الدرس الأول/ الاقترانات الاسية

فكرة الدرس :

تعرف الاقتران الأسي وخصائصه وتمثيله بيانياً.

المصطلحات :

الأقتران الأسي.

مسألة اليوم :

يمثل الاقتران $P(t) = 325(0.25)^t$ تركيز دواء في دم مريض بعد t ساعة من تنازله . أجد تركيز الدواء بعد 5 ساعات من تناوله.

$$P(t) = 325\,(0.25)^t$$
$$P(5) = 325(0.25)^5 \approx 0.32$$

الاقتران الأسي:

الاقتران الأسي (exponential function) اقتران في صورة : $f(x) = ab^x$ ، حيث a, b عددان حقيقيان و $b > 0$, $b \neq 1$, $a \neq 0$ ، ومن امثلته.

$$f(x) = 5(2^x)$$

$$f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$f(x) = (0.2)^x$$

أتعلم

إذا كان $b < 0$ فإن الاقتران الأسي يكون غير معرف عند بعض القيم ، مثل $x = \frac{1}{2}$ ؛ لأنه سيتضمن جذراً تربيعياً لقيمة سالبة . أما إذا كان $b = 1$ فإن هذا الاقتران يصبح ثابتاً في صورة : $f(x) = a$

أتذكر

اقترانات القوة : مثل $f(x) = x^3$ ليست اقترانات أسية ؛ لأن المتغير موجود في الأساس ، لا في الأس .

أكمل الجدول بذكر نوع الاقتران :-

الاقتران	نوعه
$f(x) = x^3 + 1$	
$f(x) = 3^x - 2$	
$f(x) = x + 1$	
$f(x) = 5$	

أ : هيثم حرب
0797771137

أتذكر

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$((a)^n)^m = a^{n\times m}$$

$$a^0 = 1$$

مثال 1

جد قيمة كل ما يلي عند x المعطاه :

1) $f(x) = 4^x$ $\quad \boxed{x = 3}$

$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ $\quad \boxed{x = -2}$

$f(-2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$= 5^2 = 25$

3) $f(x) = 3^x$ $\quad \boxed{x = 4}$

4) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad \boxed{x = -1}$

$f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$

5) $f(x) = (11)^x$ $\quad \boxed{x = 3}$

$(11)^3 = 1331$

6) $f(x) = -5\,(2)^x$ $\quad \boxed{x = 1}$

الاجابة $\boxed{-10}$

7) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^x$ $\quad \boxed{x = 2}$

الاجابة $\boxed{\frac{3}{49}}$

8) $f(x) = -(5)^x + 4$ $\quad \boxed{x = 4}$

الاجابة $\boxed{-621}$

9) $f(x) = 3^x + 1$ $\quad \boxed{x = 5}$

$f(5) = 3^5 + 1$

$243 + 1 = 244$

10) $f(x) = \left(\frac{1}{9}\right)^x - 3$ $\quad \boxed{x = 2}$

$f(2) = \left(\frac{1}{9}\right)^2 - 3$

$\frac{1}{81} - 3$ توحيد مقامات

$\frac{1-243}{81} = \frac{-242}{81}$

التمثيل البياني للاقتران الأسي وخصائصه

يمكن تمثيل الاقتران الأسي الذي في صورة $f(x) = ab^x$ حيث $a > 0$ و $b > 1$ بإنشاء جدول قيم ، ثم تعيين الأزواج المرتبة الناتجة من الجدول على المستوى الإحداثي ، ثم توصيل بعضها ببعض عن طريق منحنى متصل.

يمكن أيضاً استعمال التمثيل البياني لاستكشاف خصائص الاقتران الأسي

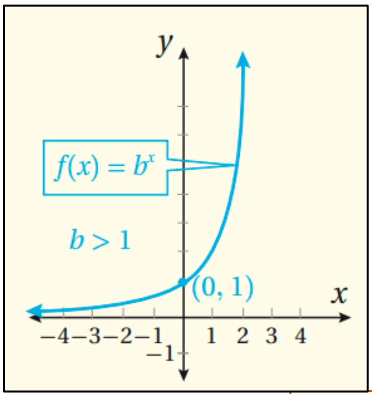
أتعلم

إذا كانت قيمة a سالبة ، فإن منحنى الاقتران ينعكس حول محور x

❖ **ملخص المفهوم**

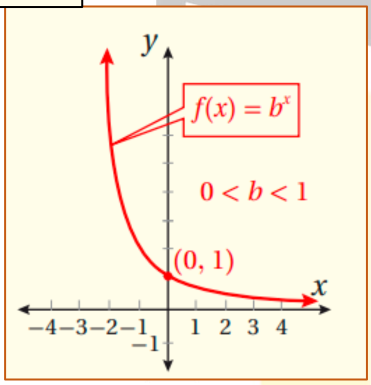
التمثيل البياني للاقتران الاسي على صورة : $f(x) = b^x$ ، حيث : b عدد حقيقي و $b \neq 1, b > 0$ له الخصائص الآتية :

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ , أي الفترة $(0, \infty)$.
- الاقتران متزايداً اذا كانت $b > 1$.
- يكون الاقتران متناقصاً إذا كانت $0 < b < 1$.
- للاقتران خط تقارب أفقي هو المحور x .
- يقطع الاقتران الأسي المحور y في نقطة واحدة هي $(0, 1)$ ولا يقطع المحور x والمقطع $y = 1$
- الاقتران واحد لواحد .



رسم الاقتران الأسي متزايد

$f(x) = ab^x$



رسم الاقتران الأسي المتناقص

$f(x) = ab^{-x}$

ما قيمة x التي تحقق المعادلة

$$3^{x-1} = 27$$

$A)\ 2$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 4$ $\quad d)\ 5$

* المعادلة الأســية تظهر فيها المتغيرات مواقع الاس
* إذا كانت $b \neq 1$, $b > 0$ فإن

إذا $b^x = b^y$

وفقط إذا كان $x = y$ فمثلاً

$$2^x = 32$$
$$x^x = 2^5$$

فإن $x = 5$

أ : هيثم حرب
0797771137

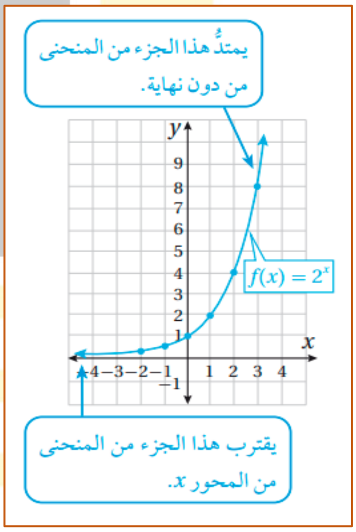
أتذكـر

$a^0 = 1$

مثال 2

إذا كان $f(x) = 2^x$ فأجيب عن الأسئلة الأتية:

1. مثل الاقتران بيانيا ثم أجد مجاله ومداه وخطوط التقارب .



2) جد المقطعين من المحورين الإحداثيين

3) هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص ؟

4) هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد ؟

أتذكـر

يطلق على الاقتران الذي يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله اسم اقتران واحد لواحد ويمكن التحقق من ذلك عن طريق اختبار الخط الأفقي ؛ اذ لا يوجد خط افقي يمكنه قطع منحنى الاقتران في أكثر من نقطة واحدة.

أتذكـر

* المجال هو مجموعة القيم التي توجد على المحور x ويكون الاقتران معرفا عندها.
* المدى هو مجموعة القيم التي توجد على المحور y وتكون صوراً لقيم x الواقعة ضمن مجال الاقتران .
* خط التقارب هو خط مستقيم يقترب منه منحنى الاقتران .

أ : هيثم حرب
0797771137

إذا كان $f(x) = 3^x$ أجب عما يلي :

a) مثـل الاقتران بيـانيـاً ثم حـدد مجـالـه ومـداه وخطوط التقارب ؟

مجال الاقتران R مجموعة الاعداد الحقيقية

مـدى الاقتران R^+ مجموعـة الاعـداد الحقيقيـة الموجبة $(0,\infty)$

خط التقارب الافقي هو المحور x $\quad y = 0$

b) جد المقطعين من المحورين الاحداثيين ؟

- لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x
- عند $x = 0$ فإن $y = 1$ ومنه فإن المقطع y لهذا الاقتران هو (1)

c) هل الاقتران $f(x)$ متزايد ام متناقص ؟

الاقتران متزايد لان $b > 1$, a موجبة

d) هل الاقتران واحد لواحد ، برر اجابتك؟

الاقتران واحد لواحد عند اختبار الخط الافقي فإنه يقطع منحنى الاقتران في نقطة واحد وكل عنصــر في المجال مرتبط بعنصر واحد فقط في المدى

واجب :

Q1 : مثل الاقتران بيانياً $f(x) = 4^x$ ثم حدد مجاله ومداه

Q2 : حدد مجال الاقتران $f(x) = 9^{-x}$ ثم حدد خط التقارب

Q3 : حدد هل الاقتران $f(x) = 7\left(\frac{1}{7}\right)^x$ متزايد أو متناقص

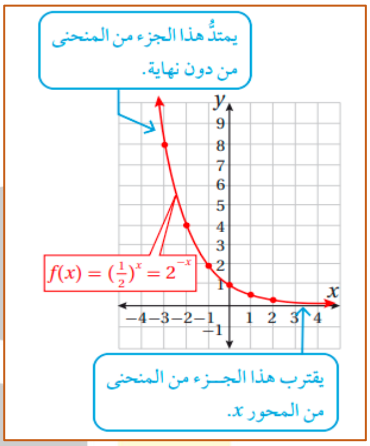
Q4 : مثـل الاقتـران $f(x) = 3(6)^x$ ثم حـدد مجاله ومداه

مثال 3

إذا كان

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

أجيب عن الأســـئلة الأتية:



1. أمثل الاقتران بيانياً ، ثم أحدد مجاله ومداه وخطوط التقارب.

مجاله ⟵ R مجموعة الاعداد الحقيقية

مداه ⟵ R^+ $(0, \infty)$

خط التقارب الافقي المحور x

$y = 0$

2. أجد المقطعين من المحورين الإحداثيين

لا يوجد لهذا الاقتران مقطع مع المحور x

عند $x = 0$ فإن $y = 1$ ومنه فإن المقطع

$y = 1$

3. هل الاقتران $f(x)$ متزايد أم متناقص ؟

متناقص لأن $0 < b < 1$, a موجبة قيمتها = 1

4. هل الاقتران $f(x)$ واحد لواحد ؟

واحد لواحد

أتعلم

أكتب الاقتران :

$f(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ في صورة :

$f(x) = b^{-x}$ لأن

ملاحظة

إذا كانت b

$\frac{3}{4}$ أقل من 1

$\frac{4}{3}$ أكبر من 1

Q : سؤال صيفي

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $f(x) = 3^x$

أي الاقترانات يعتبر أسياً ، برر إجابتك

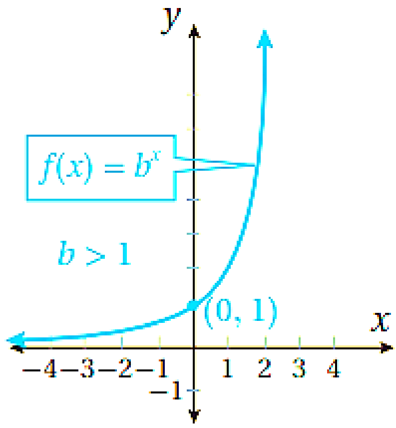
أ : هيثم حرب
0797771137

ملخص $f(x) = ab^x$ حيث $a = 1$

$\boxed{f(x) = b^x}$ حيث $b \neq 1$ $b \neq 0$ حيث الاساس

$\boxed{b > 1}$ الاقتران متزايد ←

لانه كلما زادت قيم x زادت قيم y



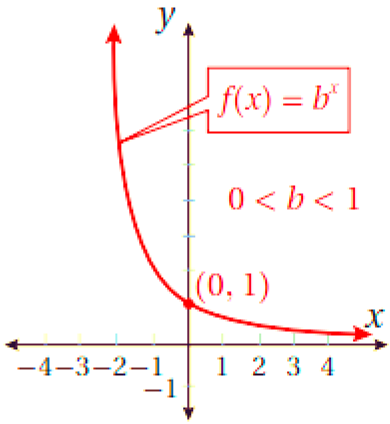
1. مجاله R مجموعة الاعداد الحقيقية
2. مداه R^+ $(0, \infty)$
3. المقطعين من المحورين الاحداثيين (x) لا يقطع و $y = 1$
4. نقطة تقاطع المنحنى مع $y(0, 1)(0, a + k)$
5. خط التقارب الافقي $y = 0$ (المحور x)
6. اقتران واحد لواحد دائماً لأن

كل عنصر في المجال مرتبط واحد فقط

عند رسم الخط الأفقي وانه يقطع المنحنى في نقطه واحد

$\boxed{0 < b < 1}$ الاقتران متناقص ←

لانه كلما زادت قيم x قلت قيم y



1. مجاله R مجموعة الاعداد الحقيقية
2. مداه R^+ $(0, \infty)$
3. المقطعين من المحورين الاحداثيين (x) لا يقطع و $y = 1$
4. نقطة التقاطع مع المنحنى $y(0, 1)$
5. خط التقارب الافقي $y = 0$ (المحور x)
6. اقتران واحد لواحد

أ : هيثم حرب
0797771137

$f(x) = ab^x + k$

موجب $a > 0$

مثال

سالبة $a < 0$

$b > 0$

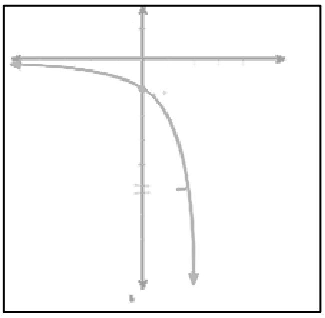
متزايد
مجاله R
مداه (k, ∞)
خط التقارب $y = k$
واحد لواحد
مثال $f(x) = 3(2)^x + 1$

$0 < b < 1$

متناقص
مجاله R
مداه (k, ∞)
خط التقارب $y = k$
واحد لواحد
مثال $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

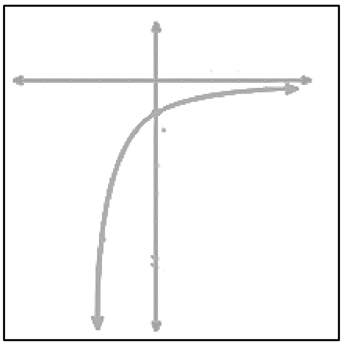
$b > 1$

متناقص
المدى $(-\infty, k)$
خط التقارب الأفقي $y = k$
اقتران واحد لواحد
مثال: $f(x) = -2(3)^x + 1$



$0 < b < 1$

متزايد
المدى $(-\infty, k)$
خط التقارب $y = k$
مثال: $f(x) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$



- إذا كان $a, k < 0$ موجبة الاقتران يقطع محور x (اختلاف اشارة a, k)
- إذا كان $a, k \geq 0$ موجبة الاقتران لا يقطع محور x

a, k متشابه الاشارة ⟵ يقطع x , y

a, k مختلفة الاشارة ⟵ يقطع y
لا يقطع x

أ : هيثم حرب
0797771137

خصائص الاقتران الأسي

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

يمكن تحديد خط التقارب الأفقي لأي اقتران أسي صورته : $f(x) = ab^{x-h} + k$ ويمكن أيضا تحديد مجال هذا الاقتران ومداه ؛ سواء أكان متناقصا أم متزايدا على النحو الأتي :

❖ **ملخص المفهوم**

اذا كان الاقتران : $f(x) = ab^{x-h} + k$ ، حيث a, b, k, h أعداد حقيقية ،

و$a > 0, b > 0, b \neq 1$ ، فان :

- مجال الاقتران $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية R.
- مدى الاقتران $f(x)$ هو الفترة (k, ∞) .
- الاقتران $f(x)$ متناقص اذا كان $0 < b < 1$.
- للاقتران $f(x)$ خط تقارب أفقيا هو المستقيم $y = k$

أتعلم

يعد منحنى الاقتران

$$f(x) = ab^{x-h} + k$$

تحويلاً هندسياً لمنحنى الاقتران الاسي الذي على الصـــورة $f(x) = b^x$ حيث يؤثر كل من k و a و h على مجاله ومداه

جـد خط التقـارب الافقي لكل اقتران ثم حـدد مجـالـه ومـداه مبينـاً إذا كان متزايـد أو متناقص :

1) $f(x) = 5(3)^{x+1} - 2$

2) $f(x) = 7(2)^{-x} + 3$

3) $f(x) = -3(4)^x + 1$

4) $f(x) = (3)^{x+2} - 1$

- خط التقارب الافقي $y = 1$
- مجاله R
- مدى الاقتران $(-1, \infty)$
- متزايد

سؤال اذكياء :
أكتب صورة مكافئة $f(x)$

أ : هيثم حرب
0797771137

5) $f(x) = 4(5)^{-x}$

$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{5}\right)^{x}$

- خط التقارب الافقي $y = 0$
- مجاله R
- مدى الاقتران $(0, \infty)$
- متناقص

6) $f(x) = \frac{1}{4}(x)^{x-1} + 2$

7) $f(x) = 5^{x-1} + 2$

- خط التقارب الافقي $y = 2$
- مجال الاقتران R مجموعة الاعداد الحقيقية
- مدى الاقتران $(2, \infty)$
- متزايد

8) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 5$

- خط التقارب الافقي $y = -5$
- مجال الاقتران R مجموعة الاعداد الحقيقية
- مدى الاقتران $(-5, \infty)$
- الاقتران متناقص

9) $f(x) = 3\left(\frac{1}{7}\right)^{x+5} - 6$

- خط التقارب الافقي $y = -6$
- مجال الاقتران R مجموعة الاعداد الحقيقية
- مدى الاقتران $(-6, \infty)$
- متناقص

10) إذا كان $f(x) = 3(7)^{x-2} + 1$ أكتب المعادلة $f(x)$ على الصورة $f(x) = ab^{x} + k$

يستفاد من الاقترانات الأسية في كثير من التطبيقات الحياتية مثل حساب عدد الكائنات الحية التي تتكاثر سريعاً

مثال 5

حشرات : يمثل الاقتران : $f(x) = 30(2)^{x}$ عدد حشرات خنفساء الدقيق في كيس دقيق حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس :

1. أجد عدد هذه الحشرات في كيس الدقيق بعد 6 أسابيع

$f(6) = 30(2)^{6}$

$30(64) = 1920$

أ : هيثم حرب
0797771137

2. بعد كم اسبوعاً يصبح عددها في الكيس 7680 حشرة ؟

$f(x) = 30(2)^x$

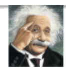
$\frac{7680}{30} = \frac{30}{30}(2)^x$

$256 = 2^x$

$2^8 = 2^x$

$x = 8$ بعد 8 اسابيع

إذا تساوي الاساس تساوي الأس



معلومه

تعد خنفساء الدقيق إحدى الآفات الضارة بالحبوب وهي تعيش في مخازن الدقيق والقمح ، حيث تتغذى بهما ، مختلفة رائحة كريهة مميزة

أتدرب وأحل المسائل

بكتيريا : يمثل الاقتران $f(x) = 7000(1.2)^x$: عدد الخلايا البكتيرية في تجربة مخبرية حيث x الزمن بالساعات :

15. أجد عدد الخلايا البكتيرية في بداية التجربة

بداية الفترة

$7000(1.2)^0 \Leftarrow (x = 0)$

$7000 =$

16. أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة

$f(12) = 7000\,(1.2)^{12} \approx$

17. بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية 10080 خلية ؟

$\frac{10080}{7000} = \frac{7000}{7000}(1.2)^x$

$1.44 = (1.2)^x$

$(1.2)^2 = (1.2)^x$

$x = 2$

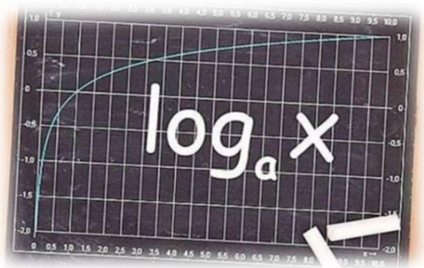
بعد ساعتين

أتحقق من فهمي – واجب صفي

بكتيريا : يمثل الاقتران : $f(x) = 500(2)^x$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية حيث x الزمن بالساعات :

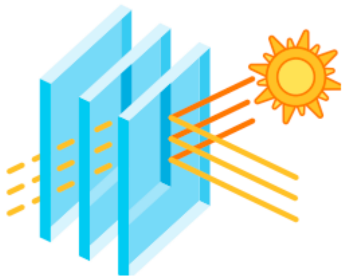
a) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 ساعات.

b) بعد كم ساعة يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 4000 خلية ؟



أتدرب وأحل المسائل

ضوء : يمثل الاقتران : $f(x) = 100(0.97)^x$ نسبة الضوء المار خلال x من الألواح الزجاجية المتوازية :



18. أجد النسبة المئوية للضوء المار خلال لوح زجاجي واحد.

$f(1) = 100\ (0.97)^1 = 97\%$

19. أجد النسسبة المئوية للضوء المار خلال 3 ألواح زجاجية .

$f(3) = 100(0.97)^3 = 100\ (0.9109)$
≈ 91

سرطان البنكرياس : يمثل الاقتران :

$P(t) = 100(0.3)^t$ النسبة المئوية للمتعافين من مرضى سرطان البنكرياس ممن هم في المرحلة المتقدمة حيث تعافوا بعد t سنة من التشخيص الأولي للمرض :

20. أجد النسبة المئوية للمتعافين بعد سنة من التشخيص.

$P(1) = 100\ (0.3)^1 = 30\%$

أ : هيثم حرب
0797771137

21. بعد كم سنة تصبح النسبة المئوية للمتعافين 9% ؟

$$\frac{9}{100} = \frac{\cancel{100}}{100}(0.3)^x$$

$$0.09(0.3)^x$$

$$(\cancel{0.3})^2 = (\cancel{0.3})^x$$

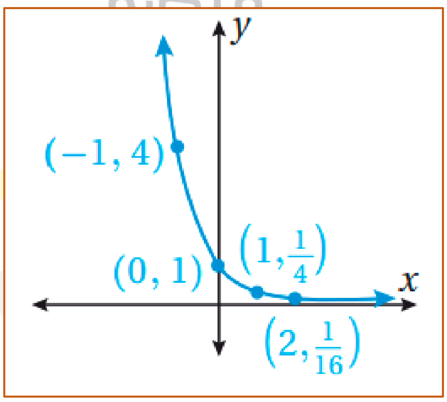
$x = 2$ بعد سنتان

تذكر

$0.09 \longrightarrow (0.3)^2$
$0.64 \longrightarrow (0.8)^2$
$0.81 \longrightarrow (0.9)^2$
$0.125 \longrightarrow (0.5)^3$

مهارات التفكير العليا

تبرير : يبين الشكل المجاور التمثيل البياني لمنحنى الاقتران $f(x) = ab^x$ أجد $f(3)$ مبرراً إجابتي.



$y = ab^x$

$(0,1) \Rightarrow 1 - ab^0 \Rightarrow \therefore \boxed{a = 1}$

$\left(1,\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4} = ab^1 \xrightarrow{\text{قاعدة الاقتران}} \therefore y = \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow 4^{-x}$

$\boxed{\frac{1}{4} = a}$ $\quad f(3)\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

23. اكتشف المختلف:أي الاقترانات الاتية مختلف مبرراً إجابتي ؟

$a)\ y = 3^x$ $\quad$ b) $f(x) = 2(4)^x$

$c)\ f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad$ d) $y = 5(3)^x$

a) متزايد $\quad$ b) متزايد
c) متناقص $\quad$ d) متزايد

$\boxed{\text{هو المختلف } (c)}$

24. تحد : اذا كان الاقتران $f(x) = ab^x$ أسيا فأثبت أن $b = \frac{f(x+1)}{f(x)}$.

$$f(x) = \frac{x+1}{f(x)} = \frac{ab^{x+1}}{ab^x}$$

$$\frac{b^{x+1}}{b^x} = b^{x+1-x} = b^1$$

الاسس تطرح من حالة القسمة

إذا كان $f(x) = ab^x$ اقتراناً أسياً أثبت أن

$$\frac{f(x-2)}{f(x)} = \frac{1}{b^2}$$

أ : هيثم حرب
0797771137

امتحان على الدرس الأول

السؤال الأول : أجد قيمة كل اقتران مما يأتي عند قيمة x المعطاة.

1) $f(x) = (13)^x , x = 2$

2) $f(x) = 4(5)^x , x = 3$

3) $f(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x , x = 3$

4) $f(x) = -(3)^x + 7 , x = 4$

5) $f(x) = -(2)^x + 1 , x = 6$

6) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 12 , x = 3$

السؤال الثاني: أمثل كل اقتران مما ياتي بيانياً ، ثم أحدد مجاله ومداه :

1) $f(x) = 7(6)^x$

2) $f(x) = 7^{-2}$

3) $f(x) = 5\left(\frac{1}{8}\right)^x$

4) $f(x) = 2(9)^x$

السؤال الثالث : خط التقارب الأفقي لكل اقتران مما يأتي ، ثم أحدد مجاله ومداه مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايداً :

1) $f(x) = 7^{x-2} - 1$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{x+1} - 3$

3) $f(x) = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3} - 7$

4) $f(x) = 7(4)^{x-5} + 3$

السؤال الرابع : بكتيريا : يمثل الاقتران
$f(x) = 400(2)^{\frac{x}{3}}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد x ساعة في تجربة مخبرية:

1) أجد عدد الخلايا البكتيرية عند بدء التجربة.

2) أجد عدد الخلايا البكتيرية بعد 12 ساعة.

3) بعد كم ساعه يصبح عدد الخلايا البكتيرية 102400 خلية ؟

السؤال الخامس : خزان : يمثل الاقتران
$f(x) = 2(0.75)^x$ كمية الماء المتبقية في خزان (بالمتر المكعب) بعد x ساعة نتيجة ثقب فيه:

1) أجد كمية الماء المتبقية في الخزان بعد ساعة واحدة

2) ما الزمن الذي تصبح فيه كمية الماء المتبقية في الخزان $\frac{9}{8}\ \mathrm{m^s}$ تقريبا

تذكر

$\frac{1}{2} \Leftarrow 0.5$

$\frac{3}{4} = 0.75$

$\frac{1}{4} = 025$

أ : هيثم حرب
0797771137

الدرس الثاني النمو والاضمحلال الأسي

❖ المفهوم الأساسي معادلة النمو الأسي :

$$y = a(1+r)^t$$

t هي الزمن

a هي المبلغ المبدئي

r هي معدل التغير الذي يتم التعبير عنه ككسر عشري $r > 0$

y هي المبلغ النهائي

المرابحة المركبة : هي المرابحة المتحصلة أو المدفوعة على كل من الاستثمار الأولي والمرابحة المتحصلة سابقاً إنها أحد تطبيقات النمو الأسي.

❖ المفهوم الأساسي معادلة المرابحة المركبة :

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A هي المبلغ الحالي

r هي معدل المرابحة السنوية ويتم التعبير عنه ككسر عشري $r > 0$

P هي المبلغ الأساسي أو الأولي

n هي عدد مرات تركيب المرابحة في كل عام t هي الزمن

❖ المفهوم الأساسي معادلة الاضمحلال (التضاؤل) الأسي :

$$y = a(1-r)^t$$

a هي المبلغ المبدئي

t هي الزمن

r هي معدل الاضمحلال (التضاؤل) ويتم التعبير عنه ككسر عشري $0 < r < 0$

y هي المبلغ النهائي

العوامل الأسية

عامل النمو الأسي	عامل الاضمحلال الأسي
$(1+r)$	$(1-r)$

دالة النمو الأسي

التي تمثل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

$$A(t) = a(1+r)^t$$

حيث a : القيمة الابتدائية

r النسبة المئوية للزيادة في الفترة الزمنية الواحدة

دالة الأضمحلال الأسي

التي تمثل الزيادة في قيمة ما بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

$$A(t) = a(1+r)^t$$

حيث a : القيمة الابتدائية

r النسبة المئوية للزيادة في الفترة الزمنية الواحدة

أ : هيثم حرب
0797771137

فكرة الدرس :

تعرف خصائص كل من اقتران النمو الأسي واقتران الاضمحلال الأسي

المصطلحات :

اقتران النمو الأسي ، عامل النمو اقتران الاضمحلال الأسي ، عامل الاضمحلال الربح المركب الأساس الطبيعي ، الاقتران الاسي الطبيعي ، الربح المركب المستمر

مسألة اليوم :

بلغ عدد سكان المملكة الأردنية الهاشمية نحو 10.8 ملايين نسمة عام 2020 م إذا كانت نسبة النمو السكاني قرابة 2.6% سنوياً ، فأجد العدد التقريبي للسكان عام 2030 م.

$$2020 \xrightarrow{2.6\%} 2030$$

10.8 m نمو ?

$$\text{rate } (r) = 2.6\% = 0.026$$

$$t = 2030 - 2020 = 10$$

$$A(t) = 10.8\,(1 + 0.026)^{10}$$

$$= 10.8(1.026)^{10}$$

$$= 13.96 \qquad \approx 14 \text{ m}$$

اقتران النمو الأسي

☑ تزداد بعض الكميات بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية.

يمكن إيجاد مقادير هذه الكميات التي ازادات بعد t فترة من الزمن باستعمال الاقتران الآتي :

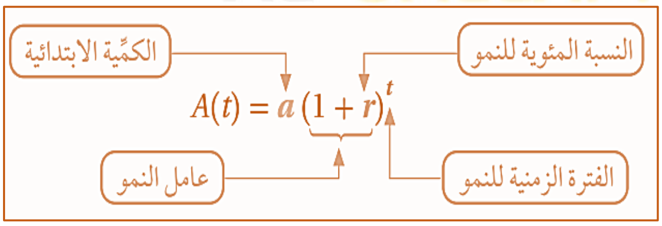
$$\boxed{A(t) = a\,(1 + r)^t}$$

يطلق على هذا الاقتران اسم اقتران النمو الأسي (exponential growth function) حيث t الفترة الزمنية و a الكمية الابتدائية و r النسبة المئوية للنمو في فترة محددة ، أما أساس العبارة الأسية $(1 + r)$ فيسمى عامل النمو (growth factor)

❖ مفهوم اساسي
اقتران النمو الأسي

بالكلمات : اقتران النمو الأسي هو كل اقتران أسي يتزايد بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

بالرموز :



أتعلم

اقتران النمو الأسي

$A(t) = a(1+r)^t$ هو إحدى صور الاقتران الأسي $f(x) = b^x$ حيث استعمل المقدار $1+r$ بدلاً من b واستعمل t بدلاً من x

r : نسبة النمو

$1+r$ عامل النمو

مثال 1 من الحياة

خراف : في دراسة شملت إحدى مزارع الأغنام ، تبين أن عدد الخراف في المزرعة يزداد بنسبة 31% سنوياً :

1) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة ، علماً بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 1524 خروفاً.

اقتران النمو الأسي $A(t) = a(1+r)^t$

$= (1524(1+0.31)^t$

بتعويض $a = 1524 , r = 0.31$

بالتبسيط $= 1524(1.31)^t$

إذان اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الخراف بعد t سنة هو $A(t) = 1524(1.31)^t$

2) أجد عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة.

لإيجاد عدد الخراف بعد 5 سنوات ، اعوض $t = 5$

$A(t) = 1524\ (1.31)^t$

اقتران النمو الأسي للخراف

$A(5) = 1524\ (1.31)^5$

بتعويض $t = 5$

≈ 5880

باستعمال الآلة الحاسبة

إذن عدد الخراف بعد 5 سنوات من بدء الدراسة هو 5880 خروفاً تقريباً.

أتحقق من فهمي

في دراسة شملت إحدى مزارع الأبقاء ، تبين أن عدد الأبقار في المزرعة يزداد بنسبة 18% سنوياً:

a) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد الأبقار بعد t سنة ، علماً بأن عددها في المزرعة عند بدء الدراسة هو 327 بقرة ؟

$A(t) = a(a+r)^t$

$A(t) = 327(1+0.18)^t$

$A(t)327\ (1.18)^t$

b) أجد عدد الأبقار بعد 3 سنوات من بدء الدراسة.

$A(3) = 327\ (1.18)^3$

$= 537.3$

اقتران الاضمحلال الأسي

كما هو الحال في النمو الأسي يمكن تمثيل النقص في كمية ما ، بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية باستعمال الاقتران الآتي :

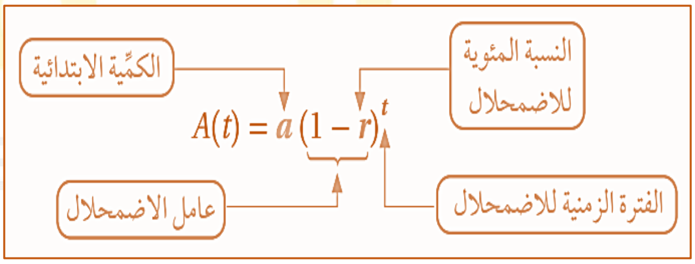
$$A(t) = a(1-r)^t$$

يطلق على هذا الاقتران اسم اقتران الاضمحلال الاسي (exponential decay function) حيث t الفترة الزمنية و a الكمية الابتدائية و r النسبة المئوية للاضمحلال في فترة زمنية محددة . أما أساس العبارة الأسية $(1-r)$ فيسمى عامل الاضمحلال (decay factor)

❖ مفهوم أساسي
اقتران الاضمحلال الأسي

بالكلمات : اقتران الاضـــمحلال الأسي هو اقتران أسي يتناقص بنسبة مئوية ثابتة في فترات زمنية متساوية

بالرموز :



مثال 2 من الحياة

كيمياء : تتناقص $5\ g$ من عنصر الكروم بما نسبته 2.45% يومياً نتيجة تفاعله في الهواء.

1) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوماً.

اقتران الاضمحلال الاسي $A(t) = a(1-r)^t$

$= 5(1-0.0245)^t$

بتعويض $a = 5\ ,r = 0.0245$

بالتبسيط $= 5(0.9755)^t$

إذن اقتران الاضمحلال الاسي الذي يمثل كمية الكروم (بالغرام) بعد t يوماً هو $A(t) = 5(0.9755)^t$

2) أجد كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام.

المعادلة الأصلية $A(t) = 5(0.9755)^t$

$A(t) = 5(0.9755)^3$

بتعويض $t = 3$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 4.6

إذن كمية الكروم (بالغرام) بعد 3 أيام هي $4.6\ g$ تقريباً.

أ : هيثم حرب
0797771137

أتحقق من فهمي

سيارة : اشترت سوسن سيارة هجينة قابلة للشحن بمبلغ JD 28500 إذا كان ثمن السيارة يقل بنسبة 5% سنوياً، فأجيب عن السؤالين الآتيين :

a) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة.

$$A(t) = a(1 - r)^t$$

$$A(t) = 28500(1 - 005)^t$$

$$A(t) = 28500\,(0.95)^t$$

b) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات

$$A(4) = 28500\,(0.95)^4$$

$$= \boxed{-23,213.4}\ \text{JD}$$

أتعلم

تحتوي السيارة الهجينة على محرك كهربائي ، ومحرك احتراق داخلي

الربح المركب

يستفاد من اقتران النمو الأسي في تطبيقات حياتية عديدة منها الربح المركب

(compound interest) وهو الفائدة المستحقة على مبلغ الاستثمار الأصلي الذي يسمى رأس المال ، والفوائد المستحقة سابقاً.

❖ مفهوم أساسي
الربح المركب

بالكلمات : يمكن حساب جملة المبلغ المستحق في حالة الربح المركب باستعمال الصيغة الآتية :

بالرموز :

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

r: مُعدَّل الفائدة السنوي الذي يُكتَب في صورة عشرية.

جُملة المبلغ.

n: عدد مرّات إضافة الربح المُركَّب في السنة.

t: عدد السنوات.

المبلغ الأصلي.

مثال 3

استثمر سليمان مبلغ JD 9000 في شركة صناعية ، بنسبة ربح مركب تبلغ 1.46% سنوياً وتضاف كل 3 أشهر أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات .

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 9000\left(1+\frac{0.0146}{4}\right)^{4(3)}$$

بتعويض

$P = 9000\,, r = 0.0146, n = 4r = 3$

$= 9402.21$

إذن جملة المبلغ بعد 3 سنوات JD 9402.21 تقريباً

أتحقق من فهمي

استثمرت تهاني مبلغ JD 5000 في شركة ، بنسبة ربح مركب تبلغ 2.25% سنوياً وتضاف كل 6 أشهر ، أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

$$A(t = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= 5000\left(1+\frac{0.0215}{2}\right)^{2(5)}$$

$= 5591.8 \quad x5692$

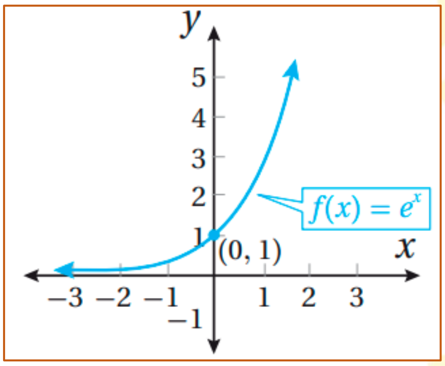
$= 5000(x + 0.1125)$

الاقتران الأسي الطبيعي

في كثير من التطبيقات الحياتية ، يكون الاختيار الأمثل لأساس الاقتران الأسي هو العدد غير النسبي 2.718281828 الذي يسمى (natural base) ويرمز إليه برمز ؟ وفي هذه الحالة يسمى الاقتران $f(x) = e^x$ الأقتران الأسي الطبيعي

ألاحظ من الشكل المجاور أن خصائص التمثيل البياني للاقتران الأسي لطبيعي هي نفسها خصائص التمثيل البياني للاقتران $f(x) = b^x$

حيث : $b > 1$



توجد تطبيقات عديدة للاقتران الأسي الطبيعي منها حساب الربح المركب المستمر وهو عملية حساب جملة المبلغ بعد إضافة الربح المركب إلى رأس المال عدداً لا نهائياً من المرات في السنة.

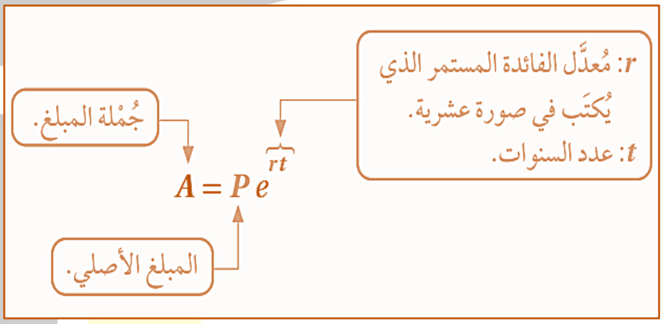
لغة الرياضيات

يطلق على الأساس الطبيعي ايضاً اسم العدد النيبيري

❖ **مفهوم أساسي**
الربح المركب المستمر

بالكلمات : يمكن حساب جملة المبلغ المستحق في حالة الربح المركب المستمر باستعمال الصيغة الآتية

بالرموز :



مثال 4

أودع علي مبلغ JD 4500 في حساب بنكسي بنسبة ربع مركب مستمر مقدارها 4% سنوياً أجد جملة المبلغ بعد 10 سنوات.

صيغة الربح المركب المستمر $A = Pe^{rt}$

$= 4500e^{0.04(10)}$

بتعويض $P = 4500 , r = 0.04 , t = 10$

باستعمال الآلة الحاسبة ≈ 6731.21

إذن جملة المبلغ بعد 10 سنوات JD 6713.21 تقريباً

أتحقق من فهمي

أودعت سارة مبلغ JD 6300 في حساب بنكي ، بنسبة بح مركب مستمر مقدارها 3.2% سنوياً أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات .

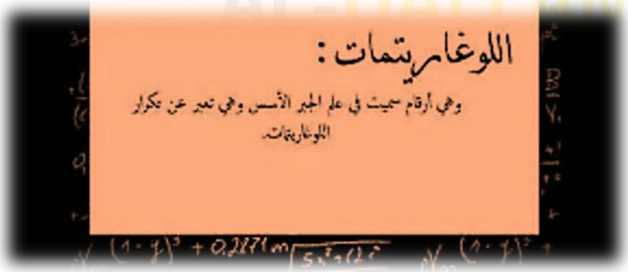
$A = Pe^{rt}$

$r = 0.032$
$P = 6300$
$t = 9$
$A = 6300\, e^{(0.032\times 2)}$

أتعلم

لإيجاد قيمة $4500e^{0.4}$ باستعمل الآلة الحاسبة ، أضغط على الأزرار الآتية:

4 5 0 0
SHIFT e^r
0 . 4 =
6713.211393857



أتدرب وأحل المسائل

- يبلغ عدد المشاركين في مؤتمر طبي 150 طبيباً هذه السنة ويتوقع زيادة هذا العدد بنسبة 8% كل سنة :

1) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد المشاركين بعد t سنة .

$A(t) = a(1+r)^t$

$A(t) = 150\ (1+0.08)^t$

$A(t) = 150\ (1.08)^t$

2) أجد عدد المشاركين المتوقع بعد 5 سنوات

$A(5) = 150(1.08)^5$

≈ 220.4

- استخدم 50 ألف شخص موقعا الكترونيا تعليميا سنة 2019م ، ثم ازداد عدد مستخدمي الموقع بنسبة 15% كل سنة :

3) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة .

$A(t) = 50000(1+0.15)^t$

$A(t) = 50000\ (1.15)^t$

4) أجد عدد مستخدمي الموقع سنة 2025م .

$A(6) = 50000\ (1.15)^t$

$t = 2025 - 2019 \quad t = 0$

$A(6) = 50000\ (1.15)^6$

$= 115,653.038$

- سيارة : يتناقص ثمن سيارة سعرها JD 17350 بنسبة 3.5% سنويا :

5) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة .

$A(t) = a\ (1-r)^t$

$A(t) = 17350\ (1-0.035)^t$

$A(t) = 17350\ (0.965)^t$

6) أجد ثمن السيارة بعد 3 سنوات .

$A(3) = 17350\ (0.965)^3$

$\approx 15,591$ دينار

- بكتيريا : يتناقص عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بنسبة 27% كل ساعة بعد اضافة مضاد حيوي الى العينة :

7) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة ، علما بأن عددها عند اضافة المضاد الحيوي هو 15275 خلية .

$A(t) = 15275\ (1-0.27)^t$

$A(t) = 15275\ (0.73)^t$

8) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 7 سنوات

$A(7) = 15275\ (0.73)^7$

$= 1687.5$

≈ 1687

9) دجاج : ينفق الدجاج في مزرعة للدواجن بنسبة 25% يوميا نتيجة اصابته بمرض ما . أجد العدد المتبقي منه بعد 5 أيام من بدء المرض علما بأن عدده الأولي في المزرعة هو 1550 دجاجة .

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(5) = 1550(1-0.25)^5$

$= 1550(0.75)^5 = 367.82$

≈ 368 دجاجة

استثمر ربيع مبلغ 1200 JD في شركة ، بنسبة ربح مركب تبلغ 10% سنوياً ، وتضاف كل شهر :

10) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد سنة t

$A = P\left(1+\frac{r}{t}\right)^{nt}$

$A = 1200\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12.t}$

$n = \frac{12}{1}$ $\qquad n = 12$

11) أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات .

$A = 1200\left(1+\frac{0.1}{12}\right)^{12x5}$

$= 1974.4$ JD

- استثمرت هند مبلغ 6200 JD في شركة ، بنسبة ربح مركب تبلغ 8.4% سنوياً وتضاف كل يوم :

12) أكتب صيغة تمثل جملة المبلغ بعد سنة t

$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{464}\right)^{365(t)}$

13) أجد جملة المبلغ بعد 6 سنوات .

$A = 6200\left(1+\frac{0.084}{365}\right)^{365(6)}$

$= 10,262.45$

$\approx 10,262.5$

14) أودع حسام مبلغ 9000 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 3.6% سنوياً أجد جملة المبلغ بعد 7 سنوات .

$A = P\,e^{rt}$

$A = 9000\,e^{(0.036)t}$

$A = 11,579.4$ JD

15) أودعت ليلى مبلغ 8200 JD في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.9% سنوياً أجد جملة المبلغ بعد 9 سنوات .

$A = 8200 \times e^{(0.049)}$

$= 12,744.44$

$\approx 12,745$JD

16)ذبابة الفاكهة : أعد باحث دراسة عن تكاثر ذباب الفاكهة ، وتوصل الى أنه يمكن تمثيل العدد التقريبي للذباب بالاقتران : $P(t) =$ $20e^{0.03t}$حيث P عدد الذباب بعد t ساعة .

أجد عدد ذباب الفاكهة بعد 72 ساعة من بدء الدراسة ، مقربا اجابتي الى اقرب عدد صحيح .

$P(t) = 20\,e^{0.03t}$

$P(72) = 20\,e^{0.03(72)}$

≈ 173.4

أ : هيثم حرب
0797771137

مهارات التفكير العليا

17) أكتشف الخطأ : أوجد رامي جملة مبلغ مقداره JD 250 بعد إيداعه في حساب بنكي بعد 3 سنوات بنسبة ربح مركب تبلغ 1.25% سنوياً وتضاف كل 3 أشهر كما يأتي :

$$A = 250\left(1+\frac{1.25}{4}\right)^{4(3)}$$
$$= 6533.29$$

$$A = 250\left(1+\frac{0.0125}{4}\right)^{4(5)}$$
$$= 259.54 \text{ JD}$$

الخطأ كان في كتابة نسبة القاعدة

18) تحد : أكتب اقترانا يمثل عدد المصابين بالانفلونزا الموسمية بعد t أسبوعا علما بأن العدد يتضاعف بمقدار 3 مرات كل أسبوع .

كتاب التمارين

-استخدم 35 ألف شخص موقعاً إلكترونياً تعليمياً هذه السنة ومن المتوقع أن يزداد هذا العدد بنسبة 2% كل سنة.

1) أكتب اقتران النمو الاسي الذي يمثل عدد مستخدمي الموقع بعد t سنة.

$$A(t) = a(1+r)^t$$

$$A(t) = 35000\,(1+002)^t$$

2) أجد عدد مستخدمي الموقع بعد 7 سنوات.

$$A(7) = 3500\,(1.02)^7$$
$$= 40,203.99$$
$$\approx 40,204 \text{ JD}$$

تلوث : في دراسة علمية تناولت درجة تأثير التلوث في عدد الأسماك التي تعيش في إحدى البحيرات ، توصل الباحثون إلى أن عدد الأسماك في البحيرة يقل بنسبة 20% كل سنة.

3) اكتب اقتران الاضمحلال الأسي الذي يمثل عدد الأسماك في البحيرة بعد t سنة ، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة هو 12000 سمكة

$$A(t) = a(1-r)^t$$

$$A(t) = 12000\,(1-0.2)^t$$

$$= 12,000\,(0.8)^t$$

أ : هيثم حرب
0797771137

4) أجد عدد الأسماك في البحيرة بعد 3 سنوات.

$A(3) = 12000\,(0.8)^3$
$= 6144$ سمكة

-بلغ عدد سكان لواء الموقر (شرق العاصمة عمان) 84370 نسمة تقريباً سنة 2015 م ، إذا كانت نسبة النمو السكاني في اللواء 2.4% سنوياً ، فاجب عن السؤالين الآتيين :

5) أكتب اقتران النمو الأسي الذي يمثل عدد سكن اللواء بعد t سنة.

$A(t) = a(1+r)^t$

$A(t) = 84370\,(1+2.024)^t$

$= 84370\,(1.024)^t$

6) أجد العدد التقريبي لسكان اللواء سنة 2030م

$t = 2030 - 2015 \qquad t = 15$

$A(10) = 84370\,(1.024)^{15}$

$= 120,416.88$

$\approx 120,417$ نسمة

-سيارة : يتناقص ثمن سيارة سعرها 19725 JD بنسبة 3% سنوياً :

7) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي لثمن السيارة بعد t سنة.

$A(t) = a(1-r)^t$

$A(t) = 19725\,(1-0.023)^3$

$A(t) = 19725(0.97)^t$

8) أجد ثمن السيارة بعد 4 سنوات

$A(4) = 19725(0.97)^4$
$= 17,462.6$

-استثمر عامل مبلغ 8000 JD في شركة صناعية بنسبة ربح مركب تبلغ 5.5% سنوياً وتضاف كل شهر :

9) أكتب صيغة تمثيل الجملة بعد t سنة.

$$A = P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$A = 8000\left(1+\frac{0.055}{12}\right)^{12(t)}$$

$n = \frac{12}{1} = 12$

10) أجد جملة المبلغ بعد 3 سنوات

$$A = 8000\left(1+\frac{0.055}{12}\right)^{12(3)}$$

$= 9431.58$
≈ 9431 JD

11) أودعت ليلى مبلغ 60000 JD في حساب بنكي ، بنسبة ربح مركب مستمر 6% أجد جملة المبلغ بعد 17 سنة.

$A = P\,e^{rt}$

$A(t) = 60,000\,e^{0.06(17)}$

$= 166,391.68$

$\approx 166,392$ JD

الدرس الثالث / الاقترانات اللوغاريتمية

فكرة الدرس :

تعرف الاقتران اللوغاريتمي ، وخصائصه ، وتمثيله

المصطلحات :

الأقتران اللوغاريتمي للأساس b.

مسألة اليوم :

يستعمل الاقتران $R = \log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ لحساب قوة زلزال وفق مقياس ويختر ، حيث 1 شدة الزلزال المراد قياسه و 1_0 أقل شدة للزلزال الذي يمكن للإنسان الإحساس به ، ماذا يمثل الرمز log في هذا الاقتران ؟

الاقتران اللوغاريتمي والعبارات اللوغاريتمية

تعلمت سابقاً أن أي اقتران يجتاز اختبار الخط الأفقي هو اقتران واحد لواحد ، وهذا يعني انه يمكن إيجاد اقتران عكسي له.

ومن ثم فانه يمكن ايجاد اقتران عكسي للاقتران الأسي الذي صورته : $f(x) = b^x$ ، حيث :

$b > 0 , b \neq 1$.

يطلق على الاقتران العكسي للاقتران الأسي :

$f(x) = b^x$ اسم الاقتران اللوغاريتمي للأساس b ويرمز (logarithmic function with base b) اليه بالرمز $g(x) = \log_b x$ ويقرأ : لوغاريتم x للأساس b .

اذن : اذا كان الاقتران : $f(x) = b^x$ ، حيث : $b > 0 , b \neq 1$ فإن $f^{-1}(x) = \log_b x$. ويبين الشكل المجاور التمثيل البياني للاقترانين معا

أتعلم

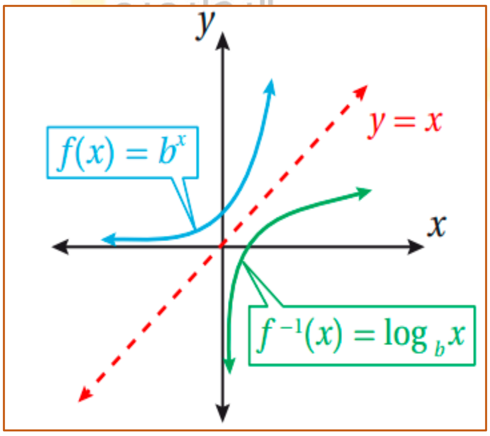
ألاحظ التمثيل البياني للاقتران $f'(x)$ هو انعكاس للأقتران $f(x)$ حول المستقيم $y = x$

❖ مفهوم أساسي

العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

اذا كان : $b \neq 1$, $b > 0$, $x > 0$ فان :

الصورة اللوغاريتمية		الصورة الأسية
$\log_b x = y$	اذا وفقط اذا	$b^y = x$
الأس ، الأساس		الأس ، الأساس



يمكن استعمال تعريف اللوغاريتم لتحويل المعادلة من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسية:

اللوغاريتم	الاسي
مجاله $(0,\infty)$	مجاله R
المدى R	مداه $(0,\infty)$
خط التقارب $x=0$	خط التقارب $y=0$
نقطة التقاطع $(1,0)$	نقطة التقاطع $(0,1)$

مثال 1

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية :

الاقتران الاسي	الاقتران اللوغاريتمي
	$1)\ \log_2 8 = 3$
	$2)\ \log_{23} = 1$
	$3)\ \log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$
	$4)\ \log_1 = 0$

أتحقق من فهمي

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية :

المعادلة الاسية	المعادلة اللوغاريتمية
$\Rightarrow 2^4 = 16$	$1)\ \log_2 16 = 4$
$\Rightarrow 7^1 = 7$	$2)\ \log_7 7 = 1$
$\Rightarrow 3^{-5} = \frac{1}{243}$	$3)\ \log_3\left(\frac{1}{243}\right) = -5$
$\Rightarrow a^0 = 1$	$4)\ \log_a 1 = 0$

أتذكر

الصورة اللوغاريتمية $\log_b x = y$ والصورة الأسية $b^y = x$ متكافئتان

مثال 2

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية

1) $8^3 = 512$

$\log_8^{512} = 3$

2) $25^{\frac{1}{2}} = 5$

$\log_{25}^{5} = \frac{1}{2}$

3) $(5)^{-3} = \frac{1}{125}$

4) $27^0 = 1$

أتحقق من فهمي

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية :

$a)\ 7^3 = 343 \Rightarrow \log_7 343 = 3$

$b)\ 49^{\frac{1}{2}} = 7 \Rightarrow \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$

$c)\ (2)^{-5} = \frac{1}{32} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -5$

$d)\ 17^0 = 1 \Rightarrow \log_{17} 1 = 0$

أتدرب وأحل المسائل

أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما يأتي في صورة أسية:

المعادلة اللوغاريتمية	المعادلة الاسية
1) $\log_7 343 = 3$	
2) $\log_4 256 = 4$	
3) $\log_{125} 5 = \frac{1}{3}$	
4) $\log_{36} 6 = 0.5$	
5) $\log_9 1 = 0$	
6) $\log_{57} 57 = 1$	

أ : هيثم حرب
0797771137

أكتب كل معادلة أسية مما يأتي في صورة لوغاريتمية :

7) $2^6 = 64$

8) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

9) $6^3 = 216$

10) $5^{-3} = 0.008$

11) $(51)^1 = 51$

12) $9^0 = 1$

❖ إذا تساوى الأساس تساوي الأس فمثلاً :

$27 = 3^x$

تساوى الأساس

$3^3 = 3^x$

$\boxed{x = 3}$

إيجاد قيمة العبارة اللوغاريتمية

مثال 3

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

1) $\log_2 64$

$\log_2 64 = y$

$2^y = 64$

$2^x = 2^6$

$\boxed{x = 6}$

2) $\log_{13} \sqrt{13}$

$\log_{13} \sqrt{13} = y$

$13^y = 13^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

3) $\log_{36} 6$

أ : هيثم حرب
0797771137

4) $\log_{10} 0.1$

أتذكـر

$$\frac{1}{10} = 10^{-1}$$
$$\frac{1}{100} = 10^{-2}$$
$$\frac{1}{100} = 10^{-3}$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

$a)$ $\log_5 25$

$\log_5 25 = y \longrightarrow 5^y = 25$

$\boxed{y = 2}$

$b)$ $\log_8 \sqrt{8}$

$\log_8 \sqrt{8} = y \longrightarrow 8^y = 8^{\frac{1}{2}}$ $\boxed{y = \frac{1}{2}}$

$c)$ $\log_{81} 9$

$\log_{81} 9 = y \longrightarrow 81^y = 9$

$(9^2)^y = 9^1 \qquad \frac{2}{2}y = \frac{1}{2}$

$d)$ $\log_3 \frac{1}{27}$

$\log_3 \frac{1}{27} = y$

$3^y = \frac{1}{27}$

$3^y = \frac{1}{(3)^3}$

$3 = 3$

$y = -3$

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

13) $\log_3 81$

14) $\log_{25} 5$

15) $\log_2 32$

$\log_2 32 = y$

$\cancel{x}^y = 2^5$

$y = 5$

أ : هيثم حرب
0797771137

16) $\log_{49} 343$

17) $\log_{10} 0.001$

$\log_{10} = 0.001 = y$

$10^y = 10^{-3}$

$y = -3$

18) $\log_{\frac{3}{2}} 1$

$\log_{\frac{3}{2}} 1 = y$

$\left(\frac{3}{2}\right)^y = 1$

$\left(\frac{3}{2}\right)^y = \left(\frac{3}{2}\right)^0$

$y = 0$

19) $\log_{\frac{1}{4}} 4$

$\log \frac{1}{4} 4 = y$

$\left(\frac{1}{4}\right)^y = 4^1$

$y = -1$

20) $(10)^{\log_{10} \frac{1}{8}}$

$10 \log_{10}$

$= \frac{1}{8}$

21) $\log_2 \frac{1}{\sqrt{(2)^7}}$

$\log_2 2^{\frac{-7}{2}} = y$

$2^y = 2^{\frac{-7}{2}}$

$y = \frac{-7}{2}$

22) $\log_a \sqrt[5]{5}$

$\log_a \sqrt[5]{a} = y$

$a^x = a^{\frac{1}{5}}$

$y = \frac{1}{5}$

23) $\log_{10} (1 \times 10^{-9})$

$\log_{10} 10^{-9}$

$= \boxed{-9}$

24) $8 \log_8 13$

$8 \log 8^{13} = 13$

يمكن استنتاج بعض الخصائص الأساسية للوغاريتمات من الأمثلة السابقة :

أ : هيثم حرب
0797771137

❖ مفهوم أساسي

الخصائص الاساسية للوغاريتمات

إذا كان $b > 0 , b \neq 1$ فإن :

- $\log_b 1 = 0$ $\quad b^0 = 1$
- $\log_b b = 1$ $\quad b^1 = 1$
- $\log_b b^x = x$ $\quad b^x = b^x$
- $b^{\log_b x} = x , x > 0$ $\quad \log_b x = \log_b x$

مثال 4

أجد قيمة كل مما يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

1) $\log_3 1$

2) $\log_{17}\sqrt{17}$

3) $\log_5 5$

4) $7^{\log_7 5}$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما ياتي من دون استعمال آلة الحاسبة :

$a)$ $\log_2 1$

$2^y = 1$

$2^y = 2^0 \qquad y = 0$

$b)$ $\log_{32}\sqrt{32}$

$\log_{32}\sqrt{32} = y$

$32^y = 32^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$

$c)$ $\log_9 9$

$d)$ $8^{\log_8 13}$

أ : هيثم حرب
0797771137

تمثيل الاقتران اللوغاريتمي بيانياً

يمكن استعمال العلاقة العكسية بين الاقتران الأسي والاقتران اللوغاريتمي لتمثيل الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته $y = \log_b x$

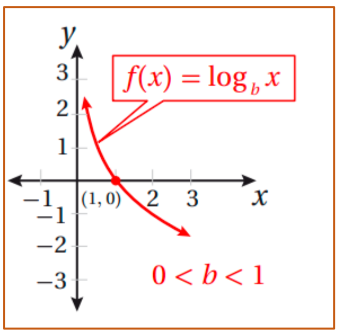
❖ مفهوم أساسي

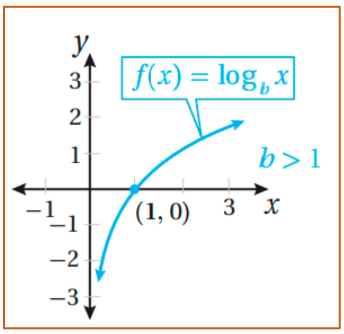
العلاقة بين الصورة الأسية والصورة اللوغاريتمية

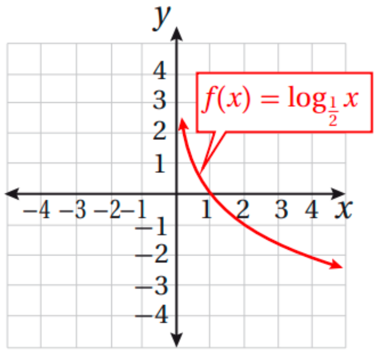
يبين التمثيل البياني المجاور اللوغاريتمي الذي يكون في صورة : $f(x) = log_b\, x$.

حيث : b عدد حقيقي ، $b \neq 1, b > 0$ ، وتتمثل خصائصه في ما يأتي :

- مجال الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة R^+ ؛ أي الفترة $(0, \infty)$.
- مدى الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R .
- الاقتران متزايد اذا كان $b > 1$.
- الاقتران متناقص اذا كان $0 < b < 1$.
- وجود خط تقارب رأسي للاقتران هو المحور y .
- الاقتران يقطع المحور x في نقطة واحدة هي $(1, 0)$ ، ولا يقطع محور y .







أتعلم

يمكن أيضا انشاء جدول القيم باختيار قيم للمتغير x تتناسب مع الأساس b في الاقتران اللوغاريتمي الذي صورته :
$f(x) = \log_2 x$
ويسهل عن طريقها استعمال الخصائص الأساسية للوغاريتمات

مثال 5

أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثي وخط التقارب الرأسي مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايداً :

1) $f(x) = \log_2 x$

أ : هيثم حرب
0797771137

إذا كان

$2)\ f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

1. مثل منحنى الاقتران
2. حدد المجال والمدى وخط التقارب الرأسي
3. هل هو متزايد أو متناقص
4. أوجد مقطعيه من المحورين

أتحقق من فهمي

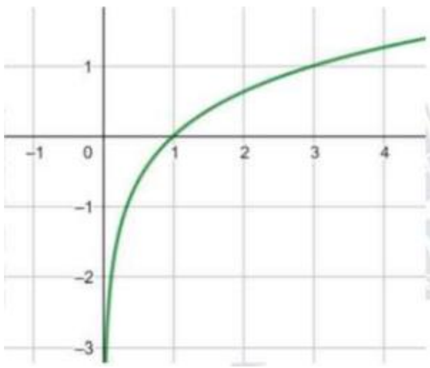
أمثل كل اقتران مما ياتي بيانياً ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايداً

$a)\ f(x) = \log_3 x$

من الصعب رسم الاقتران اللوغاريتم لذلك يحول الى لوغاريتم الى قاعدة الأس من خلال الاقتران العكسي

$f'(x) = 3^y = x$

$x = 3^y$



x	$\frac{1}{3}$	1	3
y	-5	0	1

المجال $(0,\infty)$ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة

المدى R مجموعة الاعداد الحقيقية

نقطة التقاطع $(1,0)$

محور التقارب الرأسي $(x=0)$ محور y

الاقتران متزايد $b>1$

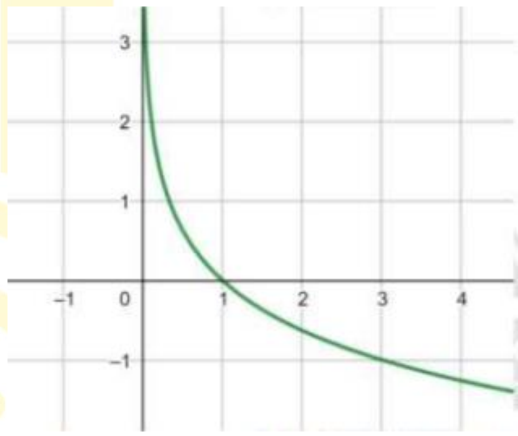
النقطة x هو x ولا يوجد مقطع y

$b)\ f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{y} = x$

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{y}$

x	3	1	$\frac{1}{3}$
y	-1	0	1



المجال $(0, \infty)$ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة

المدى R مجموعة الاعداد الحقيقية

نقطة التقاطع $(1, 0)$

محور التقارب الرأسي $(x = 0)$ محور y

الاقتران متناقص $0 < b < 1$

أتدرب وأحل المسائل

$25)\ f(x) = \log_5 x$

1. ارسم منحنى الاقتران
2. حدد المجال والمدى وخط التقارب الرأسي

أ : هيثم حرب
0797771137

إذا كان

$$26)\ f(x) = \log_4 x$$

1. حدد المجال والمدى وخط التقارب الرأسي
2. ارسم منحنى الاقتران

إذا كان

$$27)\ h(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$$

1. هل الاقتران متزايد أم متناقص
2. أوجد مقطعي محوري الاحداثيين

فكر :

إذ كان $-\log_x x$ هل الاقتران متزايد أم متناقص

لقد اختزل ابتكار اللوغاريتمات الحسابات التي كانت تحتاج سابقاً لبضعة أشهر إلى بضعة ايام

28) $f(x) = \log_{\frac{1}{8}} x$

$f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{r} = x$

x	8	1	$\frac{1}{8}$
y	-1	0	1

المجال $(0, \infty)$ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة

المدى R مجموعة الاعداد الحقيقية

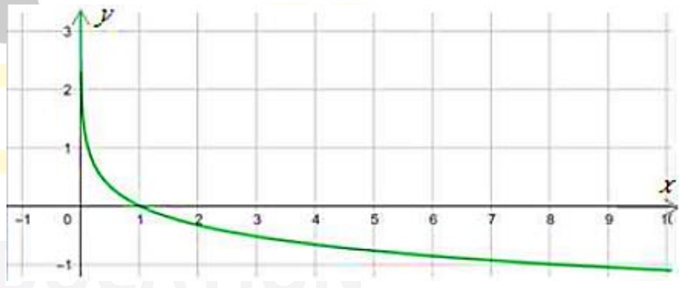
متناقص $1 > b > 0$

نقطة التقاطع $(1, 0)$

خط التقارب الرأسي $(x = 0)$ محور y

المقطع x هو 1

المقطع y لا يوجد



29) $f(x) = \log_{10} x$

$f^{-1}(x) = 10^{y} = x$

x	$\frac{1}{10}$	1	10
y	-1	0	1

المجال $(0, \infty)$ مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة

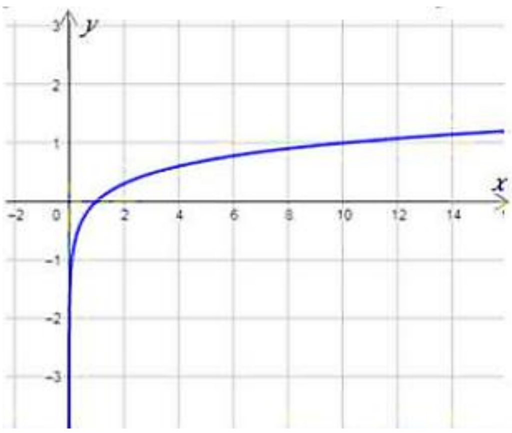
المدى R مجموعة الاعداد الحقيقية

متزايد $b > 1$

نقطة التقاطع $(1, 0)$

خط التقارب الرأسي $(x = 0)$ محور y

المقطع x هو 1 ولا يوجد مقطع y



أ : هيثم حرب
0797771137

واجب :

مثل كل اقتران بيانياً ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايد.

1) $f(x) = \log_6 x$

مجال الاقتران اللوغاريتمي في صورة
$f(x) = \log_b g(x)$

مثال 6

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما ياتي :

1) $f(x) = \log_4(x+3)$

2) $f(x) = \log_5(8-2x)$

أ : هيثم حرب
0797771137

أتحقق من فهمي

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي :

$a)\ f(x) = \log_7(5 - x)$

$5 - x > 0$

$-x > 5$ خط التقارب

$5 < x$ $(-\infty, 5)$ المجال

نقلب إشارة المتباينة

$b)\ f(x) = \log_5(9 + 3x)$

$9 + 3x > 0$	$9 + 3x = 0$
$\frac{3}{3} x > \frac{-9}{3}$	$\frac{9}{-3} = \frac{-3x}{-3}$
$x > -3$	$-3 = x$
المجال $(-3, \infty)$	خط التقارب

أتدرب وأحل المسائل

أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي :

$31)\ f(x) = \log_3(x - 2)$

$x - 2 > 0$

$x > 2$

المجال $(2 , \infty)$

$32)\ f(x) = 5 - 2\log_7 (x + 1)$

$x + 1 > 0$

$x > -1$

المجال $(-1, \infty)$

$33)\ f(x) = -3 \log_4(-x)$

$-x > 0$

$x < 0$

المجال $(-\infty, 0)$

34) أجد قيمة a التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_a x$ يمر بالنقطة $(32 , 5)$

$a^y = x$

$(32 , 5) \longrightarrow a^5 = 2^5$

$\boxed{a = 2}$

35) أجد قيمة c التي تجعل منحنى الاقتران $f(x) = \log_c x$ يمر بالنقطة $\left(\frac{1}{4} , -4\right)$.

$c^y = x$

$\left(\frac{1}{4} , -4\right)$ $c^{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow c^{-4} = 4^{-1}$

$c^{-4} = (\sqrt{4})^{-4}$ $c = \sqrt{2}$

أ : هيثم حرب
0797771137

إعلانات: يمثل الاقتران

$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد حيث a المبلغ (بمئات الدنانير) الذي تنفقه الشركة على اعلانات المنتج وتعني القيمة $P(1) \approx 19$ أن إنفاق JD100 على الاعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD 19000 من بيع المنتج.

36) أجد $P(124)$, $P(24)$, $P(4)$

37) أفسر معنى القيم التي أوجدتها في الفرع السابق

$P(a) = 10 + 20\log_5(a+1)$

إذا انفقت الشركة 400 دينار فإن الايرادات 30000

$P(4) = 10 + 20\log_5 5$

$10 + 20(1) = 30$

إذا انفقت الشركة 2400 دينار فإن الايرادات 50000

$P(24) = 10 + 20\log_2 25$

$10 + 20(2) = 50$

إذا انفقت الشركة 124000 فإن الايرادات 70000 ألف

$P(124) = 10 + 20\log_2 125$

$10 + 20(3) = \boxed{70}$

مهارت التفكير العليا

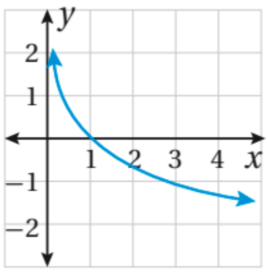
تبرير : اكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز تمثيله البياني المناسب مبرراً إجابتي :

38) $f(x) = \log_3(x)$

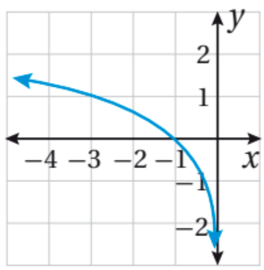
39) $f(x) = \log_3(-x)$

40) $g(x) = -\log_3 x$

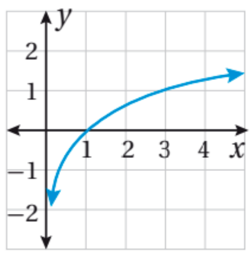
a)



b)



c)



أ : هيثم حرب
0797771137

تحدَّ : أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي محدداً خط (خطوط) تقاربه الرأسي :

$41)\ f(x) = \log_3 (x^2)$

$x^2 > 0$

خط التقارب $(x = 0)$ المحور (y)

$R - \{0\}$

$42)\ f(x) = \log_3 (x^2 - x - 2)$

$x^2 - x - 2 > 0$

$(x-2)\,(x+1)$

− − −   + + + +
-1

− − − − −   + + +
2

+ + +   − − −   + + +
-1 4

خط التقارب $x = 2$ $x = -1$

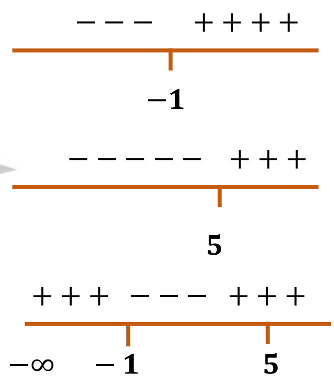
المجال $(-\infty, -1)$ $(2, \infty)$

أ : هيثم حرب
0797771137

$$43)\ f(x) = \log_3\left(\frac{x+1}{x-5}\right)$$

$x - 5 = 0$

$x = 5$ خط التقارب



المجال $(-\infty, -1) \quad (5, \infty)$

---

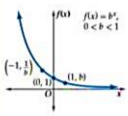
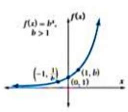
44) أكتشف الخطأ كتبت منى المعادلة الأسية $4^{-3} = \frac{1}{64}$ في صورة لوغاريتمية كما يأتي :

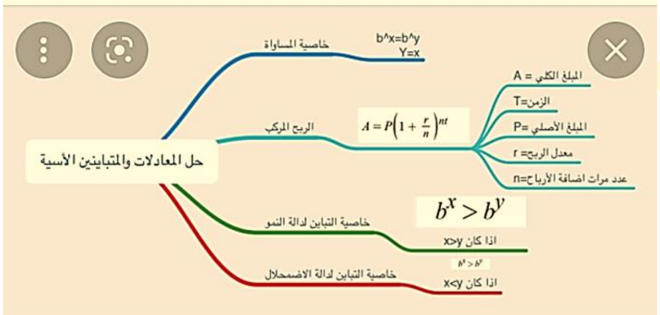
أكتشف الخطأ الذي وقت فيه منى ، ثم أصححه

$\log_4\ (-3) = \frac{1}{64}$ ✗

$\log \frac{1}{64} = -3$ ✓

الدالة تعني الاقتران

دالة الإضمحلال الأسي	دالة النمو الأسي	وجه المقارنة
$f(x) = b^x, 0 < b < 1$	$f(x) = b^x, b > 1$	صيغتها
منحنى رائي معكوس  x: 1, 0, -1 y: 1/b, 1, b	منحنى رائي  x: 1, 0, -1 y: b, 1, 1/b	تمثيلها
R	R	مجالها
R^+	R^+	مداها
لا يوجد لأنه خط تقارب	لا يوجد لأنه خط تقارب	مقطعها مع x
$(0,1)$ أو $y = 1$	$(0,1)$ أو $y = 1$	مقطعها مع y
متصلة على مجالها	متصلة على مجالها	الإتصال
متناقصه على مجالها	متزايدة على مجالها	التزايد والتناقص
المحور x	المحور x	خط تقاربها
نعم وبالتالي لها دالة عكسية وذلك من اختبار الخط الأفقي	نعم وبالتالي لها دالة عكسية وذلك من اختبار الخط الأفقي	متباينة



امتحان على الدرس الثالث

Q 1 : أكتب كل معادلة لوغاريتمية مما ياتي في صورة أسية :

$1)\ \log_3 729 = 6 \ \Rightarrow 3^6 = 729$

$2)\ \log_5 625 = 4 \ \Rightarrow$

$3)\ \log_{64} 4 = \frac{1}{3} \ \Rightarrow$

$4)\ \log_{64} 8 = 0.5 \ \Rightarrow$

$5)\ \log_7 1 = 0 \ \Rightarrow$

$6)\ \log_{43} 43 = 1 \Rightarrow$

Q 2 : أكتب كل معادلة أسية في صورة لوغاريتمية :

$7)\ 4^5 = 1024 \ \Rightarrow \log_4 1024 = 5$

$8)\ 3^{-4} = \frac{1}{81} \ \Rightarrow$

$9)\ 7^3 = 343 \ \Rightarrow$

$10)\ 5^{-2} = 0.04 \ \Rightarrow$

$11)\ (32)^{-1} = 32 \ \Rightarrow$

$12)\ 8^0 = 1 \Rightarrow$

Q 3 : أكتب قيمة كل مما ياتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

$13)\ \log_2 64$

$\log_2 64 = y \ \Rightarrow 2^y = 64 \ \Rightarrow y = 6$

$2^y = 2^0$

$14)\ \log_{81} 9$

$15)\ \log_2 32$

$16)\ \log_{25} 125$

$17)\ \log_{10} 0.0001$

$18)\ \log_{\frac{5}{3}} 1$

أ : هيثم حرب
0797771137

Q 4 : أجد قيمة كل مما ياتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

19) $\log_{\frac{1}{6}} 6 \longrightarrow$

20) $(10)^{\log_{10}\frac{1}{9}} \longrightarrow$

21) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{(3)^6}} \longrightarrow$

22) $\log_b \sqrt[7]{b} \longrightarrow$

23) $\log_{10}\left(1\times 10^{-5}\right) \longrightarrow$

24) $4^{\log_4 3} \longrightarrow$

Q 5 : أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً ثم أحدد مجاله ومداه ومقطعيه من المحورين الإحداثيين وخطوط تقاربه مبيناً إذا كان متناقصاً أم متزايداً.

25) $f(x) = \log_8 x$

26) $g(x) = \log_{\frac{1}{10}} x$

27) $h(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

أ : هيثم حرب
0797771137

$28)\ r(x) = \log_{\frac{1}{9}} x$

$29)\ f(x) = \log_9 x$

$30)\ g(x) = \log_{11} x$

Q 5 : أجد مجال كل اقتران لوغاريتمي مما يأتي :

$31)\ f(x) = \log_2(x+3)$

$32)\ f(x) = 7 + 2\log_5(x-2)$

$33)\ f(x) = -5\log_7(-x)$

Q 6 : ضوء : تمثل المعادلة $\log_{10}\left(\frac{1}{12}\right) = -0.0125\, x$ العلاقة بين شدة الضوء I بوحدة lumen والعمق x بالأمتار في إحدى البحيرات كم تبلغ شدة الضوء عن عمق 10 m ؟

لا تستسلم أبدًا

أ : هيثم حرب
0797771137

الدرس الرابع/ قوانين اللوغاريتمات

فكرة الدرس :

تعرف قوانين اللوغاريتمات

مسألة اليوم :

يمثل الاقتران $L = 10\log_{10} R$ شدة الصوت بالديسيبل ، حيث R شدة الصوت النسبية بالواط لكل متر أجد شدة صوت الديسيبل إذا كانت شدته $100 \times 10^6 \mathrm{W/m^2}$

$L = 10\log_{10} R$

$L = 10\log_{10}(100 \times 10^6)$

$10\log_{10} 10^8 \Rightarrow 10 \times 8 = \boxed{80}$ ديسيبل

قوانين اللوغاريتمات

تعلمت سابقاً قوانين الأسس ، ووظيفتها في تبسيط مقادير أسية ،وإيجاد قيمة مقادير عددية ومن ذلك : قوانين الضرب ، والقسمة ، وقوة القوة.

قانون ضرب القوى

$b^x \times b^y = b^{x+y}$

قانون قسمة القوى

$\frac{b^x}{b^y} = b^{x+y}, b \neq 0$

قانون قوة القوة

$(b^x)^y = b^{xy}$

بما انه لا توجد علاقة عكسية بين اللوغاريتمات والأسس ، فإنه يمكن اشتقاق قوانين لوغاريتمات مقابلة لهذه القوانين.

❖ مفهوم أساسي

إذا كان b, x, y أعداداً حقيقية موجبة ، وكان p عدداً حقيقياً ، حيث $b \neq 1$ فإن :

- قانون الضرب

$\log_b xy = \log_b y + \log_b y$

- قانون القسمة

$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

- قانون القوة

$\log_b x^p = p\log_b x$

يمكن استعمال قوانين اللوغاريتمات لإيجاد قيم مقادير لوغاريتمية.

مثال 1

إذا كان $\log_a 5 \approx 2.32$ وكان $\log_a 3 \approx 1.59$ فأجد كلاً مما يأتي:

1) $\log_a 15$

$\log_a 15 = \log_a(3 \times 5) \quad 3 \times 3 = 15$

$= \log_a 3 + \log_a 5$ قانون الضرب في للوغاريتمات

$\approx 1.59 + 2.32$

بتعويض $\log_a 3 = 1.59, \log_a \approx 2.32$ بالجمع

≈ 3.91

أتحقق من فهمي

إذا كان $\log_a 7 \approx 1.21$ وكان $\log_a 2 \approx 0.43$
فأجد كلاً مما يأتي :

$a)\ \log_b 14$

$\log_b (2 \times 7)$
$\log_b 2 + \log_7$
$0.43 + 1.21 = 1.64$

$b)\ \log_b \frac{2}{7}$

$\log_b 2 - \log_b 7$
$0.43 - 1.21 = -0.78$

$c)\ \log_b 32$

$\log_b 2^5$
$5 \log_b 2 \implies 5(0.43) = 2.15$

$d)\ \log_b \frac{1}{49}$

$\log_b 1 - \log_b 49$
$0 - \log 7^2 \implies 0 - 2\log_b 7$
$0 - 2(1.21) = -2.42$

أفكر
هل يمكن استعمال قانون القسمة لإيجاد ناتج
$\frac{\log_a 5}{\log_a 3}$

أفكر
هل يمكن إيجاد $\log_a 8$ عن طريق معطيات المثال باستعمال قوانين اللوغاريتمات ؟ أبرر إجابتي

$2)\ \log_a \frac{3}{5}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$\log_a \frac{3}{5} = \log_a 3 - \log_a 5$

بتعويض $\log_a 5 \approx 2.32$, $\log_a 3 \approx 1.59$

$\approx 1.59 - 2.32$

بالطرح

≈ -0.73

$3)\ \log_a 125$

$\log_a 125 = \log_a (5^3)$ $\qquad 125 = 5^3$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$= 3\log_a 5$

بتعويض $\log_a 5 \approx 2.32$

$\approx 3\,(2.32)$

بالضرب

≈ 6.96

$4)\ \log_a \frac{1}{9}$

أ : هيثم حرب
0797771137

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المطولة

يمكن أحياناً كتابة مقدار لوغاريتمي بصورة مطولة تحوي مقادير لوغاريتمية عديدة ، وذلك باستعمال قوانين اللوغاريتمات.

مثال 2

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة ، علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة.

1) $\log_5 x^7 y^2$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$$\log_5 x^7 y^2 = \log_5 x^7 + \log_5 y^2$$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$$= 7\log_5 x + 2\log_5 y$$

---

2) $\log_7 \dfrac{(5x+3)^2}{4}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$\log_7 \frac{(5x+3)^2}{4} = \log_7 (5x+3)^2 - \log_7 4$$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$$= 2\log_7 (5x+3) - \log_7 4$$

---

3) $\log_4 \dfrac{xy^3}{z^3}$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$\log_4 \frac{xy^3}{z^2} = \log_4 xy^3 - \log_4 z^2$$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$$= \log_4 x + 3\log_4 y^3 - \log_4 z^2$$

$$= \log_4 x + 3\log_4 y - 2\log_4 z$$

4) $\log_a \sqrt{\dfrac{x^2y^3}{a^5}}$

صورة الأس النسبي

$$\log_a \sqrt{\frac{x^2y^3}{a^5}} = \log_a \left(\frac{x^2y^5}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$$= \frac{1}{2}\log_a \left(\frac{x^2y^3}{a^5}\right)$$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \frac{1}{2}\left(\log_a x^2 y^3 - \log_a a^5\right)$$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$$= \frac{1}{2}\left(\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a a^5\right)$$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$$= \frac{1}{2}\left(2\log_a x + 3\log_a y - 5\log_a a\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\log_a x + 3\log_a y - 5\right) \quad \log_a a = 1$$

خاصية التوزيع

$$= \log_a x + \frac{3}{2}\log_a y - \frac{5}{2}$$

أتحقق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما ياتي بالصورة المطولة ، علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداد حقيقة موجبة:

1) $\log_2 a^2 b^9$

$$\log_2 a^2 + \log_2 b^9$$

$$2\log_2 a + 9\log_2 b$$

$b)\ \log_5 \dfrac{(x+1)^3}{8}$

$\log_5 (x+1)^3 - \log_5 8$

$3\log_5 (x+1) - \log_5 8$

$c)\ \log_3 \dfrac{x^7 y^3}{z^5}$

$\log_3 x^7 y^3 - \log_3 z^5$

$\log_3 x^7 + \log_3 y^3 - \log_3 z^5$

$7\log_3 x + 3\log_3 y - 5\log_3 z$

$d)\ \log_x \sqrt[3]{\dfrac{x^7\, b^2}{y^5}}$

كتابة اللوغاريتمات بالصورة المختصرة

تعلمت في المثال السابق كتابة مقدار لوغاريتمي بالصورة المطولة ، لكنني أحتاج أحياناً إلى تحويل المقدار اللوغاريتمي من الصورة المطولة إلى الصوة المختصرة ، أي كتابة المقدار في صور لوغاريتم واحد.

مثال 3

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما ياتي بالصورة المختصرة ، علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة:

$1)\ 3\log_2 x + 4\log_2 y$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$3\log_2 x + 4\log_2 y = \log_2 x^3 + \log_2 y^4$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_2 x^3 y^4$

$2)\ 5\log_a x + \dfrac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

قانون القوة في اللوغاريتمات

$5\log_a x + \dfrac{1}{3}\log_a y - 7\log_a z$

$= \log_a x^5 + \log_a y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= \log_a x^5\, y^{\frac{1}{3}} - \log_a z^7$

قانون القسمة في اللوغاريتمات

$= \log_a \left(\dfrac{x^5\, y^{\frac{1}{3}}}{z^7}\right)$

الصورة الجذرية

$= \log_a \left(\dfrac{x^5\, \sqrt[3]{y}}{z^7}\right)$

أ : هيثم حرب
0797771137

أتحقق من فهمي

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة ، علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة:

$a)\ \log_5 a + 3\log_5 b$

$\log_5 a + \log_5 b^3$

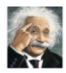
$\log_5 ab^3$

$b)\ 5\log_b x + \frac{1}{2}\log_b y - 9\log_b z$

$\log_b x^5 + \log_b y^{\frac{1}{2}} - \log_b z^9$

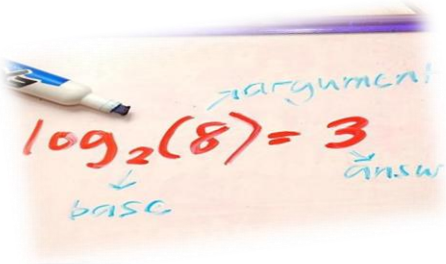
$\log_b \frac{x^5\, y^{\frac{1}{2}}}{z9} \Longrightarrow \log \frac{x^5\sqrt{y}}{z9}$

يستفاد من الاقترانات اللوغاريتمية وقوانينها في كثير من التطبيقات الحياتية مثل تحديد مدى تأثير المدة الزمنية المستغرقة في درجة تذكر الطلبة للمعلومات.



معلومة

فهم المعلومات وتنظيمها أولاً يسـهلان عملية تذكرها واستعادتها في ما بعد



مثال 4

نسيان : في تجربة لتحديد مدى تأثير المدة الزمنية في درجة تذكر الطلبة للمعلومات تقدمت مجموعة من الطلبة لاختبار في مادة معينة ، ثم لاختبارات مكافئة لهذا الاختبار على مدار مدد شهرية بعد ذلك ، فوجد فريق البحث أن النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها أحد الطلبة بعد t شهراً من إنهائه دراسة المادة تعطى بالاقتران $M(t) = 85 - 25\log_{10}(t+1)$

أجد النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها هذا الطالب بعد 19 شهراً من إنهائه دراستها ، علماً بأن $\log_{10}2 \approx 0.3010$ مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

المعادلة المعطاة

$M(t) = 85 - 25\log_{10}(t-1)$

بتعويض $t = 19$

$M(19) = 85 - 25\log_{10}(19+1)$

بالتبسيط

$= 80 - 25\log_{10}(20)$

$= 85 - 25\log_{10}(10\times 2) \qquad 10\times 2 = 20$

قانون الضرب في اللوغاريتمات

$= 85 - 25(\log_{10}10 + \log_{10}2)$

بتعويض $\log_{10}2 \approx 0.3010 , \log_b b = 1$

$\approx 85 - 25((1) + 0.3010)$

$\approx 85 - 25(1.2010)$ بالتبسيط

≈ 52 بالتبسيط

إذن ، النسبة المئوية للمادة التي يتذكرها الطالب بعد 19 شهراً من إنهائه دراستها هي 52%

أتحقق من فهمي

يمثل الاقتران :

$M(t) = 92 - 28\log_{10}(t+1)$ النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها طالب من مادة معينة بعد t شهراً من إنهاشه دراستها ، أجد النسبة المئوية للموضوعات التي يتذكرها هذا الطالب بعد 29 شهراً من إنهائة دراسة المادة ، علما بأن

$\log_{10}3 \approx 0.4771$ مقرباً إجابتي إلى أقرب عدد صحيح.

$M(29) = 92 - 28\log_{10}(29+1)$

$92 - 28\log_{10}(30)$

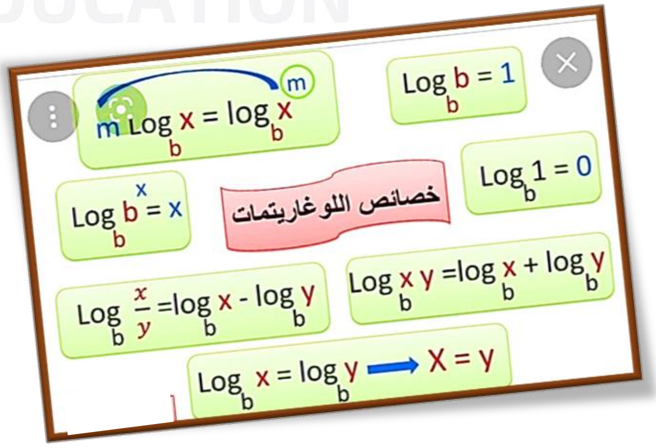
$92 - 28\log_{10}(3 \times 10)$

$92 - (28\log_{10}3 + \log_{10}10)$

$42 - 28((0.4771) + 1)$

$42 - 28(1.41771)$

$92 - 41.3588 = 51$



أتدرب وأحل المسائل

إذا كان $\log_a 6 \approx 0.778$ وكان $\log_a 5 \approx 0.699$ ، فأجد كلاً مما يأتي :

1) $\log_a \frac{5}{6}$

$\log_a \frac{5}{6} = \log_a 5 - \log_a 6$

$\approx 0.699 - 0.778$

≈ -0.079

---

2) $\log_a 30$

$\log_a 30 = \log_a(5 \times 6)$

$= \log_a 5 + \log_a 6$

$\approx 0.699 + 0.778$

≈ 1.477

---

3) $\frac{\log_a 5}{\log_a 6}$

$\frac{\log_a 5}{\log_a 6} = \frac{0.699}{0.778} = \frac{699}{778} \approx 0.90$

---

4) $\log_a \frac{1}{6}$

$\log_a \frac{1}{6} = \log_a 1 - \log_a 6$

$\approx 0 - 0.778$

≈ 0.778

5) $\log_a 900$

$$\log_a 900 = \log_a 30^2$$
$$= 2\log_a 30$$
$$= 2\log_a(5\times 6)$$
$$= 2(\log_a 5 + \log_a 6)$$
$$\approx 2(0.699 + 0.778)$$
$$\approx 2\times 1.477$$
$$\approx 2.954$$

6) $\log_a \frac{18}{15}$

$$\log_a \frac{18}{15} = \log_a \frac{6}{5}$$
$$= \log_a 6 - \log_a 5$$
$$\approx 0.778 - 0.699$$
$$\approx 0.079$$

7) $\log_a (6a^2)$

$$\log_a (6a^2) = \log_a 6 + \log_a a^2$$
$$= \log_a 6 + 2\log_a a$$
$$\approx 0.778 + 2$$
$$\approx 0.778$$

8) $\log_a \sqrt[4]{25}$

$$\log_a \sqrt[4]{25} = \log_a \sqrt[4]{5^2}$$
$$= \log_a 5^{\frac{2}{4}}$$
$$= \log_a 5^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log_a 5$$
$$\approx \frac{1}{2}\times 0.699$$
$$\approx 0.350$$

9) $(\log_a 5)(\log_a 6)$

$$(\log_a 5)(\log_a 6) \approx 0.699 \times 0.778$$
$$\approx 0.544$$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة ، علماً بان المتغيرات جميعها تمثل أعداداً حقيقية موجبة :

10) $\log_a x^2$

$$\log_a x^2 = 2\log_a x$$

11) $\log_a \left(\frac{a}{bc}\right)$

$$\log_a \left(\frac{a}{bc}\right) = \log_a a - \log_a bc$$
$$= \log_a a\,(\log_a b + \log_a c)$$
$$= \log_a a - \log_a b - \log_a c$$
$$= 1 - \log_a b - \log_a$$

12) $\log_a(\sqrt{x}\,\sqrt{y})$

$$\log_a(\sqrt{x}\,\sqrt{y}) = \log_a \sqrt{x} + \log_a \sqrt{y}$$
$$= \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$$

13) $\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)$

$$\log_a \left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right) = \log_a \sqrt{z} - \log_a y$$
$$= \log_a z^{\frac{1}{2}} - \log_a y$$
$$= \frac{1}{2}\log_a z - \log_a y$$

أ : هيثم حرب
0797771137

14) $\log_a \frac{1}{x^2\,y^2}$

$\log_a \frac{1}{x^2\,y^2} = \log_a 1 - \log_a x^2y^2$

$= \log_a 1\ (\log_a x^2 + \log_a y^2)$

$= 0 - (2\log_a x + 2\log_a y)$

$= -2\log_a x - 2\log_a y$

15) $\log_a \sqrt[5]{32x^5}$

$\log_a \sqrt[5]{32x^5} = \log_a (\sqrt[3]{32} \times \sqrt[2]{x^5}$

$= \log_a 2x$

$= \log_a 2 + \log_a x$

16) $\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3}$

$\log_a \frac{(x^2y^3)^2}{(x^2y^3)^3} = \log_a \frac{1}{x^2y^3}$

$= \log_a 1 - \log_a x^2\,y^3$

$= \log_a 1 - (\log_a x^2 + \log_a y^3)$

$= 0 - (2\log_a x + 3\log_a y\,)$

$= -2\log_a x - 3\log_a y$

17) $\log_a (x+y-z)^7, x+y > z$

$\log_a (x+y-z)^7 = 7\log_a\,(x+y-z)$

18) $\log_a \sqrt{\frac{x^{12}\,y}{y^3\,z^4}}$

$\log_a \sqrt{\frac{x^{12}\,y}{y^3\,z^4}} = \log_a\ \log_a \sqrt{\frac{x^{12}}{y^3\,z^4}}$

$= \log_a \frac{\sqrt{x^{12}}}{\sqrt{y^2}\,\sqrt{z^4}}$

$= \log_a \frac{x^{\frac{12}{2}}}{y^{\frac{2}{2}}\,z^{\frac{4}{2}}}$

$= \log_a \frac{x^6}{yz^2}$

$= \log_a x^6 - \log_a yz^2$

$= 6\log_a x - (\log_a y + \log_a z^2)$

$= 6\log_a x - (\,\log_a y + 2\log_a z)$

$= 6\log_a x - \log_a y - 2\log_a z$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة ، علماً بأن المتغيرات جميعها تمثل اعداداً حقيقيه موجبة :

19) $\log_a x + \log_a y$

$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

20) $\log_b(x+y) - \log_b(x-y)\ , x > y$

$\log_b(x+y) - \log_b(x-y) = \log_b \frac{x+y}{x-y}$

$21)\ \log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x}$

$\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} - \log_a \sqrt{x} = \log_a \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

$= \log_a \frac{1}{x}$

$22)\ \log_a (x^2-4) - \log_a (x+2), x > 2$

$\log_a (x^2-4) - \log_a (x+2) = \log_a \frac{(x^2-4)}{(x+2)}$

$= \log_a \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$

$= \log_a (x-2)$

$23)\ \log_b x - 3\log_b y + \log_b z$

$\log_b x - 3\log_b y + \log_b z = \log_b x^2 - \log_b y^3 + \log_b z^{\frac{1}{3}}$

$= \log_b \frac{x^2}{y^3} + \log_b z^{\frac{1}{3}}$

$= \log_b \frac{x^2\ z^{\frac{1}{3}}}{y^3}$

$= \log_b \frac{x^2\ \sqrt[3]{z}}{y^3}$

$24)\ \log_b 1 + 2\log_b b$

$\log_b 1 + 2\log_b b = \log_b b^2 = 2$

26) نمو : يمثل الاقتران

النسبة $f(x) = 29 + 48.8\log_6(x+2)$ المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات من طوله عند البلوغ ، علماً بأن

$\log_6 2 \approx 0.3869$

$f(x) = 29 + 48.8\ \log_6 (x+2)$

$f(10) = 29 + 48.8\log_6(10+2)$

$= 29 + 48.8\log_6 12$

$= 29 + 48.8\log_6\ (6 \times 2)$

$= 29 + 48.8\ (\log_6 6 + \log_6 2)$

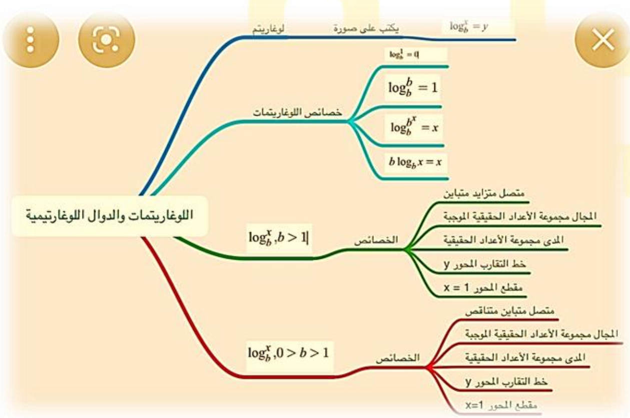
$\approx 29 + 48.8\ (1 + 0.3869)$

$\approx 29 + 48.8\ (1.3869)$

$\approx 29 + 67.8072$

≈ 97

النسبة المئوية لطول طفل عمره 10 سنوات نت طوله عند البلوغ هي 97% تقريباً



أ : هيثم حرب
0797771137

مهارات التفكير العليا

26) تحد : اثبت أن

$$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\log_a 216}{\log_a 36} = \frac{\log_a 6^3}{\log_a 6^2}$$

$$= \frac{3\log_a 6}{2\log_a 6}$$

$$= \frac{3}{2}$$

27) أكتشف الخطا : أكتشف الخطأ في الحل الآتي ثم أصححه .

$$\log_2 5x = (\log_2 5)(\log_2 x)$$

$$\log_2 5x = \log_2 5 + \log_2 x$$

28) تبرير أثبت

$$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b) - \log_b(b^2-9) = 1$$

حيث $b > 3$ مبرراً إجابتي.

$$\log_b(b-3) + \log_b(b^2+3b)\log_b(b^2-9)$$

$$= \log_b (b-3)(b^2+3b) - \log_b(b^2-9)$$

$$= \log_b \frac{(b-3)(b^2+3b)}{(b^2-9)}$$

$$= \log_b \frac{(b-3)\times b\,(b+3)}{(b-3)(b+3)}$$

$$= \log_b b$$

$$= 1$$

أ : هيثم حرب
0797771137

كتاب التمارين

-اذا كان : $\log_a 7 \approx 0.936$ ، وكان : $\log_a 3 \approx 0.528$ ، فأجد كلا مما يأتي :

1) $\log_a \frac{3}{7}$

$= \log_a 3 - \log_a 7$

$= 0.528 - 0.936 = \boxed{-0.408}$

2) $\log_a 21$

$= \log_a (3 \times 7)$

$= \log_a 3 + \log_a 7$

$= 0.528 + 0.936$

$= \boxed{1.464}$

3) $\dfrac{\log_a 3}{\log_a 7}$

$= \dfrac{0.528}{0.936}$

$= \boxed{0.56} \approx 0.56$

$= 0.5641$

4) $\log_a \frac{1}{7}$

$= \log_a 1 - \log_a 7$

$= 0 - 0.936 = \boxed{-0.936}$

5) $\log_a 441$

$= \log_a (3^2 \times 7^2)$

$= \log_a 3^2 + \log_a 7^2$

$= 2\log_a 3 + 2\log_a 7$

$= 2(0.528) + 2(0.936)$

$= 1.056 + 1.872$

$= \boxed{2.928}$

6) $\log_a \frac{49}{27}$

$= \log_a \left(\frac{7^2}{3^3}\right) = 2\log_a 7 - 3\log_a 3$

$= 2(0.936) - 3(0.528)$

$= 1.872 - 1.584 = \boxed{0.288}$

7) $\log_a(7a^2)$

$= \log_a 7 + 2\log_a a$

$= 0.936 + 2(1)$

$= \boxed{2.936}$

8) $\log_a \sqrt[4]{81}$

$= \log_a (3^4)^{\frac{1}{4}} = \log_a 3$

$= \boxed{0.528}$

9) $(\log_a 3)(\log_a 7)$

$= (0.528)(0.936)$

$= \boxed{0.494}$

- أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المطولة ، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة :

10) $\log_a x^7$

$= 7\log_a x$

11) $\log_a\left(\frac{ac}{b}\right)$

$= \log_a a + \log_a c - \log_a b$

12) $\log_a(\sqrt{x})$

$= \log_a x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a x$

13) $\log_a\left(\frac{\sqrt{xy}}{z}\right)$

$= \log_a (xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z$

$= \frac{1}{2}(\log_a x + \log_a y) - \log_a z$

$= \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z$

14) $\log_a \frac{1}{x^3\, y^4}$

$= \log_a 1 - [3\log_a x + 4\log_a y]$

$= 0 - 3\log_a x - 4\log_a y$

$= -3\log_a x - 4\log_a y$

15) $\log_a \sqrt[7]{128x^7}$

$= \log_a (128x^7)^{\frac{1}{7}}$

$= \log_a (2x)^{7\left(\frac{1}{7}\right)}$

$= \log_a (2x)$

$= \log_a 2 + \log_a x$

$16)\ \log_a \frac{(x^{-1}\,y^2)}{(x^5\,y^{-2})^\wedge 3}$

"سهل استخدم قوانين الأسس"

$= \frac{4\log_a(x^{-1}\,y^2)}{3\log_a(x^5\,y^{-2})}$

$= \frac{4[\log_a x^{-1} + \log_a y^2]}{3[\log_a x^5 + \log_a y^{-2}]}$

$= \frac{4[-\log_a x + 2\log_a y]}{3[5\log_a x - 2\log_a y]}$

$= 4[-\log_a x + 2\log_a y] - 3[5\log_a x - 2\log_a y]$

$= 14\log_a y - 19\log_a x$ #

طريقة أخرى :

$= \log_a\left(\frac{x^{-4}\,y^8}{x^{15}\,y^{-6}}\right) = \log_a\left(x^{-4-5}\,y^{8--6}\right)$

$= \log_a x^{-19} + \log_a y^{14}$

$= 14\log_a y - 19\log_a x$

$17)\ \log_a \sqrt{\frac{x^2\,y^3}{z^3}}$

$= \log_a\left(\frac{x^2\,y^3}{z^3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}[\log_a x^2 + \log_a y^3 - \log_a z^3]$

$= \frac{1}{2}[2\log_a x + 3\log_a y - 3\log_a z]$

$18)\ \log_a(x-y+z)^9\ ,y-x<z$

سؤال خدعة :

$= 9\log_a(x-y+z)$

- أكتب كل مقدار لوغاريتمي مما يأتي بالصورة المختصرة ، علما بأن المتغيرات جميعها تمثل أعدادا حقيقية موجبة :

$19)\ \log_a x - \log_a y$

$= \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

$20)\ \log_b(b-1) + 2\log_b b\ \ ,b>1$

$= \log_b(b-1) + \log_b b^2$

$= \log_b(b-1)(b^2)$

$21)\ \log_a\sqrt{x} - \log_a\frac{1}{\sqrt{x}}$

$= \log_a\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \log_a\sqrt{x}\times\frac{\sqrt{x}}{1}$

$= \boxed{\log_a x}$

22) $\log_a(x^2-25)-\log_a(x+5)\ ,x>5$

$= \log_a\left(\frac{x^2-25}{x+5}\right)$

$= \log_a\frac{(x-5)(x+5)}{x+5}$

$= \log_a(x-5)$

23) $3\log_b 1-\log_b b$

$= 3\times 0-1 \ = \boxed{-1}$

24) $8\log_b x+4\log_b y-\frac{1}{2}\log_b z$

$= \log_b x^8+\log_b y^4-\log_b 8^{\frac{1}{2}}$

$= \log_b\left(\frac{x^8\ y^4}{\sqrt{z}}\right)$

- ايرادات : يمثل الاقتران : $T(a)=10+20\log_6(a+1)$ مبيعات شركة (بالاف الدنانير) الذي تنفقه الشركة على اعلانات المنتج ، و $a\geq 0$ ، وتعني القيمة : $T(1)\approx 17.7$ أن انفاق $1000\ JD$ على الاعلانات يحقق ايرادات قيمتها $17700\ JD$ من بيع المنتج . أجد قيمة ايرادات الشركة بعد انفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الاعلانات ، علما بأن $\log_6 2\approx 0.3869$.

$T(a)=10+20\log_6(a+1)$

$T(1)\approx 17.7$

يعني 1000 دينار يحقق 17.700 دينار .

جد ايراد الشركة بعد انفاق 11 ألف دينار علما بأن $(\log_6 2\approx 0.3869)$.

$T(11)=10+20(\log_6(12))$

$=10+20(\log_6(2\times 6))$

$=10+20(\log_6 6+\log_6 2)$

$=10+20(1+0.3869)$

$=10+20(1.3869)$

$=10+27.74$ بدون اختصار

$=\boxed{37.74}$

اذا تم حذف 11 ألف دينار فإن ذلك يحقق أرباح 37.74 ألف دينار

$=37738$

أ : هيثم حرب
0797771137

الدرس الخامس / المعادلات الأسية

فكرة الدرس :

حل معادلات أسية باستعمال قوانين اللوغاريتمات

المصطلحات :

اللوغاريتك الاعتيادي ، اللوغاريتم الطبيعي ، خاصية المساواة اللوغاريتمية

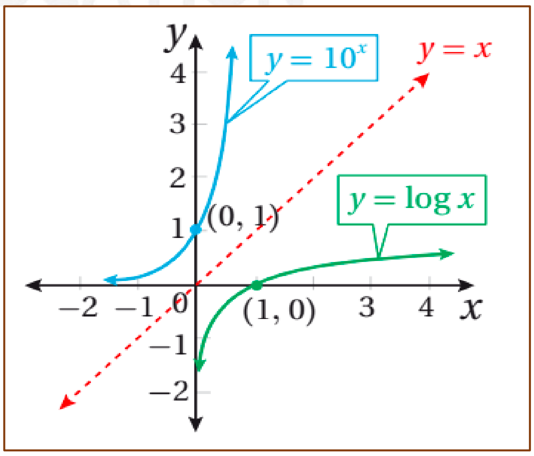
مسألة اليوم :

يمثل الاقتران $A(t) = 10e^{-0.862t}$ كتلة اليود (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها $10\ g$ بعد t يوماً من بدء التفاعل بعد كم يوماً سيظل من العينة $0.5g$ ؟

اللوغريتم الاعتيادي ، واللوغريتم الطبيعي

يطلق على اللوغاريتم للأساس 10 أو $\log_{10}$ اسم اللوغاريتم الاعتيادي (common logarithm)

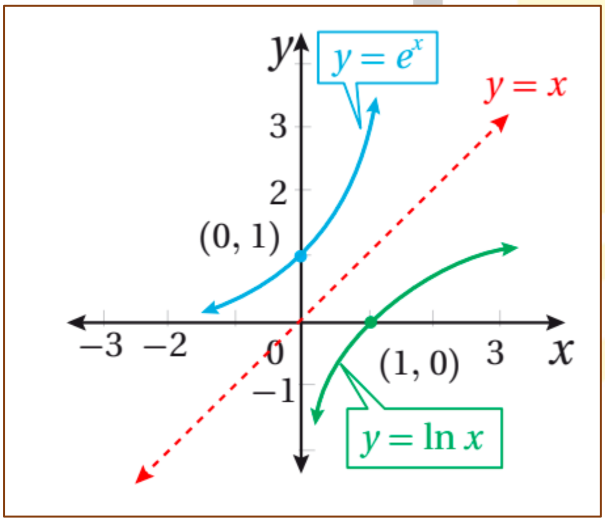
ويكتب عادة من دون اساس.



يعد اقتران اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log x$ الاقتران العكسي للأقتران الأسي $y = 10^x$ أي إن :

$y = \log_{10} x$ إذا وفقط إذا $x > 0$, $10^y = x$

اما اللوغاريتم للأساس e أو $\log_e$ فيسمى اللوغاريتم الطبيعي (natural logarithm) ويرمز إليه بالرمز $\ln$



ويعد اقتران اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ الاقتران العكسي للاقتران الاسي الطبيعي $y = e^x$ أي أن :

$y = \ln x$ إذا وفقط إذا $x > 0$, $e^y = x$

لغة الرياضيات

يدل الرمز $\ln$ على اللوغاريتم الطبيعي وهو اختصار لكلمتي

(natural logarithm)

تنطبيق خصـــائص اللوغـاريتم على اللوغـاريتم الاعتيادي واللوغاريتم الطبيعي ، ويمكن اســتعمالها لإيجاد قيمة كل منهما ، علماً بأن اللة الحاســبة تحوي زراً خاصاً باللوغاريتم الاعتيادي هو $\boxed{\log}$

وزراً خاصـــاً باللوغاريتم الطبيعي هو $\boxed{\ln}$ ، ويمكن بهما إيجـاد القيمـة التقريبيـة لكـل من اللوغـاريتم الاعتيادي ، واللوغاريتم الطبيعي ، لأي عدد حقيقي موجب .

أتعلم

يوجد في بعض الآلا الحاسبة زر $\boxed{\log_{\square}}$ الذي يستعمل لإيجاد قيمة اللوغاريتم لأي أساس b حيث

$b > 0, b \neq 1$

مثال 1

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة :

$1)\ \log 2.7$

أستعمل الآلة الحاسبة

$\boxed{\log}\ 2.7\ \boxed{=}\ \boxed{0.4313637642}$

إذن $\log 2.7 \approx 0.4$

$2)\ \log\left(1.3 \times 10^{5}\right)$

أستعمل الآلة الحاسبة

$\boxed{\log}\ (1.3 \times 10\ \boxed{x^2}\ 5)\ \boxed{=}\ \boxed{5.113943352}$

إذن $\log\left(1.3 \times 10^{5}\right) \approx 5.1$

$3)\ \ln 17$

أستعمل الآلة الحاسبة

$\boxed{\ln}\ 17\ \boxed{=}\ \boxed{2.833213344}$

إذن $\ln 17 \approx 2.8$

أتحقق من فهمي

أستعمل الألة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة

$a)\ \log_{13}$

$b)\ \log(3.1 \times 10^{4})$

$c)\ \ln 0.25$

أ : هيثم حرب
0797771137

تغيير الأساس

تعلمت سابقاً ان معظم الآلات الحاسبة تحتوي على زرين للوغاريتمات هما $\boxed{\log}$ و $\boxed{\ln}$ ولكن كيف يمكنني إيجاد $\log_4 7$ باستعمال هذا النوع من الآلات الحاسبة

يمكنني إيجاد ذلك بتغير الأساس غير المرغوب فيه (الأساس 4 في هذه الحالة) إلى حاصل قسمة لوغاريتمين للأساس نفسة

❖ مفهوم أساسي

صيغة تغير الأساس

إذا كانت a, b, c أعداداً حقيقية موجبة حيث $b \neq 1 , a \neq 1$ فإن :

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a x}$$

مثال 2

أجد قيمة كل مما ياتي مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم):

1) $\log_3 16$

$$\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$$ صيغة تغيير الأساس

$$\approx 2.50$$ باستعمال الآلة الحاسبة

2) $\log_{\frac{1}{2}} 10$

$$\log_{\frac{1}{2}} 10 = \frac{\log 10}{\log \frac{1}{2}}$$ صيغة تغيير الأساس

$$= \frac{\log 10}{\log 1 - \log 2}$$ قانون القسمة في اللوغاريتمات

$$= \frac{1}{-\log 2} \qquad \log 1 = 0 , \log 10 = 1$$

$$\approx -3.32$$ باستعمال الآلة الحاسبة

أفكر

إذا استعملت اللوغاريتم الطبيعي بدلاً من اللوغاريتم الاعتياددي في الفرع أ من المثال فهل سيختلف الناتج ؟ أبرر إجابتي

أفكر

هل يمكنني حل الفرع 2 من المثال بطريقة أخرى ؟

أبرر إجابتي ؟

أ : هيثم حرب
0797771137

أتحقق من فهمي

أجد قيمة مل مما يأتي مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من مئة (إن لزم) :

$a)\ \log_a\ 51$

$b)\ \log_{\frac{1}{2}} 13$

المعادلات الأسية

تعلمت سابقاً مفهوم المعادلات الأسية ، وهي معادلة تتضمن قوى أسسها متغيرات ، ويتطلب حلها كتابة طرفي المعادلة في صورة قوتين للأساس نفسه ، ثم المقارنة بين أسي الطرفين وفق القاعدة الآتية :

إذا كان $a^x = a^y$ فإن $x = y$

حيث $a > 0 , a \neq 0$

فمثلاً يمكنني حل المعادلة $3^x = 81$ كما يأتي :

المعادلة الأصلية	$3^{2x} = 81$
بمساواة الاساسين	$3^{2x} = 3^4$
بمساواة الأسس	$2x = 4$
بحل المعادلة	$x = 2$

ولكن في بعض المعادلات الأسية لا يمكنني كتابة طرفي المعادلة في صورة قوتين للأساس نفسه مثل المعادلة $3^x = 5$ ، لذا أستعمل خاصية المساواة اللوغاريتمية

(property of logarithmic equality)

أتعلم

تعزى خاصية المساواة اللوغاريتمية إلى أن الاقتران اللوغاريتمي هو اقتران واحج لواحد إذا يرتبط كل عنصر في مداه بعنصر واحد فقط في مجاله

❖ مفهوم أساسي

صيغة تغير الأساس

إذا كانت $b > 0$ حيث $b \neq 1 , x > 0, y > 0$

$\log_b x = \log_b y$ إذا وفقط إذ $x = y$

وتأسيساً على ذلك يمكن حل المعادلات الأسية التي يتعذر كتابتها على في صورة قوتين للأساس نفسه وذلك بأخذ اللوغاريتم نفسه لطرفي المعادلة ، ثم استعمال قانون القوة في اللوغاريتمات .

أ : هيثم حرب
0797771137

مثال 3

أحل المعادلات الأسية مقرباً إجابتي إلى أقرب منزلتين عشريتين :

1) $2^x = 13$ المعادلة الأصلية

$\log 2^x = \log 13$ بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$x \log 2 = \log 13$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$x = \dfrac{\log 13}{\log 2}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2$

$x \approx 3.7$

أذن حل المعادلة هو $x \approx 3.7$

---

2) $5\, e^{3x} = 125$

$5\, e^{3x} = 125$ المعادلة الأصلية

$e^{3x} = 25$ بالقسمة على 5

$\ln e^{3x} = \ln 25$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين

$3x = \ln 25$ $\quad \log_b b^x = x$

$x = \dfrac{\ln 25}{3}$ بقسمة طرفي المعادلة على 3

$x \approx 1.07$ باستعمال الآلة الحاسبة

اذن حل المعادلة هو : $x \approx 1.07$.

---

3) $2^{x+4} = 5^{3x}$

$2^{x+4} = 5^{3x}$ المعادلة الأصلية

$\log 2^{x+4} = \log 5^{3x}$ بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$(x+4)\log 2 = 3x \log 5$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$x \log 2 + 4 \log 2 = 3x \log 5$ خاصية التوزيع

$x \log 2 - 3x \log 5 = -4 \log 2$ بإعادة ترتيب المعادلة

$x(\log 2 - 3\log 5) = -4 \log 2$

بإخراج عاملاً مشتركاً

$x = \dfrac{-4 \log 2}{\log 2 - 3 \log 5}$

بقسمة طرفي المعادلة على $\log 2 - 3\log 5$

$x \approx 0.67$

أذن حل المعادلة هو $x \approx 0.67$

---

4) $9^x + 3^x - 30 = 0$

$9^x + 3^x - 30 = 0$ المعادلة الأصلية

$(3^x)^2 + 3^x - 30 = 0 \quad 9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$

$u^2 + u - 30 = 0$ بافتراض أن $3^x = u$

$(u+6)(u-5) = 0$ بالتحليل

$u = -6 \quad or \quad u = 5$ خاصية الضرب الصغري

$3^x = -6 \qquad 3^x = 5$ باستعمال 3^x بـ u

بما أن 3^x موجبة لأي قيمة x فإنه لا يوجد حل للمعادلة $3^x = -6$ ويكتفي بحل المعادلة $3^x = 5$

$\log 3^x = \log 5$ بأخذ اللوغاريتم الاعتيادي لكلا الطرفين

$x \log 3 = \log 5$ قانون القوة في اللوغاريتمات

$x = \dfrac{\log 5}{\log 3}$ بقسمة طرفي المعادلة على $\log 3$

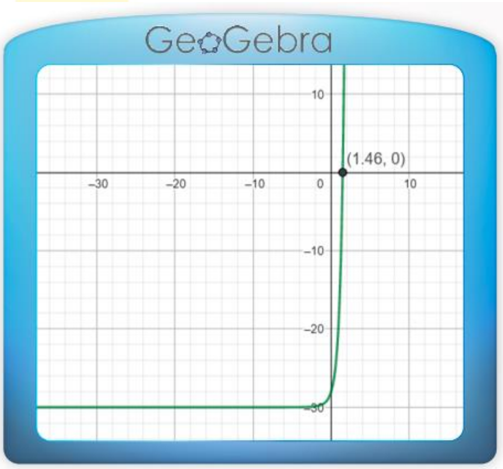
$x \approx 1.46$ باستعمال الآلة الحاسبة

الدعم البياني

يمكن حل المعادلة $9^x + 3^x - 30 = 0$ باستعمال برمجية جيو جبرا ، وذلك بتمثيل الاقتران $f(x) = 9^x + 3^x - 30$ وتحديد نقاط تقاطع منحنى الاقتران مع المحور x

يبين التمثيل البياني المجاور أن منحنى الاقتران $f(x)$ يقطع المحور x في نقطة واحدة فقط ما يعني وجود حل واحد فقط للمعادلة

$$9^3 + 3^x - 30 = 0$$



أحل المعادلات الأسية الآتية : مقرباً إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية :

أتحقق من فهمي

$a)\ 7^x = 9$

$$x = \log_7 9 = \frac{\log 9}{\log 7} \approx 1.1292$$

$b)\ 2e^{5x} = 64$

$$2e^{5x} = 64$$

$$e^{5x} = 32$$

$$5x = \ln 32$$

$$x = \frac{1}{2} \ln 32 \approx 0.6931$$

$c)\ 7^{2x+1} = 2^{x-4}$

$$7^{2x+1} = 2^{x-4}$$

$$\log 7^{2x+1} = \log 2^{x-4}$$

$$(2x+1)\log 7 = (x-4)\log 2$$

$$2x\log 7 + \log 7 = x\log 2 - 4\log 2$$

$$2x\log 7 - x\log 2 = -\log 7 - 4\log 2$$

$$x(2\log 7 - \log 2) = -\log 7 - 4\log 2$$

$$x = \frac{-\log 7 - 4\log 2}{2\log 7 - \log 2} \approx -1.4751$$

$d)\ 4^x + 2^x - 12 = 0$

$$4^x + 2^x - 12 = 0$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 12 = 0$$

$$u^2 + u - 12 = 0$$

$$(u+4)(u-3) = 0$$

$$u = -4 \quad or \quad u = 3$$

$$2^x = -4 \quad or \quad 2^x = 3$$

المعادلة $2^x = -4$ ليس لها حل لأن $2^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$$2^x = 3 \quad - x = \log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\approx 1.5850$$

تستعمل المعادلات الآسة في كثير من التطبيقات الحياتية والعلمية :

مثال 4 من الحياة

نمو سكاني : قدر عدد سكان العالم بنحو 6.5 مليار نسمة عام 2006م ويمثل الاقتران : $P(t) = 6.5(1.014)^t$ عدد سكان العالم (بالمليار نسمة) بعد t عاما منذ عام 2006م . بعد كم سنة من عام 2006م سيلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة ؟

الاقتران الاصلي $P(t) = 6.5(1.014)$

$13 = 6.5(1.014)^t$

بتعويض $p(t) = 13$

بقسمة طرفي المعادلة على 6.5 $2(1.014)^t$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين $\ln 2 = \ln(1.014)^t$

قانون القوة في اللوغاريتمات $\ln 2 = t \ln 1.014$

بحل المعادلة لـ t $t = \frac{\ln 2}{\ln 1.014}$

باستعمال الالة الحاسبة $t \approx 50$

اذن سيبلغ عدد سكان العالم 13 مليار نسمة بعد 50 سنة تقريبا من عام 2006م.

أتحقق من فهمي

اعتماداً على المعطيات الواردة في المثال السابق بعد كم سنة من عام 2006 سيبلغ عدد سكان العالم 9 مليارات نسمة ؟

أستعمل الآلة الحاسبة لإيجاد قيمة كل مما يأتي ، مقرباً إجابتي إلى أقرب جزء من عشرة :

1) $\log 19$

$\log 19 \approx 1.3$

2) $\log(2.5 \times 10^{-3})$

$\log(2.5 \times 10^{-3}) \approx -2.6$

3) $\ln 3.1$

$\ln 3.1 \approx 1.1$

4) $\log_2 10$

$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} \approx 3.3$

5) $\log_3 e^2$

$\log_3 e^2 = \frac{\ln e^2}{\ln 3} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1.8$

6) $\ln 5$

$\ln 5 \approx 1.6$

أ : هيثم حرب
0797771137

أتدرب وأحل المسائل

أجد قيمة كل مما يأتي مقربا اجابتي الى أقرب جزء من مئة (ان لزم) :

$7)\ \log_3 33$

$$\log_3 33 = \frac{\log 33}{\log 3} \approx 3.18$$

$8)\ \log_{\frac{1}{3}} 17$

$$= \frac{\log 17}{\log \frac{1}{3}} = \frac{\log 17}{\log 1 - \log 3} \approx -2.58$$

$9)\ \log_6 5$

$$\log_6 5 = \frac{\log 5}{\log 6} \approx 0.90$$

$10)\ \log_7 \frac{1}{7}$

$$\log_7 \frac{1}{7} = \log_7 1 - \log_7 7 = 0 - 1 = -1$$

$11)\ \log 1000$

$$\log 1000 = 3$$

$12)\ \log_3 15$

$$\log_3 15 = \frac{\log 15}{\log 3} \approx 2.46$$

أحل المعادلات الأسية الاتية مقربا اجابتي الى أقرب 4 منازل عشرية :

$13)\ 6^x = 121$

$$\log 6^x = \log 121 \longrightarrow x\log 6 = \log 121$$

$$\longrightarrow x = \frac{\log 121}{\log 6} \approx 2.6766$$

$14)\ -3e^{4x} = -27$

$$e^{4x} = 9$$

$$4x = \ln 9$$

$$x = \frac{1}{4}\ln 9 \approx 0.5493$$

$15)\ 5^{7x-2} = 3^{2x}$

$$\log 5^{7x-2} = \log 3^{2x}$$

$$(7x-2)\log 5 = (2x)\log 3$$

$$7x\log 5 - 2\log 5 = 2x\log 3$$

$$7x\log 5 - 2x\log 3 = 2\log 5$$

$$x(7\log 5 - 2\log 3) = 2\log 5$$

$$x = \frac{2\log 5}{7\log 5 - 2\log 3} \approx 0.3549$$

أ : هيثم حرب
0797771137

16) $25^x + 5^x - 42 = 0$

$(5^x)^2 + 5^x - 42 = 0$

$u^2 + u - 42 = 0$

$(u+7)(u-6) = 0$

$u = -7 \quad or \quad u = 6$

$5^x - 3 \quad or \quad 5^x = 6$

المعادلة $5^x - 3$ ليس لها حل لأن $5^x > 0$ لكل قيم المتغير x

$5^x = 6 \rightarrow x\log5 = \log6 \rightarrow x = \dfrac{\log6}{\log6}$

≈ 1.1133

17) $2(9)^x = 32$

$2(9)^x = 32 \rightarrow 9^x = 16 \rightarrow x\log9 = \log 16$

$x = \dfrac{\log 16}{\log 9} \approx 1.2619$

18) $27^{2x+3} = 2^{x-5}$

$\log 27^{2x+3} = \log 2^{x-5}$

$(2x+3)\log 27 = (x-5)\log 2$

$2x\log 27 + 3\log 27 = x\log 2 - 5\log 2$

$2x\log 27 - x\log 2 = -3\log 27 - 5\log 2$

$x(2\log 27 - \log 2) = -3\log 27 - 5\log 2$

$x = \dfrac{-3\log 27 - 5\log 2}{2\log 27 - \log 2} \approx -2.2638$

أودعت سميرة مبلغ P في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 5% :

19) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي ؟

$2P = Pe^{0.05t}$

$2 = e^{0.05t}$

$0.05t = \ln 2$

$t = \dfrac{1}{0.05}\ln 2$

$= 20\ln 2 \approx 14$

بعد 14 سنة تقريباً تصبح جملة المبلغ مثلي المبلغ الأصلي

20) بعد كم سنة تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي ؟

إرشاد : صيغة جملة المبلغ للربح المركب المستمر هي $A = pe^{rt}$

$3P = Pe^{0.05t}$

$3 = e^{0.05t}$

$0.05t = \ln 3$

$t = 20\ln 3 \approx 22$

بعد 22 سنة تقريباً تصبح جملة المبلغ 3 أمثال المبلغ الأصلي

21) كوالا : تناقضت أعداد حيوان الكولا في إحدى الغابات وفق الاقتران

$N = 873e^{-0.078t}$ حيث N العدد المتبقي من هذا الحيوان في الغابة بعد t سنة بعد كم سنة يصبح في الغابة 97 حيواناً من الكوالا ؟

$97 = 873e^{-0.078t}$

$\frac{97}{873} = e^{-0.078t}$

$\frac{1}{9} = e^{-0.078t}$

$-0.078t = \ln\frac{1}{9}$

$-0.078t = \ln 1 - \ln 9$

$-0.078t = 0 - \ln 9$

$-0.078t = -\ln 9$

$t = \frac{\ln 9}{0.078} \approx 28$

بعد 28 سنة تقريباً يصبح في الغابة 97 حيواناً من الكوالا

مهارات التفكير العليا

22) تبرير : أجد قيمة كل من k ، و h إذا وقعت النقطة $(-2, k)$ ، والنقطة $(h, 100)$ على منحنى الاقتران $f(x) = e^{1.5x+3}$ ، مبرراً إجابتي :

$f(x) = e^{1.5x+3}$

بما أن النقطة $(-2, k)$ تقع على منحنى الاقتران ، فإن إحداثياها يحققان معادلة المنحنى

$f(-2) = e^{0.5(-2)+3}$

بما أن النقطة $(h, 100)$ تقع على منحنى الاقتران ، فإن إحدثياها يحققان معادلة المنحنى

$f(h) = e^{0.5h+3}$

$100 = e^{0.5h+3}$

$0.5h + 3 = \ln 100$

$0.5h = \ln 100 - 3$

$h = \frac{1}{0.5}\ln 100 - \frac{3}{0.5}$

$h = 2\ln 100 - 6 \approx 3.2$

---

23) تحد : أحل المعادلة : $3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

$3^x + \frac{4}{3^x} = 5$

$3^x\left(3^x + \frac{4}{3^x}\right) = 3^x \times 5$

$3^{2x} + 4 = 5(3^x)$

$3^{2x} - 5(3^x) + 4 = 0$

$(3^x)^2 - 5(3^x) + 4 = 0$

$u^2 - 5u + 4 = 0$

$(u-4)(u-1) = 0$

$u = 4$ or $u = 1$

$3^x = 4$ o r $3^x = 1$

$3^x = 4 \rightarrow x = \log_3 4 \approx 1.26$

$3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 = 0$

أ : هيثم حرب
0797771137

كتاب التمارين

- أستعمل الالة الحاسبة لايجاد قيمة كل مما يأتي ، مقربا اجابتي الى أقرب جزء من عشرة :

1) $\log 17$

$\approx \boxed{1.}$

2) $\log(1.5 \times 10^{-4})$

$\approx \boxed{-3.8}$

3) $\ln 2.3$

$\approx \boxed{0.8329}$

4) $\log_2 15$

$\approx \dfrac{\ln 15}{\ln 2} \approx \boxed{3.9}$

5) $\log_5 e^7$

$\approx \dfrac{\ln e^7}{\ln 5} = 4.349 = \boxed{4.3}$

6) $\ln 7$

$\approx \boxed{1.9}$

- أجد قيمة كل مما يأتي ، مقربا اجابتي الى أقرب جزء من مئة (ان لزم) :

7) $\log_5 27$

$\approx \boxed{2.05}$

8) $\log_{\frac{1}{4}} 19$

$\approx \boxed{-2.11}$

9) $\log_7 8$

$\approx \boxed{1.07}$

10) $\log_8 \dfrac{1}{8}$

$= \boxed{-1}$

11) $\log 10000$

$= \boxed{4}$

12) $\log_3 18$

$= \dfrac{\log 18}{\log 3} \approx \boxed{2.6}$

أ : هيثم حرب
0797771137

13) $5^x = 120$

$\log 5^x = \log 120$

$x \log 5 = \log 120$

$x = \dfrac{\log 120}{\log 5} = 2.9746 \approx \boxed{2.97}$

14) $-4e^{4x} = -65$

$e^{4x} = 16$

$\ln e^{4x} = \ln 16$

$4x = \ln 16$

$x = \dfrac{\ln 6}{4} \approx \boxed{0.69}$

15) $3^{2x+1} = 7^{5x}$

$\log 3^{2x+1} = \log 7^{5x}$

$(2x+1)\log 3 = 5x \log 7$

$2x \log 3 + \log 3 = 5x \log 7$

$2x \log 3 - 5x \log 7 = -\log 3$

$x(2\log 3 - 5\log 7) = -\log 3$

$x = \dfrac{-\log 3}{2\log 3 - 5\log 7} \approx \boxed{0.15}$

16) $64^x + 2(8)^x - 3 = 0$

$(8^2)^x + 2(8)^x - 3 = 0$

$(8^x)^2 + 2(8^x) - 3 = 0$

$\boxed{u = 8^x}$

$u^2 + 2u - 3 = 0$

$(u-1)(u+3) = 0$

$u = 1 \qquad u = -3$ تهمل

$8^x = 1$

$8^x = 8^0 \ \boxed{x = 0}$

17) $7(8)^x = 49$

$4^x = 7$

$\log 4^x = \log 7$

$x \log 4 = \log 7$

$x = \dfrac{\log 7}{\log 4} \approx \boxed{1.40}$

18) $21^{x-1} = 3^{7x+1}$

$\log 21^{x-1} = \log 3^{7x+1}$

$(x-1)\log 21 = (7x+1)\log 3$

$x \log 21 - \log 21 = 7x \log 3 + \log 3$

$-\log 21 - \log 3 = 7x \log 3 - x \log 21$

$$-\log 21-\log 3=x(7\log 3-\log 21)$$

$$x=\frac{-(\log 21+\log 3)}{7\log 3-\log 21}=-0.89$$

19) حـرارة : تـمـثـل الـمـعـادلـة : $T=27+219e^{-0.032t}$ درجة حرارة معدن (بالسليسيوس $^\circ C$) بعد t دقيقة من تبريده . متى تصبح درجة حرارة المعدن $100\ ^\circ C$ ؟

$$T=27+219e^{-0.032t}$$

$$100=27+219e^{-0.032t}$$

$$100-27=219e^{-0.032t}$$

$$73=219e^{-0.032t}$$

$$e^{-0.032t}=\frac{73}{219}=\frac{1}{3}$$

$$\ln(e^{-0.032t})=\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$-0.032t=\ln 1-\ln 3$$

$$t=\frac{\ln 0-\ln 3}{-0.032}=\frac{\ln 3}{0.032}=\boxed{34.3}$$

- أرانب : توصلت دراسة الى أن عدد الأرانب في محمية طبيعية يتزايد وفق الاقتران : $N(t)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$ ، حيث N عدد الأرانب في المحمية بعد t سنة :

20) أجد عدد الأرانب في المحمية عند بدء الدراسة .

$$N(t)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$$

$$\boxed{t=0}$$

$$N(0)=\frac{2000}{1+3e^{-0.05(0)}}=\frac{2000}{1+3}$$

$$=\frac{2000}{4}=\boxed{500}$$

21) بعد كم سنة يصبح عدد الأرانب في المحمية 700 أرنب ؟

$$700=\frac{2000}{1+3e^{-0.05t}}$$

$$700+2100e^{-0.05t}=2000$$

$$2100e^{-0.05t}=2000-700$$

$$2100e^{-0.05t}=1300$$

$$e^{-0.05t}=\frac{13}{21}$$

$$\ln e^{-0.05t}=\ln\left(\frac{13}{21}\right)$$

$$-0.05t=\ln\frac{13}{21}$$

$$-0.05t=\ln 13-\ln 21$$

$$t=\frac{\ln 13-\ln 21}{-0.05}$$

$$t=\boxed{9.59}$$

أ : هيثم حرب
0797771137

أسماك : يمثل الاقتران : $P(t) = 200e^t$ عدد أسماك السلمون P في نهر بعد t سنة من بدء دراسة معينة عليها :

22) أجد عدد أسماك السلمون في النهر عند بدء الدراسة .

$$P(t) = 200e^t$$

$$\boxed{t = 0}$$

$$P(0) = 200e^0 = \boxed{200}$$

---

23) بعد كم سنة يصبح عدد أسماك السلمون في النهر 4000 سمكة ؟

$$4000 = 200e^t$$

$$e^t = 20$$

$$\ln e^t = \ln 20$$

$$t = \ln 20 = 299 \approx \boxed{3}$$

اختبار نهاية الوحدة

اختار رمز الاجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1) خط التقارب الأفقي للاقتران $f(x) = 4(3^x)$ هو

$a)\ y = 4$ $\quad b)\ y = 3$

$c)\ y = 1$ $\quad d)\ y = 0$

(d)

2) حل المعادلة $\ln e^x = 1$ هو :

$a)\ 0$ $\quad b)\ \frac{1}{e}$

$c)\ 1$ $\quad d)\ e$

(c)

3) قيمة $\log(0.1)^2$ هي :

$a) -2$ $\quad b) -1$

$c)\ 1$ $\quad d)\ 2$

(a)

4) أحد الآتية يكافئ المقدار

$$\log_a 27 - \log_a 9 + \log_a 3$$

a) $\log_a 3$ $\quad$ b) $\log_a 6$

c) $\log_a 9$ $\quad$ d) $\log_a 27$

(c)

5) أحد الآتية يكافئ المقدار $\log_a \frac{ax^5}{y^3}$

$a)\ 5\log_a x - 3\log_a y + 1$

$b)\ a\log_a x^5 - \log_a y^3$

$c)\ 5a\log_a x - 3\log_a y$

$d)\ 1 - 5\log_a x - 3\log_a y$

(a)

6) حل المعادلة $2^{x+1} = 4^{x-1}$ هو :

$a)\ 2$ $\quad b)\ 3$

$c)\ 4$ $\quad d)\ 8$

(b)

7) قيمة $\log 10$ هي :

a) $2\log 5$ $\quad$ b) 1

c) $\log 5 \times \log 2$ $\quad$ d) 0

(b)

8) إذا كان $e^x = 1$ فإن قيمة x هي :

$a)\ 0$ $\quad b)\ 1$

$c)\ 2$ $\quad d)\ 4$

(a)

9) الاقترانات اللوغاريتمية التي في الصورة $f(x) = \log_b x$ حيث b عدد حقيقي $b > 0$, $b \neq 1$ تمر جميع منحنياتها بالنقطة

$a)\ (1,1)$ $\qquad$ $b)(1,0)$

$c)\ (0,1)$ $\qquad$ $d)\ (0,0)$

(b)

10) إذا كان $\log_5 4 = k$ فأكتب قيمة كل مما يأتي بدلالة k :

10) $\log_5 16$

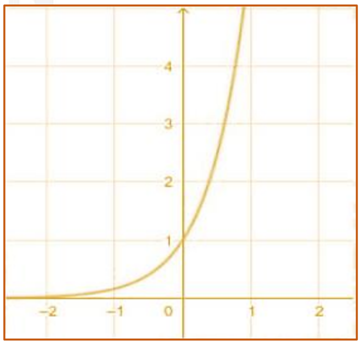
$$\log_5 16 = \log_5 4^2$$
$$= 2\log_5 4$$
$$= 2\,k$$

11) $\log_5 256$

$$\log_5 256 = \log 5\ \frac{25}{100}$$
$$= \log_5 \frac{1}{4}$$
$$= \log_5 1 - \log_5 4$$
$$= 0 - \log_5 4$$
$$= -k$$

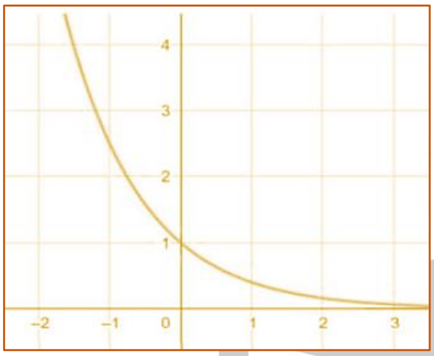
أمثل كل اقتران مما يأتي بيانياً ثم أحدد مجاله ومداه:

12) $f(x) = 6^x$



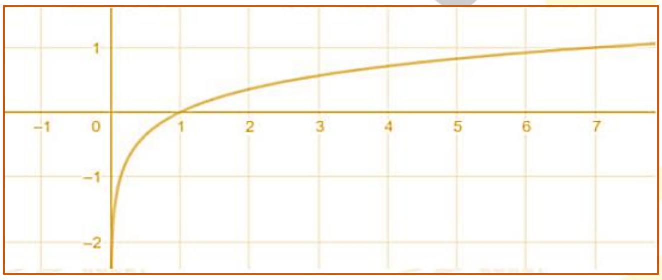
مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران $(0,\infty)$

13) $g(x) = (0.4)^x$



مجال هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R مدى هذا الاقتران $(0,\infty)$

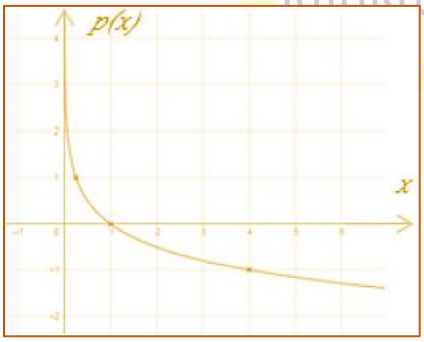
14) $h(x) = \log_7 x$



مجال هذا الاقتران هو $(0,\infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

15) $p(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

$x = \left(\frac{1}{4}\right)^y$	4	1	$\frac{1}{4}$
y	-1	0	2
(x,y)	$(4,-1)$	$(1,0)$	$(0.25,1)$



مجال هذا الاقتران هو $(0,\infty)$
مدى هذا الاقتران هو مجموعة الأعداد الحقيقية R

أ : هيثم حرب
0797771137

أحل المعادلات الأسية الآتية مقرباً إجابتي إلى أقرب 4 منازل عشرية :

16) $8^x = 2$

$2^{3x} = 2^1$

$3x = 1$

$x = \frac{1}{3} \approx 0.3333$

17) $-3e^{4x+1} = -96$

$e^{4x+1} = 32$

$4x + 1 = \ln 32$

$4x = \ln 32 - 1$

$x = \frac{\ln 32 - 1}{4} \approx 0.6164$

18) $11^{2x+3} = 5^x$

$\log 11^{2x+3} = \log 5^x$

$(2x+3)\log 11 = (x)\log 5$

$2x \log 11 + 3 \log 11 = x \log 5$

$2x \log 11 - x \log 5 = -3 \log 11$

$x\,(2\log 11 - \log 5) = -3 \log 11$

$x = \frac{-3 \log 11}{2 \log 11 - \log 5} \approx -2.2577$

19) $49^x + 7^x - 72 = 0$

$(7^x)^2 + 7^x - 72 = 0$

$u^2 + u - 72 = 0$

$(u+9)(u-8) = 0$

$u = -9 \quad or \quad u = 0$

$7^x = -9 \quad or \quad 7^x = 8$

المعادلة $7^x = -9$ ليس لها حل لأن $7^x > 0$ لكل قيم x

$7^x = 8 \; x = \log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \approx 1.0686$

20) استثمر سليمان مبلغ JD 2500 في شركة صناعية بنسبة ربح مركب 4.2% وتضاف شهرياً أجد جملة المبلغ بعد 15 سنة .

$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

$A = 2500\left(1 + \frac{0.042}{12}\right)^{12\times 15} \approx 4688.87$

جملة المبلغ بعد 15 سنة هي JD 4688.87 تقريباً

21) أودع سعيد مبلغ $JD800$ في حساب بنكي بنسبة ربح مركب مستمر مقدارها 4.5% أجد جملة المبلغ بعد 5 سنوات.

$A = Pe^{rt}$

$A = 800e^{0.045\times 5} \approx 1001.86$

جملة المبلغ بعد 5 سنوات هي JD 1001.86 تقريباً

22) فيروس : انتشر فيروس في شبكة حواسيب وفق الاقتران $v(t) = 30e^{0.1t}$ حيث v عدد أجهزة الحاسوب المصابة ، و t الزمن بالدقائق أجد الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس.

$$v(t) = 30e^{0.1t}$$

$$1000 = 30e^{0.1t}$$

$$\frac{1000}{30} = e^{0.1t}$$

$$0.1\,t = \ln\frac{1000}{3}$$

$$t = \frac{1}{0.1}\ln\frac{1000}{3} \approx 58.1$$

الزمن اللازم لإصابة 10000 جهاز حاسوب بالفيروس هو 58.1 دقيقة تقريباً.

يمثل الاقتران $N(t) = 100e^{0.045t}$ عدد الخلايا البكتيرية في عينة مخبرية بعد t يوماً

23) اجد العدد الاصلي للخلايا البكتيرية في العينة.

$$N(t) = 100e^{0.04t}$$

$$N(0) = 100\,e^{0.045\times 0} = 100$$

العدد الأصلي للخلايا البكتيرية في العينة هو 100 خلية.

24) أجد عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام.

$$N(5) = 100\,e^{0.045\times 5} \approx 125$$

عدد الخلايا البكتيرية في العينة بعد 5 أيام هو 125 خلية تقريباً

25) بعد كو يوماً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة 1400 خلية.

$$1400 = 100e^{0.045t}$$

$$14 = e^{0.045t}$$

$$0.045t = \ln 14$$

$$t = \frac{\ln 14}{0.045} \approx 59$$

بعد 59 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية 1400 خلية.

26) بعد كم يوماً يصبح عدد الخلايا البكتيرية في العينة ضعف العدد الأصلي ؟

$$200 = 100e^{0.045t}$$

$$2 = 100e^{0.045t}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.045} \approx 15$$

بعد 15 يوماً تقريباً يصبح عدد الخلايا البكتيرية ضعف العدد الأصلي .

أ : هيثم حرب
0797771137

- يقاس الضغط الجوي بوحدة تسمى هيكتو باسكال (hpa) ويبلغ هذا الضغط عند سطح البحر 1000hpa ويتناقص بنسبة 12% لكل كيلو متر فوق سطح البحر :

27) أكتب اقتران الاضمحلال الأسي للضغط الجوي عند ارتفاع h كيلو متراً عن سطح البحر.

$A(h) = a(1-r)^h$

$A(h) = 1000(1-0.12)^h$

$= 1000(0.00)^h$

28) عند أي ارتفاع تساوي قيمة الضغط الجوينفس قيمة الضغط الجوي عند سطح البحر .

$500 = 1000(0.88)^h$

$0.5 = (0.88)^h \rightarrow \log 0.5 = \text{h} \log 0.88$

$\rightarrow h = \dfrac{\log 0.5}{\log 0.88} \approx 5.42$

عند ارتفاع 5.42 كيلو متر تقريباً فوق سطح البحر تصبح قيمة الضغط الجوي مساوية نصف قيمتها عند سطح البر

29) إعلانات : يمثل الاقتران $S(x) = 400 + 250 \log x$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد حيث x المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تنفقه الشركة على إعلانات المنتج ، و $x \geq 1$ وتعني القيمة $S(1) = 400$ أن إنفاق JD1000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD400000 من بيع المنتج أجد $S(10)$ مفسراً معنى الناتج.

$S(x) = 400 + 250 \log x$

$S(10) = 400 + 250 \log 10 = 650$

أي أن إنفاق JD1000 على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها JD650000

المقترح الوزاري

العلاقات والاقترانات (الأسية واللوغاريتمية)

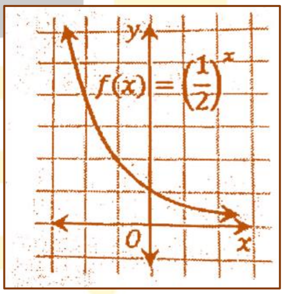
1) منحنى الاقتران الأسي $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ يقطع محور y في النقطة.

$a)\ (0,0)$ $\quad$ $b)\ \boxed{(0,1)}$

$c)(1,0)$ $\quad$ $d)\ (1,1)$

منحنى الاقتران الأسي $f(x)$ يقطع محور y في النقطة $(0,1)$

2) مدى الاقتران $f(x)$ المبينة بالشكل يساوي:



$a)\ R$ $\quad$ $b)\ \boxed{R^{+}}$

$c)\ Z$ $\quad$ $d)\ D$

مدى الدالة الاسية $f(x)$ يساوي R^{+}

3) اذا كانت $2^{3x}=2^{2x+2}$ فما قيمة

$a)\ 1$ $\quad$ $b)\ \boxed{2}$

$c)3$ $\quad$ $d)4$

بما أن الأساسات متساوية فان الأسس متساوي

$2^{2x+2}=2^{3x} \Rightarrow 2x+2=3x$

$\Rightarrow 3x-2x=2$

$\Rightarrow x=2$

4) إذا كانت $3^{x+7}=9^{4x+2}$ فما قيمة x ؟

$a)\ 2$ $\quad$ $b)\ 3$

$c)4$ $\quad$ $d)\frac{3}{7}$

5) إذا كانت $36=6^{4x-2}$ فيما قيمة x ؟

$a)\ \boxed{1}$ $\quad$ $b)\ 2$

$c)\ 3$ $\quad$ $d)\ 5$

$6^{4x-2}=36 \Rightarrow 6^{4x-2}=6^{2}$

$4x-2=2 \Rightarrow 4x=2+2=4$

$\Rightarrow x=\frac{4}{4}=1$

6) إذا كانت $8^{-3}=2^{6x-3}$ فيما قيمة x ؟

$a)\ \boxed{-1}$ $\quad$ $b)\ 1$

$c)\ 4$ $\quad$ $d)21$

$2^{6x-3}=8^{-3} \Rightarrow 2^{6x-3}=(2^{3})^{-3}$

$\Rightarrow 2^{6x-3}=2^{-9}$

وبما أن الأساسات متساوية فان الأسس متساوية ..

$6x-3=-9 \Rightarrow 6x=-9+3=-6$

$\Rightarrow x=\frac{-6}{6}=-1$

أ : هيثم حرب
0797771137

7) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $16\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 81$

$a)\ -4$ $b)\ \boxed{-2}$

$c)\ 2$ $d)\ 4$

$$16\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 81 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$$

$$\frac{2}{2}x = \frac{-4}{2}$$

---

8) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $\frac{2}{-(4)^{1-x}}$ ؟

$a)\ 2$ $b)\ 1$

$c)\ -1$ $d)\ -2$

---

9) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $3^{x-1} = 27$

$a)\ 2$ $b)\ 3$

$c)\ \boxed{4}$ $d)\ 5$

بما ان $27 = 3^3$ فإن :

$$3^{x-1} = 3^3$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 3 + 1 = 4$$

---

10) إذا كان $\log_x 32 = 5$ فما قيمة x ؟

$a)\ 1$ $b)\ \boxed{2}$

$c)\ 5$ $d)\ 32$

$$\log_x 32 = 5 \xrightarrow{\text{تحول إلى الصورة الأسية}} x^5 = 32$$

ومنه

$$x^5 = 2^5 \Rightarrow x = 2$$

---

11) الصورة الأسية المكافئة للصورة اللوغاريتمية $\log_y x = k$ هي :

$a)\ \boxed{y^k = x}$ $b)\ k^y = x$

$c)\ x^y = k$ $d)\ y^x = k$

$$\log_y x = k \Rightarrow y^k = x$$

---

12) إذا كان $\log_2 x = 3$ فإن x تساوي:

$a)\ 2$ $b)\ 3$

$c)\ 5$ $d)\ \boxed{8}$

ايجاد قيمة x نحول المعادلة الى الصورة الأسية

$$\log_2 x = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$$

---

13) إذا كان $\log_x 81 = 2$ فإن x تساوي:

$a)\ 2$ $b)\ \boxed{9}$

$c)\ 7$ $d)\ 81$

لايجاد قيمة x نحول المعادلة الى الصورة الأسية

$$\log_x 81 = 2 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x^2 = 9^2$$

$$\Rightarrow x = 9$$

14) ما الصورة اللوغاريتمية للمعادلة $5^3 = 125$

$a)\ \log_5 3 = 125$ $b)\ 3\log 5 = 125$

$c)\ \boxed{\log_5 125 = 3}$ $d)\ \log_3 125 = 5$

$5^3 = 125 \Rightarrow \log_5 125 = 3$

15) الصورة الأسية المكافئة للعبارة اللوغاريتمية $\log 100 = 2$ تساوي.

$a)\ \boxed{100 = 10^2}$ $b)\ 10 = 100^2$

$c)\ 100 = 2^{10}$ $d)\ 2 = 10^{100}$

$\log_{10} 100 = 2 \Rightarrow 100 = 10^2$

16) منحنى الاقتران اللوغاريتمية $f(x) = \log_b x$ محور x في النقطة.

$a)\ (0,0)$ $b)\ (0,1)$

$c)\ (1,1)$ $d)\ (1,0)$

17) ما المقطع y للاقتران اللوغاريتمي $f(x) = \log_2(x+1) + 3$

$a)\ \boxed{3}$ $b)\ 2$

$c)\ 1$ $d)\ 0$

لايجاد المقطع y للاقتران نوجد حل المعادلة $y = f(0)$.

$f(0) = \log_2(0+1) + 3$

$= \log_2 1 + 3 = 0 + 3 = 3$

18) ما قيمة $\log_4 64$ ؟

$a)\ \boxed{3}$ $b)\ 4$

$c)\ 9$ $d)\ 16$

$\log_4 64 = \log_4 (4)^3 = 3\log_4 4$

$= 3 \times 1 = 3$

19) ما القيمة المختلفة عن القيم الثلاث الأخرى؟

$a)\ \log_2 16$ $b)\ \log_3 81$

$c)\ \log_5 125$ $d)\ \log_4 256$

بمناقشة الخيارات ..

a) $\log_2 16$ ..

$\log_2 16 = \log_2 (2)^4$

$= 4\log_2 2 = 4 \times 1 = 4$

b) $\log_3 81$ ..

$\log_3 81 = \log_3 (3)^4$

$= 4\log_3 3 = 4 \times 1 = 4$

c) $\log_5 125$ ..

$\log_5 125 = \log_5 (5)^3$

$= 3\log_5 5 = 3 \times 1 = 3$

20) ما قيمة المقدار $\log_2 5 + \log_2 4$

$a)\ \log_2 16$ $\qquad b)\ 5\log_2 10$

$c)\ \boxed{\log_2 20}$ $\qquad d)\ 1$

$\log_2 5 + \log_2 4 = \log_2(5 \times 4)$

$= \log_2 20$

---

21) ما قيمة المقدار

$2\log_5 x - \log_5(2x-5)$

$a)\ \log_5 x^2(2x-5)$ $\qquad b)\ \log \dfrac{x^2}{2x-5}$

$c)\ \log_5 \dfrac{2}{2x-5}$ $\qquad d)\ \boxed{\log_5 \dfrac{x^2}{2x-5}}$

$2\log_5 x - \log_5(2x-5)$

$= \log_5 x^2 - \log_5(2x-5)$

$= \log_5 \dfrac{x^2}{2x-5}$

---

22) ما قيمة $\log_{1000} 10$ ؟

$a)\ -3$ $\qquad b)\ -\dfrac{1}{3}$

$c)\ \boxed{\dfrac{1}{3}}$ $\qquad d)\ 3$

$\log_{1000} 10 = \log_{1000} \sqrt[3]{1000}$

$= \log_{1000}(1000)^{\frac{1}{3}}$

$= \dfrac{1}{3}\log_{1000} 1000$

$= \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{1}{3}$

---

23) ما قيمة $\log_5(0.008)$ ؟

$a)\ \boxed{-3}$ $\qquad b)\ -2$

$c)\ 2$ $\qquad d)\ 3$

$\log_5(0.008) = \log_5 \dfrac{8}{1000}$

$= \log_5 \left(\dfrac{2}{10}\right)^3 = \log_5 \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

$= \log_5(5)^{-3}$

$= -3\log_5 5$

$= -3$

---

24) ما قيمة المقدار

$\log_5(x+1) + \log_5(x) - 2\log_5(1+x)$

$a)\ 3\log_5 x - \log_5 1$ $\qquad b)\ 3\log_5 x$

$c)\ \log_5 x^3$ $\qquad d)\ \boxed{\log_5 \dfrac{x}{1+x}}$

$\log_5 (x+1) + \log_5 (x) - \log_5 (x+1)^2$

$= [\log_2 (x+1) - \log_5 (x+1)^2] + \log_5 (x)$

$= \log_5 \dfrac{(x+1)}{(x+1)^2} + \log_5 (x)$

$= \log_5 \dfrac{1}{x+1} \times x$

$= \log_5 \dfrac{x+1}{x}$

25) ما قيمة $\log_2 \frac{1}{32}$ ؟

$a)\ \boxed{-5}$ $\quad b)\ -\frac{1}{5}$

$c)\ \frac{1}{5}$ $\quad d)\ 5$

$$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 \frac{1}{2^5} = \log_2 2^{-5}$$

$$= -5 \log_2 2$$

$$= -5 \times 1 = -5$$

26) أي التالي حلاً للمعادلة $\log_3 9^{x-2} = 0$ ؟

$a)\ -2$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}$

$c)\ \frac{1}{2}$ $\quad d)\ \boxed{2}$

نحول $\log_3 9^{x-2} = 0$ الى الصورة الأسية

$$9^{x-2} = 3^0$$

$$(3^2)^{x-2} = 3^0$$

$$3^{2x-4} = 3^0$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

27) ما قيمة $\log_{27} 81$ ؟

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{1}{8}$

$c)\ \boxed{\frac{4}{3}}$ $\quad d)\ \frac{5}{36}$

$$\log_{27}(81) = \frac{\log(81)}{\log(27)} = \frac{\log(3)^4}{\log(3)^3}$$

$$= \frac{4\log(3)}{3\log(3)} = \frac{4}{3}$$

28) المقدار

$(\log(x+1) = \log x^2 + 3\log x$ يساوي

$a)\ \log_5 x(x+1)$ $\quad b)\ \log_5 \frac{x+1}{1}$

$c)\ \boxed{\log x(x+1)}$ $\quad d)\ \log \frac{x+1}{x}$

$$\log(x+1) - \log x^2 + 3\log x$$

$$\Rightarrow \log(x+1) - \log x^2 + \log x^3$$

$$\Rightarrow \log \frac{(x+1) \times x^3}{x^2}$$

أ : هيثم حرب
0797771137

29) قيمة العبارة اللوغاريتمية
$3\log_3(9) - \log_5 9\left(\frac{1}{25}\right)$ تساوي :

$a)\ 12$ $b)\ 10$

$c)\ \boxed{8}$ $d)\ 4$

$$3\log_3(9) - \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$= 3\log_3(3)^2 - \log_5\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$= (3\times 2)\log_3 3 - \log_5(5)^{-2}$$

$$= (6\times 1) - (-2\log_5 5)$$

$$= 6 - (-2\times 1) = 6 + 2 = 8$$

30) أي التالي يمثل حلاً للمعادلة
$1 + 2\log_2(x+1) = 5$ ؟

$a)\ 4$ $b)\ 2$

$c)\ \boxed{3}$ $d)\ -3$

$$2\log_2(x+1) = 5 - 1 = 4$$

$$\Rightarrow \log_2(x+1) = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow x + 1 = 2^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = 4 - 1 = 3$$

31) أي التالي يمثل حلاً للمعادلة
$\log_2(x^2-4) = \log_2 3x$ ؟

-2 (a -1 (b

1 (c $\boxed{4}$ (d

من خاصية المساواة

$$\log_2(x^2-4) = \log_2 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 = 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0$$

$\Rightarrow x = 4, x = -1$ (مرفوض)

32) أي التالي يمثل حلاً للمعادلة
$\log_2 x + \log_2(x+3) = 2$؟

$-1, -4$ (a 1 (b

$\boxed{2}$ (c 4 (d

بتجربة الخيارات نجد أن الخيار الصحيح (b) لأن

$$\log_2 1 + \log_2(1+3)$$

$$= \log_2 1 + \log_2 4$$

$$= \log_2(1\times 4) = \log_2 4 = 2$$

أ : هيثم حرب
0797771137

33) إذا كان الاقتران

$f(x) = \log_2 x, g(x) = 8^{x+5}$ فأوجد $[f \circ g](x)$

$a)\ x+5$ $b)\ 2x+10$

$c)\ 2x+15$ $d)\ 8x+40$

$[f \circ g](x) = f[g(x)] = \log_2 8^{x+5}$

$= \log_2 (2^3)^{(x+5)}$

$\log_2 (2)^{(3x+15)}$

$= (3x+15)\log_2 2$

$= 3x+15$

34) اذا كان $3^{x-1} = 27$ فان قيمة x هي:

$a)\ 3$ $b)\ \boxed{4}$

$c)\ 5$ $d)\ 6$

حيث أن $27 = 3^3$ فان $3^{x-1} = 3^3$

الأساس = الأساس $x-1 = 3$

أي أن $x = 4$

35) اذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 32$ فان قيمة x هي:

$a)\ \boxed{-4}$ $b)\ 4$

$c)\ 5$ $d)\ 6$

حيث أن $32 = 2^5$ فان المقدار يصبح

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^5 \to\to \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

الأساس = الأساس فان $x-1 = -5$

أي أن $x = -4$

36) ما قيمة x التي تحقق المعادلة $7^{x-1} + 7 = 8$

$a)\ \boxed{1}$ $b)\ -1$

$c)\ 0$ $d)\ -2$

بتجربة الخيارات نجد أن $x = 1$ تحقق المعادلة المعطاة

37) أي مما يلي هو حلا للمعادلة

$$27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$$

$a)\ 4$ $b)\ 2$

$c)\ -2$ $d)\ \boxed{-4}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{27}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{3}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3} \to\to x+1 = -3$

$\to\to x = -4$

38) حل المعادلة

$$\log_4 x = \log_4 3 + \log_4 5$$

$a)\ 5$ $b)\ 12$

$c)\ \boxed{15}$ $d)\ 10$

نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات

$\log_4 x = \log_4 (3 \times 5)$

نحذف اللوغاريتم من الطرفين لينتج

$x = 15$

39) حل المعادلة

$\log_5 x = 2\log_5 3 - \log_5 2$

$a)\ \boxed{4.5}$ $\quad b)\ 5$

$c)\ 4$ $\quad d)\ 3.5$

$\log_5 x = \log_5 3^2 - \log_5 2$

$\log_5 x = \log_5 \frac{9}{2}$

نحذف اللوغاريتم من الطرفين

$x = \frac{9}{2} = 4,5$

40) أوجد حل المعادلة

$\log_4 x - \log_4(x-1) = \frac{1}{2}$

$a)\ \frac{1}{2}$ $\quad b)\ -\frac{1}{2}$

$c)\ \boxed{2}$ $\quad d)\ -2$

$\log_4 \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{x}{x-1} = 4^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x}{x-1} = 2$

$2x - 2 = x \rightarrow x = 2$

41) حل المعادلة $\log_3 x = 2$

$a)\ 3$ $\quad b)\ \boxed{9}$

$c)\ 27$ $\quad d)\ 1$

لابد من التحويل الى الصورة الأسية

$3^2 = x \rightarrow\rightarrow x = 9$

42) حل المعادلة $\log_9 x = \frac{3}{2}$

$a)\ 3$ $\quad b)9$

$c)\ \boxed{27}$ $\quad d)\ 1$

نحول الى الصورة الأسية $\quad x = 9^{\frac{3}{2}}$

$x = 3^3 = 27$

43) ما قيمة المقدار $log_3 13 - log_3 5$

$a)\ \log_5 13$ $\quad b)\ \boxed{\log_3 \frac{13}{5}}$

$c)\ \log_3 \frac{5}{13}$ $\quad d)\ 25$

$\log_3 13 - \log_3 5 = \log_3 \frac{13}{5}$

44) ما قيمة $3\log_3 9 - \log_5 \frac{1}{25}$

$a)$ 12 $b)$ 10

$c)$ $\boxed{8}$ $d)$ 4

$\log_3 9 = 2 , \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

$3\log_3 9 - \log_5 \frac{1}{25} = 3(2) - (-2) = 8$

45) ما قيمة $2\log_2 12 - \log_2 8 + 2\log_2 3$

$a)$ $\log_2 2$ $b)$ $\log_2 3$

$c)$ $\log_2 0.5$ $d)$ $\boxed{1}$

$2\log_2 12 - \log_2 8 + 2\log_2 3$

$= \log_2 12^2 - \log_2 8 + \log_2 3^2$

$= \log_2 \frac{144}{8 \times 9} = \log_2 2 = 1$

46) تبسيط المقدار

$2\log_7 x - 3\log_7 y + \log_7 z$

$a)$ $\log_7 \frac{x\,z}{y^2}$ $b)$ $\boxed{\log_7 \frac{x^2 z}{y^3}}$

$c)$ $\log_7 x^2 y^2 z$ $d)$ $\log_z \frac{x\,y}{z}$

$2\log_7 x - 3\log_7 y + \log_7 z = \log_7 \frac{x^2 z}{y^3}$

47) ما هي الصورة المختصرة للمقدار
$3\log_5 x - 4\log_5 y + 2\log_5 z$

$a)$ $\log_5 \frac{x\,z}{y^2}$ $b)$ $\boxed{\log_5 \frac{x^3 z^2}{y^4}}$

$c)$ $\log_5 x^4\, y^3 z$ $d)$ $\log_5 \frac{x^3\, y^4}{z}$

$3\log_5 x - 4\log_5 y + 2\log_5 z$

$= \log_5 x^3 - \log_5 y^4 + \log_5 z^2$

$= \log_5 \frac{x^3 z^2}{y^4}$

48) ما ناتج المقدار

$\log_5(x+1) + \log_5 x - 2\log_5(x+1)$

$a)$ $\log_5 \frac{x}{y^2}$ $b)$ $\boxed{\log_5 \frac{x}{x+1}}$

$c)$ $\log_5 x\,(x+1)$ $d)$ $\log_5 \frac{x+1}{x}$

$\log_5(x+1) + \log_5 x - \log_5(x+1)^2$

$= \log_5 \frac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \log_5 \frac{x}{x+1}$

49) استعمل $\log_4 2 = 0.5$ لايجاد قيمة $\log_4 32$

$a)\ 5.5$ $b)\ 1.2$
$c)\ \boxed{2.5}$ $d)\ 1.5$

$\log_4 32 = \log_4 2^5$

$5\log_4 2 = 5 \times \frac{1}{2} = 2.5$

50) اذا كان $log_3 2 \approx 0.6$ أوجد قيمة $log_3 4.5$ تقريبا

$a)\ 3.9$ $b)\ \boxed{1.4}$
$c)\ 7.5$ $d)\ 1.5$

$\log_3 4.5 = \log_3 \frac{45}{10} = \log_3 \frac{9}{2}$

$\log_3 9 - \log_3 2 = 2 - 0.6 = 1.4$

51) ما الصورة اللوغاريتمية $25^{\frac{1}{2}} = 5$

$a)\ \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ $b)\ \log_{25} 25 = 5$
$c)\ \boxed{\log_5 25 = \frac{1}{2}}$ $d)\ \log_{25} \frac{1}{2} = 25$

52) ما الصورة الأسية المكافئة للعبارة $\log 100 = 2$

$a)\ \boxed{100 = 10^2}$ $b)\ 10 = 100^2$
$c)\ 10 = 2^5$ $d)\ 100^2 = 1000$

$\log 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$

53) أوجد قيمة اللوغاريتمات الاتية :

① $\log 1000$
② $\log 0,01$
③ $\log_4 64$

① $\log 1000 = \log 10^3 = 3$
② $\log 0,01 = \log \frac{1}{100} = \log 10^{-2}$
③ $\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$

54) ما قيمة $\log_3 16$

$a)\ 2$ $b)\ \boxed{\frac{\log 16}{\log 3}}$
$c)\ \frac{\log 3}{\log 16}$ $d)\ 3^{16}$

$\log_3 16 = \frac{\log 16}{\log 3}$

أ : هيثم حرب
0797771137

55) أوجد قيمة $\log_5 125$

$a)\ 5$ $b)\ \frac{1}{3}$

$c)\ \boxed{3}$ $d)\ 1$

$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

56) أوجد قيمة $\log_{125} 5$

$a)\ 5$ $b)\ \boxed{\frac{1}{3}}$

$c)\ 3$ $d)\ 1$

حيث أن $125 = 5^3 \rightarrow 125^{\frac{1}{3}} = 5$

$\log_{125} 5 = \log_{125}(125)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

57) ما قيمة $log_2 \frac{1}{32}$

$a)\ 5$ $b)\ \frac{1}{5}$

$c)\ \frac{-1}{5}$ $d)\ \boxed{-5}$

$\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5}$

$= -5 \log_2 2 = -5$

58) أوجد قيمة $\log_6 \sqrt[3]{36}$

$a)\ 6$ $b)\ 3$

$c)\ \boxed{\frac{2}{3}}$ $d)\ \frac{3}{2}$

$\log_6 \sqrt[3]{36} = \log_6 \sqrt[3]{6^2} = \log_6 6^{\frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3}\log_6 6 = \frac{2}{3}$

59) أوجد قيمة $\log_{27} 3 + \log_{27} 9$

$a)\ \boxed{1}$ $b)\ 2$

$c)\ 3$ $d)\ 4$

نطبق قانون جمع اللوغاريتمات

$\log_{27} 3 + \log_{27} 9 = \log_{27}(3 \times 9)$

$\log_{27} 27 = 1$

60) اذا كان $3^{x-1} = 27$ فان قيمة x هي

$a)\ 3$ $b)\ \boxed{4}$

$c) 5$ $d)\ 6$

حيث أن $27 = 3^3$ فان $3^{x-1} = 3^3$

الأساس = الأساس $x - 1 = 3$

أي أن $x = 4$

61) اذا كان $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 32$ فان قيمة x هي

$a)\ \boxed{-4}$ $b)\ 4$

$c)\ 5$ $d)\ 6$

حيث أن $32 = 2^5$ فان المقدار يصبح

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = 2^5 \rightarrow\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

الأساس = الأساس فان $x - 1 = -5$

أي ان $x = -4$

62) ما قيمة x التي تحقق المعادلة

$$7^{x-1}+7=8$$

$a)\ \boxed{1}$ $b)\ -1$

$c)\ 0$ $d)\ -2$

بتجربة الخيارات نجد أن $x=1$ تحقق المعادلة المعطاة

---

63) أي مما يلي هو حلا للمعادلة

$$27\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=125$$

$a)\ 4$ $b)\ 2$

$c)\ -2$ $d)\ \boxed{-4}$

الحل

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=\frac{125}{27}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{5}{3}\right)^{3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}=\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\ \to\to\ x+1=-3$$

$$\to\to\ x=-4$$

---

64) حل المعادلة

$$\log_4 x=\log_4 3+\log_4 5$$

$a)\ 5$ $b)\ 12$

$c)\ \boxed{15}$ $d)\ 10$

نستخدم قانون جمع اللوغاريتمات

$$\log_4 x=\log_4(3\times 5)$$

نحذف اللوغاريتم من الطرفين لينتج $x=15$

أ : هيثم حرب
0797771137

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

1. أحد الاقترانات الآتية هو اقتران أسي :

$a)\ f(x) = 3x^2$ $\quad b)\ f(x) = \frac{1}{3^x}$

$c)\ f(x) = \sqrt[5]{x}$ $\quad d)\ f(x) = x^7$

2. النقطة التي تشترك فيها الاقترانات الأسية على صورة $f(x) = b^x$, $b > 0$ هي:

$a)\ (1,0)$ $\quad b)\ (0,0)$

$c)\ (0,1)$ $\quad d)\ (1,1)$

3. واحد من الاقترانات الأسية يعتبر مختلفاً

$a)\ f(x) = 2^x$ $\quad b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$c)\ f(x) = (3)^{x+1}$ $\quad d)\ f(x) = \left(\frac{5}{2}\right)^x$

4. القيمة العددية للاقتران $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 3$ عندما $x = 4$ هي :

$a)\ 16$ $\quad b)\ \frac{1}{16}$

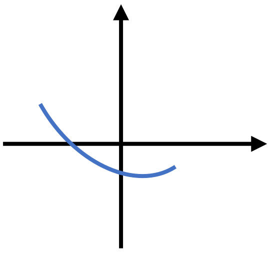
$c)\ \frac{3}{2}$ $\quad d)\ 9$

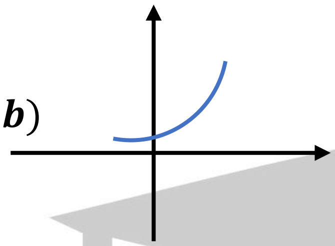
5. مدى الاقتران $f(x) = -(4)^x - 3$ هو:

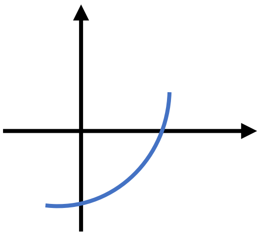
$a)\ (-\infty, -3)$ $\quad b)\ (-3, \infty)$

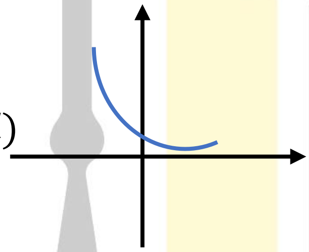
$c)\ (3, \infty)$ $\quad d)\ (-\infty, 3)$

6. أحد المنحنيات الأتية يعتبر منحنى للاقتران الأسي $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

$a)$ 

$b)$ 

$c)$ 

$d)$ 

7. خط التقارب للاقتران $f(x) = 3(2)^x - 5$ هو:

$a)\ y = 5$ $\quad b)\ y = -5$

$c)\ y = 3$ $\quad d)\ y = -3$

8. إذا كان الاقتران $f(x) = -2(4)^{x+1}$ فإن :

$a)\ h = 1 \ ,\ k = 6$

$b)\ h = -1 \ , k = -6$

$c)\ h = 1 \ ,\ k = -6$

$d)\ h = -1 \ ,\ k = 6$

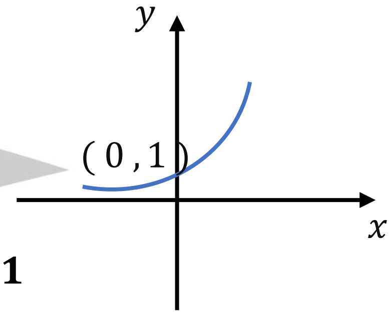
9. إذا كان الاقتران $f(x) = 5(2)^{-x} + 3$ فهو:

$a)$ متزايد $\quad b)$ متناقص

$c)$ ثابت $\quad d)$ لا شيء مما ذكر صحيح

أ : هيثم حرب
0797771137

10. يبين الرسم المجاور منحنى الاقتران $f(x)$ ، معتمداً على الرسم المجاور فإن قاعدة الاقتران $f(x)$ هي :



$a)\ f(x) = (2)^{-x}$

$b)\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$c)\ f(x) = 2^{x} + 1$

$d)\ f(x) = 2^{x}$

السؤال الثاني : مثل الاقتران $f(x) = (3)^{-x}$ بيانياً ثم اجد مجاله ومداه و خط التقارب والمقطع y وأحدد إذا كان متزايداً أم متناقص ؟

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة :

1. واحدة من التالية لا يعد شرطاً من شروط الاقتران الأسي $\left(f(x) = ab^{x+h} + k\right)$

$a)\ a > 0$ $\qquad$ $b)\ b \neq 1$

$c)\ b > 0$ $\qquad$ $d)\ a \neq 0$

2. أحد الاقترانات التالية هو اقتران متزايد على مجاله:

$a) f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{2x}$

$c)\ f(x) = -(5)^{x+1}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

3. أحد الاقترانات التالية هو اقتران أسي:

$a) f(x) = 2x^{2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \frac{1}{4^{x}}$

$c)\ f(x) = \sqrt[3]{z}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = x^{5}$

4. قيمة الاقتران $f(x) = 5(2)^{-x+1}$ عند $x = 3$ هي:

$a)\ \frac{1}{4}$ $\qquad$ $b) \frac{4}{5}$

$c) \frac{5}{4}$ $\qquad$ $d)\ 20$

أ : هيثم حرب
0797771137

5. أي الاقترانات الأسية التالية يعتبر مختلفاً عن الاقترانات الأخرى :

$a) f(x) = (3.5)^{1+x}$ $\quad b) \left(\frac{2}{7}\right)^x$

$c) f(x) = (5)^x$ $\quad d) f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

6. واحدة من الاقترانات التالية لا يقطع محور x عند أي نقطة :

$a) f(x) = -(3)^x + 5$

$b) f(x) = -3 + 5^x$

$c) f(x) = 6^x - 1$

$d) f(x) = 2^x$

7. مدى الاقتران الأسي $(f(x) = -(5)^x - 2)$ هو:

$a) (-\infty, -2)$ $\quad b) (-\infty, 2)$

$c) (2, \infty)$ $\quad d) (-2, \infty)$

8. المقطع y للاقتران الأسي $(f(x) = (10)^x - 3)$ هو:

$a) 2$ $\quad b) -3$

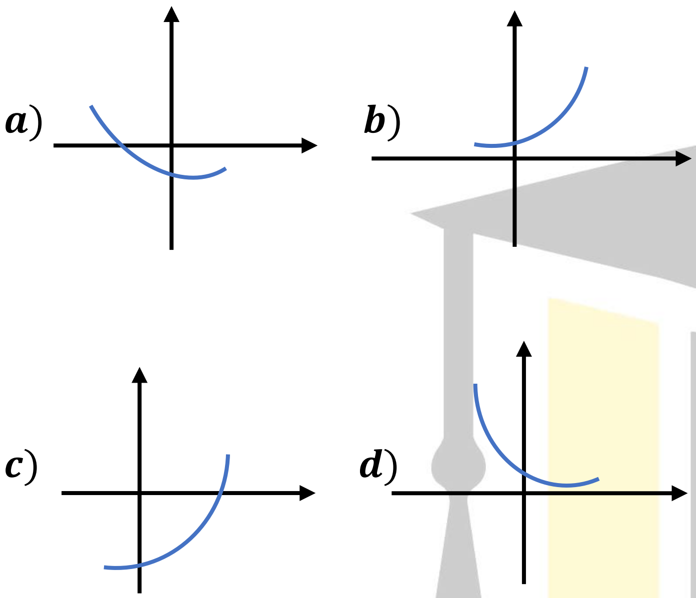
$c) -2$ $\quad d) 7$

9. خط التقارب الأفقي للأقتران الأسي $(y = 2(3)^{2x} - 5)$ هو :

$a) x = -5$ $\quad b) x = 5$

$c) y = -5$ $\quad d) y = 5$

10. أحد المنحنيات التالية يعتبر منحنى للاقتران الأسي $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$



11. يمثل الأقتران التالي $f(x) = 30(2)$ عدد الحشرات في كيس دقيقي حيث x عدد الأسابيع منذ بداية رصد وجودها في الكيس بعد كم اسبوعاً يصبح عدد الحشرات في الكيس يساوي 120 حشرة .

$a) 1$ $\quad b) 3$

$c) 2$ $\quad d) 4$

12. الاقتران الاسي الذي معادلته هي : $A(t) = 325(1 + 0.31)^t$ تمثل معادلة:

$a)$ معادلة نمو الاسي $\quad b)$ معادلة اضمحلال الاسي

$c)$ معادلة ربح الاسي

أ : هيثم حرب
0797771137

13. الكمية الابتدائية في الاقتران
$A(t) = 325(1+0.31)^t$

$a)\ 325$ $b)\ 1$
$c) 0.31$ $d)\ t$

14. الفترة الزمنية في الاقترن الاسي
: $A(t) = 325(1+0.31)^7$

$a)\ 325$ $b)\ 1$
$c)\ 31$ $d)\ 7$

15. الاقتران الاسي الذي معادلته هي
: $A(t) = 325(1+0.31)^t$

$a)$ معادلة نمو الاسي $b)$ معادلة اضمحلال الاسي
$c)$ معادلة ربح الاسي

16. عامل اضمحلال في الاقتران الاسي
: $A(t) = 325(1+0.31)^7$

$a)\ 325$ $b)\ 0.69$
$c)\ 0.31$ $d)\ 1.31$

17. الفترة الزمنية في الاقتران الاسي
$A(t) = 325(1-0.31)^6$

$a)\ 325$ $b)\ 1$
$c)\ 31$ $d)\ 6$

18. الاقتران الاسي الذي معادلته
$A(t) = 325\left(1-\frac{0.31}{4}\right)^{4t}$ تمثل معادلة:

$a)$ معادلة نمو الاسي $b)$ معادلة اضمحلال الاسي
$c)$ معادلة ربح الاسي

السؤال الثاني : يبلغ عدد الحور لمهرجان الموسيقى السنوي 150 ألف شخص ، يزايد عدد لحضور بنسبة 8% كل عام.

a) أكتب اقتران الأسي الذي يمثل عدد الحضور بعد t سنة.

b) كم عدد الأشخاص الذين سيحضرون المهرجان في السنة الخامسة؟

السؤال الثالث : قيمة السيارة 21500 دينار ، تفقد 3.5% من قيمتها كل عام.

a) اكتب اقتران الأسي الذي يمثل القيمة السيارة بعد t سنة.

b) كم يصبح شمن السيارة بعد 3 سنوات.