعة الشكل. جد أبعاد الخزّان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

32 لدى حدّاد صفيحة معدنية مساحتها $54\ m^2$. أراد الحدّاد أن يصنع منها خزّان ماء على شكل متوازي مستطيلات مغلق، و أن يكون الخزّان مفتوحًا من الأعلى، جد أبعاد الخزان التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

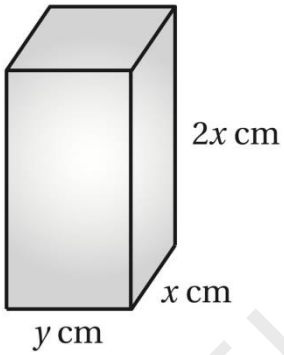
33 يبيّن الشكل الآتي صندوقًا على شكل متوازي مستطيلات. إذا كانت قاعدة الصندوق مربعة الشكل، و طول ضلع القاعدة $x\ cm$ ، و مجموع أطوال أحرفه $144\ cm$، فجد كلًّا مما يلي:



1. الاقتران الذي يمثّل حجم الصندوق بدلالة x.
2. قيمة x التي تجعل حجم الصندوق أكبر ما يمكن.

T . FADI AL-SHAQILDI

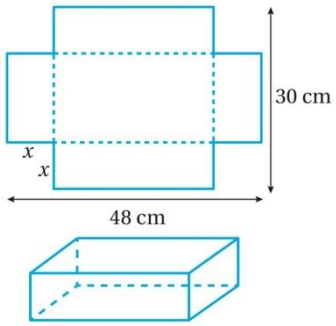
34 يبيّن الشكل المجاور قالبًا يستعمل لصنع لبنات البناء، و تبلغ مساحة سطحه الكلية $600\ cm^2$:



1. جد الاقتران الذي يمثّل حجم القالب بدلالة x.

2. جد قيمة x التي تجعل حجم القالب أكبر ما يمكن.

35 قطعة ورق مستطيلة الشكل، طولها $48\ cm$، و عرضها $30\ cm$. قُصَّ من زوايا القطعة مربعات متطابقة، طول ضلع كل منها $x\ cm$ كما في الشكل الآتي، ثم ثنيت لتشكيل علبة:

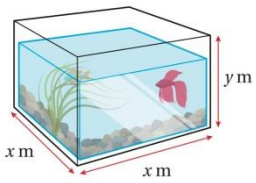


1. جد الاقتران الذي يمثّل حجم العلبة بدلالة x.

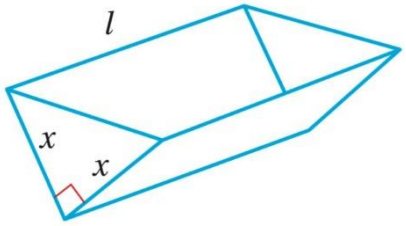
2. جد قيمة x التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن.

T . FADI AL-SHAQILDI

36 أرادت إسراء تصميم حوض أسماك زجاجي مفتوح من الأعلى، بحيث تكون سعته $0.2\ m^3$، و أبعاده كما في الشكل المجاور. جد أبعاد الحوض التي تجعل كمية الزجاج المستعملة لصنعه أقل ما يمكن.



37 قالب لصنع الكعك على شكل منشور ثلاثي، قاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. إذا كان حجم القالب $1000\ cm^3$، فجد أبعاده التي تجعل المواد المستعملة لصنعه أقل ما يمكن.



38 أرادت إحدى الشركات أن تصنع خزّانات من الفولاذ الرقيق المقاوم للصدأ على شكل متوازي مستطيلات، بحيث يكون كل منها مفتوحًا من الأعلى، و حجمه $500\ m^3$، و قاعدته مربعة الشكل. جد الأبعاد التي تجعل مساحة سطح الخزان أقل ما يمكن.

T . FADI AL-SHAQILDI

الدرس الرابع:
الاشتقاق الضمني
و المعدلات المرتبطة

1 جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي:

1. $2x + 3y^2 = 1$
2. $y^3 - \sin x = 4y^2$
3. $xy - 2y = 3e^x$
4. $x^2 + y^2 = 2$
5. $5y^2 - 2e^x = 4y$
6. $xy + y^2 = 4\cos x$
7. $x^2 + 2y - y^2 = 5$
8. $2xy - 3y = y^2 - 7x$
9. $y^5 = x^3$
10. $\sqrt{x} + \sin y = 16$
11. $\cos x + \ln y = 11$

T . FADI AL-SHAQILDI

2 جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يلي عند النقطة المعطاة:

1. $3x^3 - y^2 = 8$, $(2,4)$

2. $y^2 = ln\ x$, $(e,1)$

3. $(y-3)^2 = 4x - 20$, $(6,1)$

4. $x^2\ y - 2x^3 - y^3 + 1 = 0$, $(2,-3)$

12. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 9$

13. $x^2y^3 + y = 11$

14. $e^x\ y = x\ e^y$

15. $y\ ln\ x = 1 + x$

16. $y + y^3 = sin\ x - x^2$

T . FADI AL-SHAQILDI

3 إذا كان: $y^2 + x\,y + x^2 = 7$، فجد كلًّا مما يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(3, -2)$.

2. معادلة المماس عند النقطة $(3, -2)$.

3. معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(3, -2)$.

4 إذا كان: $y^2 - x^2 = 16$، فجد كلًّا مما يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(3, 5)$.

2. معادلة المماس عند النقطة $(3, 5)$.

5 إذا كان: $x^2y = 8 - 4y$، فجد كلًّا مما يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(2, 1)$.

2. معادلة المماس عند $(2, 1)$.

6 إذا كان: $x^2 + 4xy + y^2 = 25$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

1. ميل المماس عند النقطة $(0, 5)$.

2. معادلة المماس عند النقطة $(0, 5)$.

7 إذا كان: $y^2 - x^2 = 1$ ، فإن ميل المماس لمنحنى العلاقة عند النقطة $(1, \sqrt{2})$ هو:

ⓐ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⓑ $-\sqrt{2}$

ⓒ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⓓ $\sqrt{2}$

T . FADI AL-SHAQILDI

8 ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $3x - 2y + 12 = 0$ هو:

ⓐ 6 ⓑ 3

ⓒ $\frac{3}{2}$ ⓓ $-\frac{2}{3}$

9 عند رمي حجر في مسطّح مائي، تتكون موجات دائرية متّحدة المركز. إذا كان نصف قطر دائرة يزداد بمعدّل $8\ cm/s$، فجد معدّل تغيّر مساحة هذه الدائرة عندما يكون نصف قطرها $10\ cm$. علمًا بأن العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) و نصف قطرها (r) هي: $A = \pi r^2$.

10 نفخت هديل بالونًا على شكل كرة، فازداد نصف قطره بمعدّل $3\ cm/s$. جد معدّل تغيّر حجم البالون عندما يكون نصف قطره $4\ cm$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) و نصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

11 يخرج الهواء من منطاد كروي الشكل بمعدل ثابت مقداره $0.6\ m^3/s$ جد معدّل تناقص نصف قطر المنطاد عند اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $2.5\ m$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم المنطاد (V) و نصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

12 نفخت ماجدة بالونًا على شكل كرة، فازداد حجمه بمعدّل $800\ cm^3/s$. جد معدّل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون طول نصف قطره $60\ cm$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم البالون (V) و نصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

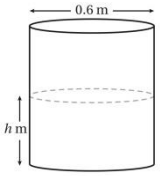
T . FADI AL-SHAQLDI

13 يزداد نصف قطر فقاعة صابون كروية الشكل بمعدّل $0.5\ cm/s$. جد سرعة زيادة مساحة سطح الفقاعة عندما يكون طول نصف قطرها $3\ cm$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين مساحة سطح الفقاعة (A) و نصف قطرها (r) هي: $A = 4\pi r^2$.

14 اتّخذ ورمًا شكلًا كرويًا تقريبًا ، و قد ازداد نصف قطره بمعدّل $0.13\ cm$ لكل شهر. جد معدّل تغيّر حجم الورم عندما يكون طول نصف قطره $0.45cm$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم الورم (V) و نصف قطره (r) هي: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

15 خزّان وقود اسطواني الشكل، و قطر قاعدته $2\ m$. إذا ملئ الخزّان بالوقود بمعدّل $0.5\ m^3/min$ فجد معدّل تغيّر ارتفاع الوقود فيه، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم الخزّان (V) و ارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.

16 يبيّن الشكل المجاور خزّان ماء اسطواني الشكل. إذا كانت كمية الماء في الخزّان تزداد بمعدّل $0.4\ m^3/s$، فجد معدّل تغيّر عمق الماء فيه (h)، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين حجم الخزان (V) و ارتفاعه (h) هي: $V = \pi r^2 h$.



T . FADI AL-SHAQILDI

17 تسرّب نفط من ناقلة بحرية، مكوّنًا بقعة دائرية الشكل على سطح الماء، تزداد مساحتها بمعدّل $50\ m^2/min$. جد سرعة تزايد نصف قطر البقعة عندما يكون طول نصف قطرها $20\ m$، علمًا بأن العلاقة التي تربط بين مساحة الدائرة (A) و نصف قطرها (r) هي: $A = 4\pi r^2$.

18 جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:
$x^2 + 6y^2 = 10$ عندما $x = 2$.

19 إذا كان: $ln\ (xy) = x^2 + y^2$، فاثبت أن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2y - y}{x - 2xy^2}$$

20 إذا كان المتغيران u و w مرتبطين بالعلاقة:
$u = 150\sqrt[3]{w^2}$، و كانت قيمة المتغير w تزداد بمرور الزمن t، و فقًا للعلاقة: $w = 0.05t + 8$، فجد معدّل تغيّر u بالنسبة إلى الزمن عندما $w = 64$.

T . FADI AL-SHAQILDI